Université A. Mira de Béjaia **Année 2009/2010**
Faculté de la Technologie **2ème Année LMD/ST**

MATH VI : Analyse Numérique

RAPPELS
NORMES VECTORIELLES, NORMES MATRICIELLES et CONDITIONNEMENT

I-NORMES

I.1-NORMES VECTORIELLES

Propriétés : pour tous $\vec{u}, \vec{v}$ et $\alpha \in \Re$

a- $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

b- $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$

c- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Les différentes normes des vecteurs sont :

$$\|\vec{v}\|_1 = \sum_i |v_i|$$

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{\sum_i |v_i|^2} = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}$$

$$\|\vec{v}\|_p = \left(\sum_i |v_i|^2 \right)^{1/p}$$

$$\|\vec{v}\|_\infty = \max_i |v_i|$$

Deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont équivalentes s'il existe deux constantes c et c' telles que :

$$\|\vec{v}\|' \leq c\|\vec{v}\| \text{ et } \|\vec{v}\| \leq c'\|\vec{v}\|'$$

I.2-NORMES MATRICIELLES

Propriétés : pour tous A, B et $\alpha \in \Re$

a- $\|A\| = 0 \iff A = 0$

b- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

c- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

d- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle.

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$$

Remarque : $\|A\|$ est bien défini car $\sup_{\|v\|=1} \|Av\|$ est borné en raison de la continuité de l'application $v \rightarrow \|Av\|$ et de la compacité de la sphère unité et il existe au moins un vecteur v tel que $\|Av\| = \|A\| \|v\|$

-La norme subordonnée $\|A\|$ est bien une norme matricielle.

- Pour tout vecteur v, on a $\|Av\| \leq \|A\| \, \|v\|$.

- $\|I\| = 1$

- $\|A\|_1 = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$

- $\|A\|_\infty = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

- $\|A\|_2 = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$

Où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de la matrice A, c'est-à-dire la plus grande valeur propre de A en valeur absolue.

Théorème :

Si A est inversible et M est telle que $\|M - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ alors M est inversible.

Si $\|A\| < 1$ alors $I + A$ est inversible et $\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$

Si $I + A$ est singulière alors $\|A\| \geq 1$

Définitions :

A est dite à diagonale strictement dominante si pour tout i $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

I.3- CONDITIONNEMENT :

Sources d'erreurs dans la résolution des problèmes numériques :

Erreurs d'arrondis
Erreurs de troncature dans les méthodes itératives.
Erreurs de mesures dans les données expérimentales.

I.3.1-Conditionnement Matrice :

Soit $AX = B$ et $A(X + \delta X) = B + \delta B$

D'où $A\delta X = \delta B$, $A^{-1}B = X$ et $A^{-1}\delta B = \delta X$

On a $\|B\| = \|AX\| \leq \|A\| \; \|X\|$ d'où $\|X\| = \|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \; \|B\|$

De même $\|\delta B\| \leq \|A\| \; \|\delta X\|$ d'où $\|\delta X\| \leq \|A^{-1}\| \; \|\delta B\|$

Finalement

$$\frac{1}{\|A\| \; \|A^{-1}\|} \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \leq \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\| \; \|A^{-1}\| \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

On fait maintenant varier A

Soit $AX = B$ et $(A+\delta A)(X+\delta X) = B$ d'où $A\delta X + \delta A(X+\delta X) = 0$

$$\Rightarrow \delta X = -A^{-1}\delta A(X+\delta X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\delta X\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta A\| \, \|X+\delta X\|$$

$$\text{Et} \quad \frac{\|\delta X\|}{\|X+\delta X\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Définition : Conditionnement d'une matrice

Si A est inversible, $cond(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

Théorème

1. Soient A une matrice inversible, B un vecteur non nul, et soient X et $X+\delta X$ les solutions des systèmes linéaires $AX = B$ et $A(X+\delta X) = B+\delta B$, alors on a l'inégalité

$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \leq \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

et c'est la meilleure possible.

2. Soient A une matrice inversible, B un vecteur non nul, et soient X et $X+\delta X$ les solutions des systèmes linéaires $AX = B$ et $(A+\delta A)(X+\delta X) = B$, alors on a l'inégalité

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X+\delta X\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

et c'est la meilleure possible.

Supposons maintenant que $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ alors $\|A^{-1}\delta A\| < \|A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1$

Donc la matrice $I + A^{-1}\delta A$ est inversible et $\left\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|}$

On a $\delta X = -A^{-1}\delta A(X+\delta X)$ et $X+\delta X = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} X$

En posant $\|A^{-1}\delta A\| = t$ et $\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| = t'$

$$\|\delta X\| \leq t\|X+\delta X\| \leq t\left\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\right\| \, \|X\| \leq \frac{t}{1-t}\|X\| \leq \frac{t'}{1-t'}\|X\|$$

Car la fonction $t \to \dfrac{t}{1-t}$ est une fonction croissante

D'où

Théorème

Si $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ alors $\dfrac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq cond(A) \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|} \left(\dfrac{1}{1-\|A^{-1}\| \, \|\delta A\|} \right)$

Propriétés

Pour toute matrice A inversible

1. $cond(A) \geq 1$
   $cond(A) = cond(A^{-1})$
   $cond(\alpha A) = cond(A)$ pour tout $\alpha \geq 0$
2. Si A est une matrice normale $\left(A \quad A^* = A^* \quad A\right)$, en particulier réelle symétrique $\left(A \quad {}^tA = {}^tA \quad A\right)$, alors $cond_2(A)$ est égal au rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre de A en valeurs absolues.
3. Si A est une matrice unitaire $\left(A \quad A^* = A^* \quad A = I\right)$ ou orthogonale $\left(réelle \;\; et \quad A \quad {}^tA = {}^tA \quad A = I\right)$ alors $cond_2(A) = 1$

Les systèmes linéaires à matrices orthogonale ou unitaire sont bien conditionnés.