Mécanique du point

Table des matières

Objectifs

Objectifs du module :

A travers ce module mes étudiant seront capable de :

* Mettre en pratique les concepts d'espace et de temps physiques et du repérage de mobiles dans différentes bases de cet espace;

* Appliquer la cinématique du point matériel qui permet d'étudier le mouvement sans se préoccuper des causes qui le provoquent et cela dans des référentiels fixes et des référentiels en mouvement relatif les uns par rapport aux autres;

*Construire la forme d'une équation à partir d'hypothèses sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique.

* Énoncer le concept de forces et d'interactions physiques, de mouvement et de repos;

* Interpréter les principes de la dynamique d'un point matériel et d'un système dans un référentiel galiléen et dans un référentiel non galiléen et de maîtriser leurs applications dans la résolution des problèmes;

* Exercer les notions de travail et d'énergie cinétique, potentielle et mécanique d'un point matériel et d'un système;

Pré-requis :

o Calcul différentiel.

o Calcul des primitives et intégrales.

o Les vecteurs. analyse trigonométrique.

o Notions de base en physique.

III chapitre 3

I

La cinématique s'intéresse à la description du mouvement d'un corps physique indépendamment de ses causes, alors que la dynamique (objet du prochain chapitre), le pilier de la mécanique, a pour objet l'étude des causes de la modification du mouvement. Pour résumer, on peut noter :

Mécanique = Cinématique + Dynamique

Dans le cours de mécanique du point matériel, le seul objet étudié sera le point matériel ou particule.

La cinématique introduit la notion de temps. À ne pas confondre avec la cinétique Ce lien renvoie vers une page d'homonymie, un terme plus général qui concerne la vitesse et les mécanismes d'une grande variété de processus ; en mécanique, cinétique est utilisé comme adjectif pour qualifier deux grandeurs impliquant aussi la masse : le moment cinétique et l'énergie cinétique.

On peut dater la naissance de la cinématique moderne à l'allocution de Pierre Varignon le 20 janvier 1700 devant l'**Académie royale des sciences de Paris1**. À cette occasion il définit la notion d'accélération et montre comment il est possible de la déduire de la vitesse instantanée à l'aide d'une simple procédure de calcul différentiel.

Toute figure mobile peut être regardée comme un système de points mobiles, il est alors naturel de commencer par l'étude du mouvement du point mobile isolé.

Un point matériel est un modèle commode pour représenter un corps physique réel. Ce modèle est valable si les dimensions du corps physique sont faibles par rapport à la distance d'observation (de celui qui observe le mouvement). Par exemple, la navette spatiale peut-être assimilée à un point matériel pour un observateur terrestre mais pas pour son commandant de bord.

En effet pour ce dernier, la navette a des dimensions spatiales, elle peut tourner sur elle-même etc...

Décrivons de façon plus précise un point matériel :

- Il s'agit d'un objet sans dimension, sans forme (un point au sens des mathématiques).
- Le mouvement d'un point matériel se déroule dans l'espace et dans le temps. La connaissance de ce mouvement nécessite la connaissance de trois coordonnées (x ,y ,z ou r ,!,z ...) dépendant du paramètre temps.
- Un point matériel est caractérisé par sa masse notée m . Il s'agit d'une grandeur scalaire (un nombre pur) dont l'unité est le kilogramme (kg). La masse est une grandeur invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel d'étude.

1. Objectifs et Pré-requis

Objectifs :

A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de :

- déterminer les outils nécessaires à la description du mouvement.
- Expliquer les différents types de mouvements (rectiligne, circulaire, uniforme...).
- Calculer la vitesse et l'accélération d'un point d'un solide en mouvement
- Déterminer l'expression des vecteurs vitesses et accélérations d'un point d'un solide en mouvement.
- prendre en compte les mouvements de rotation de l'objet sur lui-même.

Pré-requis :

- Il est néanmoins préférable d'avoir de bonnes bases en calcul différentiel (calcul de dérivées des fonctions usuelles, opérations sur les dérivées, formes infinitésimales).
- Algèbre vectorielle (notion de vecteur, somme et combinaisons linéaires de vecteurs, produit scalaire, projections).

2. Définition

La cinématique du point matériel vise à décrire les mouvements (vitesse, accélération, trajectoire d'un mobile, équation horaire,... etc.) sans se préoccuper des causes qui les provoquent. Elle repose cependant sur les notions physiques de l'espace et du temps. La position d'un point matériel est donnée par les 03 coordonnées de position du point dans l'espace. On dit qu'il possède 03 degrés de liberté de mouvement.

3. REPÈRE D'ESPACE ET RÉFÉRENTIEL

En physique, il est impossible de définir une position ou un mouvement par rapport à l'espace « vide ». Un référentiel est un solide (un ensemble de points fixes entre eux) par rapport auquel on repère une position ou un mouvement. Un dispositif servant d'horloge est également nécessaire pour pouvoir qualifier le mouvement1 et définir la notion de vitesse. Un exemple classique de référentiel est le référentiel terrestre qui est lié à la Terre.

Pour préciser mathématiquement les caractéristiques du mouvement, on définit ensuite un système de coordonnées de l'espace et du temps permettant de repérer les événements sous forme d'un quadruplet de nombres : trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps. Un « repère » (système de coordonnées) permet de quantifier les positions et les vitesses et ainsi de représenter une trajectoire par une courbe mathématique et de mathématiser l'effet des forces physiques sur les corps. Toutefois, il n'est pas nécessaire de définir un système de coordonnées pour constater un mouvement, par exemple pour voir qu'un promeneur est en mouvement par rapport au référentiel du sol.

Le mouvement dépend du référentiel choisi : le marcheur qui avance sur le sol n'avance pas par rapport à lui-même (par rapport au référentiel marcheur, c'est le sol qui recule).

La mécanique (newtonienne ou relativiste) postule l'existence d'une classe privilégiée de référentiels dits référentiels galiléens (ou inertiels) dans lesquels le principe d'inertie s'applique : un corps ponctuel non soumis à une force s'y déplace en mouvement rectiligne uniforme.

3.1. Repère d'espace

On appelle repère d'espace un ensemble de points dont les distances sont invariables au cours du temps. Un tel ensemble est aussi appelé un solide de référence. Par exemple une table, un bateau, la terre peuvent servir de repère d'espace.

3.2. Système de coordonnées

On exprime la position d'un objet par rapport à un système de coordonnées qui est constitué d'un ensemble de trois axes dont chacun correspond à une direction de l'espace et qui est considéré comme fixe par rapport à un repère d'espace. On dit que le système de coordonnées est lié au repère. Dans la suite, nous allons utiliser les systèmes de coordonnées suivants :

→ Cartésien

→ Polaire (cylindrique à 2D)

→ Cylindrique

→ Sphérique (plus tard)

4. Référentiel

Un ensemble formé d'un repère d'espace et d'un repère de temps (un ensemble d'horloges synchronisées) constitue un référentiel, c'est–à-dire une référence spatiale et une référence temporelle, toutes deux indispensables dans l'étude de tout mouvement.

Référentiel = Repère d'espace + Repère de temps

MOUVEMENT DANS L'ESPACE

II

Dans la suite, on travaille dans un certain référentiel **IR** qu'il n'est pas nécessaire pour l'instant de préciser. Mais pour fixer les idées, nous pouvons travailler dans le référentiel dit du laboratoire constitué du bâtiment de physique du département auquel nous attachons trois axes fixes (par exemple

orthonormés) et muni d'une horloge.

Dans cette partie, nous allons définir le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Un vecteur est un objet mathématique dont l'existence est indépendante du système de coordonnées utilisées. Mais pour débuter, après avoir défini de façon intrinsèque ces vecteurs (c'est-à-dire de façon indépendante du système de coordonnées utilisé), nous les exprimerons d'abord en coordonnées cartésiennes. Ensuite seulement, nous exprimerons ces vecteurs en coordonnées polaires puis en coordonnées cylindriques.

1. Le vecteur position

La position dans l'espace d'un point matériel est indiquée par le vecteur position

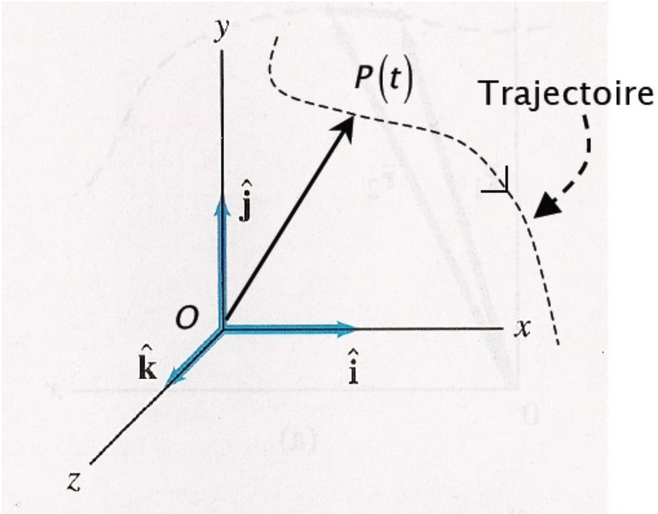
$$\vec{r}(t)=\vec{OP}(t)$$

où **O** est un point fixe quelconque du référentiel d'étude et **P(t)** la position du point matériel à l'instant t considéré.

En coordonnées cartésiennes, dans la base orthonormée :

$$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})\, où\, \vec{i},\vec{j},\vec{k}$$

des vecteurs unitaires fixes dans le temps (cf figure suivante)



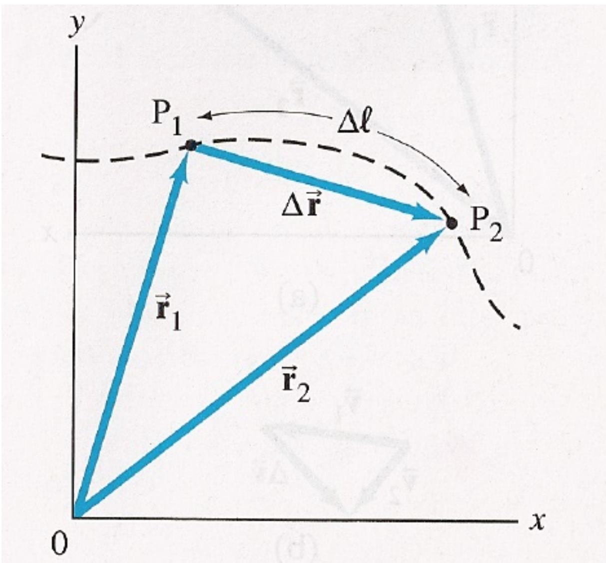
Le vecteur position et son module,en coordonnées cartésiennes, s'expriment de la façon suivante :

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\ et\ r=\|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2. Le vecteur déplacement

Soit P_1 la position du point matériel à l'instant t_1 et P_2 sa position à l'instant t_2 (voir figure). Le vecteur déplacement est défini par :

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1\ où\ \vec{r}_2=\vec{r}(t_2)\ et\ \vec{r}_1=\vec{r}(t_1)$$



Dans le cours de sciences physiques, le symbole Δ indique toujours la variation d'une grandeur physique quelconque X entre deux valeurs : $\Delta X = X_2 - X_1$

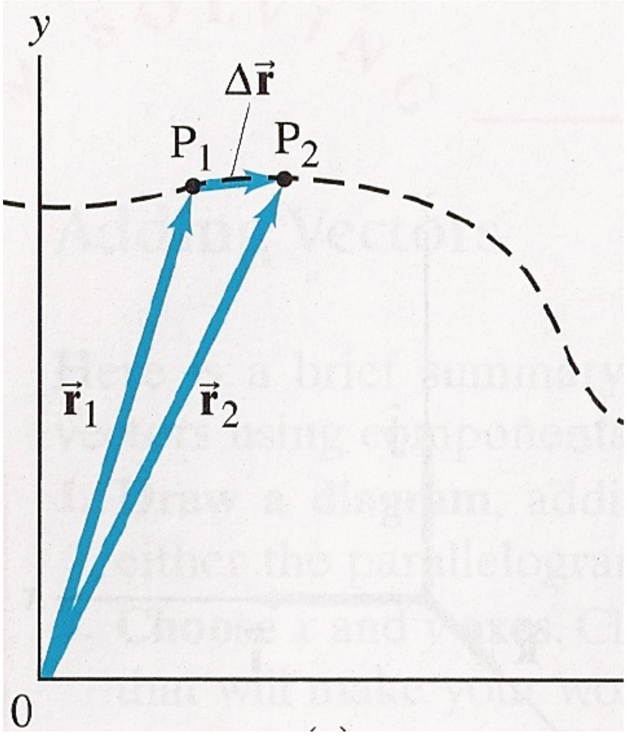
En coordonnées cartésiennes, l'expression du vecteur déplacement est donnée par:

$$\Delta\vec{r}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

3. Le vecteur vitesse moyen et le vecteur vitesse instantané

Pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, le vecteur vitesse moyen est défini par l'expression suivante (pour sa représentation cf figures ci-dessous):

$$\vec{V}_{moy}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



Remarque

dans cette figure le vecteur vitesse moyenne s'obtient en divisant le vecteur déplacement par Δt, donc ces deux vecteurs ont la même direction, le même sens (Δt est positif) et leurs modules sont proportionnels.

On considère à présent des intervalles de temps Δt de plus en plus courts. Ainsi la distance entre P_1 et P_2 tend aussi vers zéro. On définit alors le vecteur vitesse instantané comme la limite du vecteur vitesse moyen quand l'intervalle de temps !t tend vers zéro :

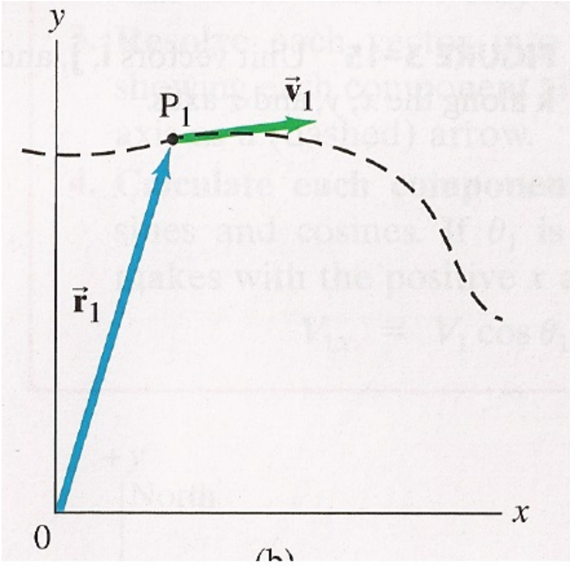
L'expression du vecteur vitesse instantané est donnée par :

$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Le vecteur vitesse instantané, noté simplement

$$\vec{V}$$

On l'appellera simplement par la suite vecteur vitesse, il correspond à la dérivée du vecteur position. En un point donné et est tangent à la trajectoire en ce point (cf figure).



En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse instantané s'écrit :

$$\vec{V} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

Remarque

Il faut noter que :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

puisque les vecteurs de base sont constants au cours du temps en direction et en norme.

4. Le vecteur accélération moyen et le vecteur accélération instantané

De façon analogue à

$$\vec{V}_{moy}$$

On définit pendant l'intervalle de temps !t =t 2 "t1 , le vecteur accélération moyen par

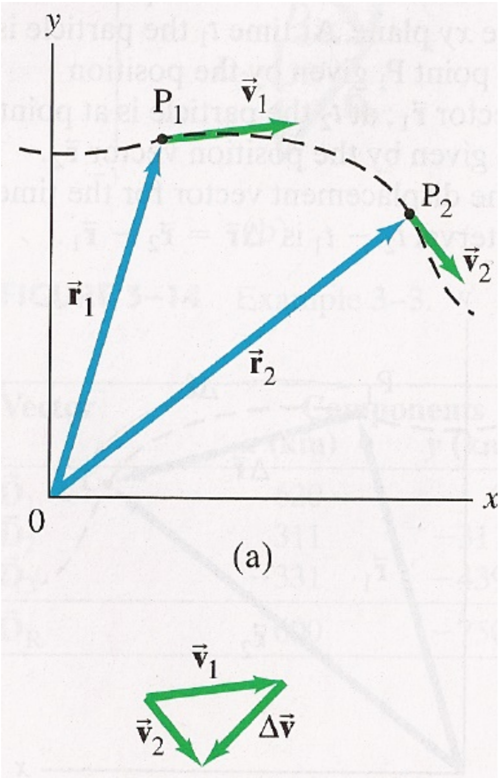
$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

On considère à présent des intervalles de temps Δt de plus en plus courts. On définit alors le **vecteur accélération instantané** comme la limite du vecteur accélération moyen quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro.

Vecteur accélération instantané :

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right)=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Le vecteur accélération instantané , (on l'appellera simplement vecteur accélération par la suite) correspond à la dérivée première du vecteur vitesse et à la dérivée seconde du vecteur position.



Le vecteur

$$\vec{a}$$

est non nul si la norme de

$$\vec{V}$$

change mais aussi, si à norme de

$$\vec{V}$$

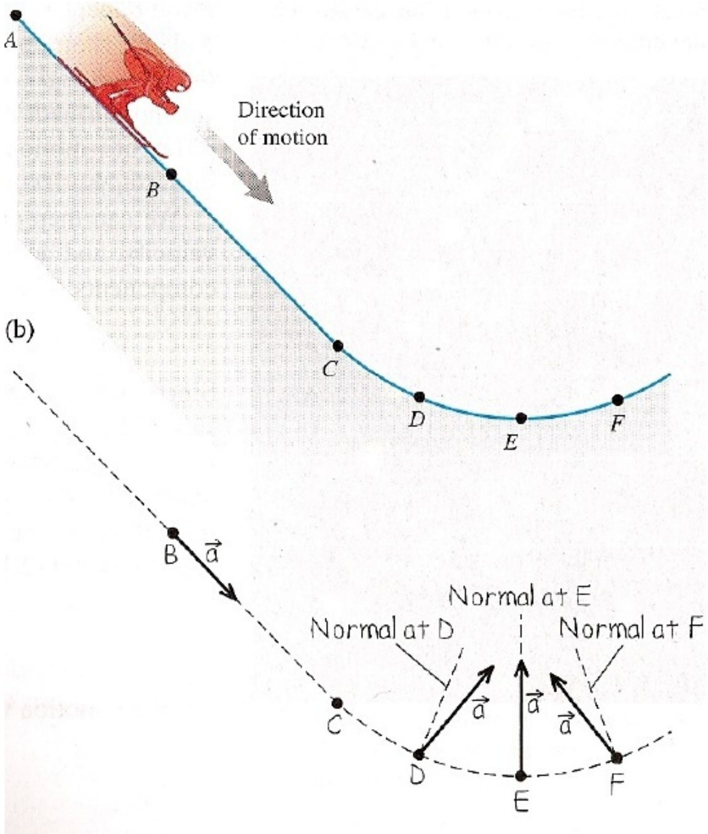
constante, la direction de

$$\vec{V}$$

change. De plus, pour une trajectoire courbe,

$$\vec{a}$$

est toujours vers l'intérieur de la courbure comme cela est indiqué sur l'exemple de la figure suivante.



Vecteur accélération instantané en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}=\frac{d^2X}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2Y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2Z}{dt^2}\vec{k}=\frac{dV_x}{dt}\vec{i}+\frac{dV_y}{dt}\vec{j}+\frac{dV_z}{dt}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

Remarque

Pour la dérivée par rapport au temps, on utilise aussi la notation « point », par exemple

$$\frac{dx}{dt}\text{ est aussi noté } \dot{x}$$

5. Expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires, mouvement à deux dimensions

a) Les coordonnées polaires :

En coordonnées polaires, un point est repéré par les variables (r ,θ), comme indiqué sur la figure suivante, avec $r\in[0,\infty[$ et $\theta\in[0,2\pi]$. Le lien avec les coordonnées cartésiennes est immédiat :

$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

On travaille dans la base orthonormée directe :

$$(P,\vec{U}_r,\vec{U}_\theta)$$

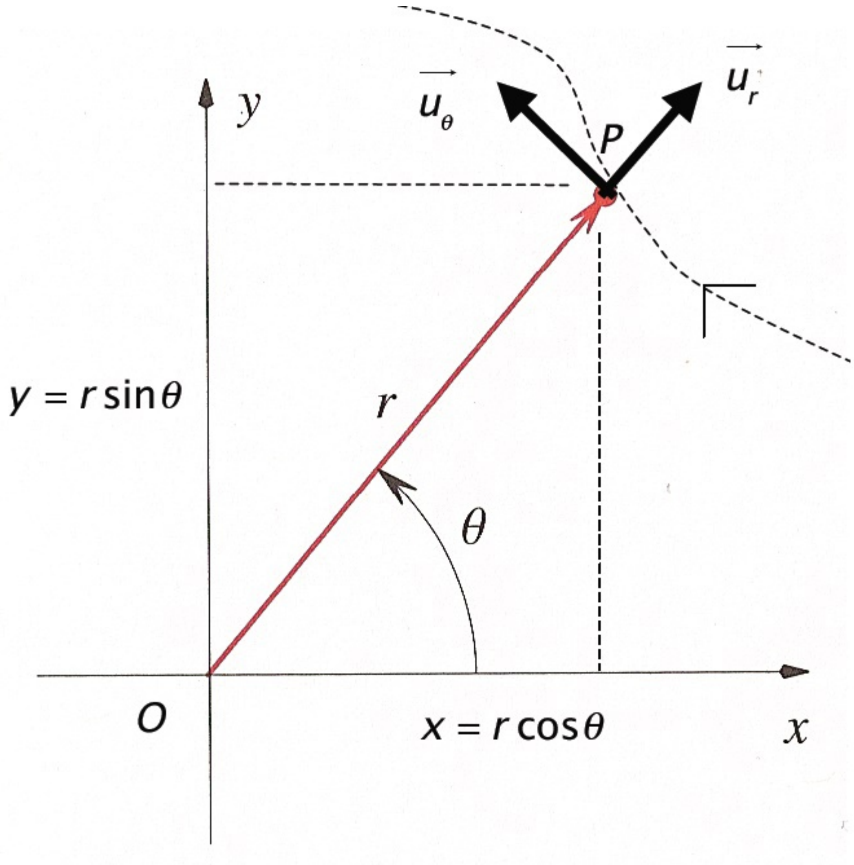
Il s'agit d'une base locale car elle est attachée au point mobile **P** ;ce n'est pas le cas pour la base :

$$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}).$$

Les vecteurs :

$$\vec{U}_r et\,\vec{U}_\theta$$

varient dans le temps, leur dérivée respective n'est donc pas nulle.



b) Le vecteur position :

Son expression est très simple dans ce cas :

$$\vec{r}(t)=r\vec{u}_r$$

c) Le vecteur vitesse :

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Or

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}=\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

d'où

$$\vec{V}(t) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

d) Le vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)}{dt}$$

En utilisant les règles habituelles de dérivations d'un produit et les expressions des dérivées des vecteurs de base, on obtient :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{V}(t)}{dt} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$

Le premier terme

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$$

correspond à la composante radiale de l'accélération et le second terme

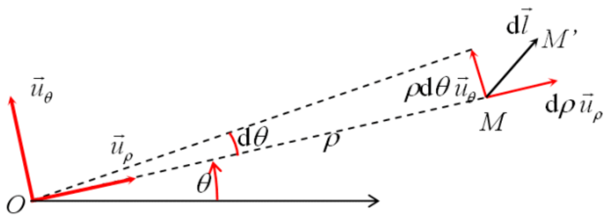
$$2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}$$

est sa composante orthoradiale.

Remarque

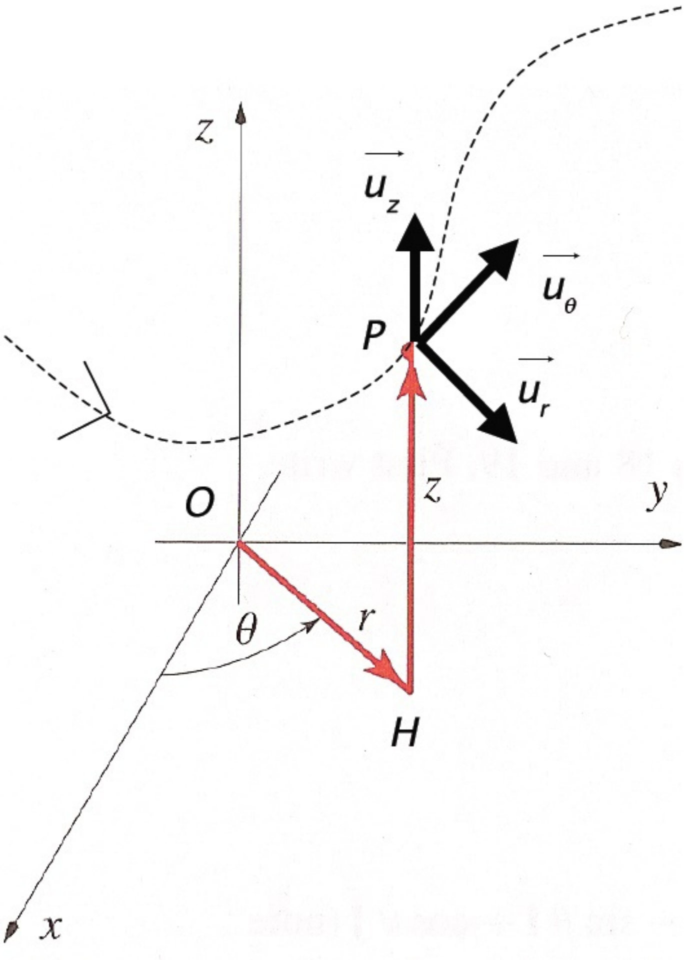
Expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires

$$d\,\vec{OM} = \vec{dl} = \vec{V}(t)\,dt = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$



6. Expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques, mouvement à trois dimensions

Il s'agit de la généralisation des coordonnées polaires pour les mouvements en trois dimensions. Un point est repéré par les variables **(r ,θ,z)** , comme indiqué sur la figure ci dessous. Il s'agit du même z qu'en coordonnées cartésiennes. $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in]-\infty, +\infty[$.



On travaille dans la base orthonormée directe

$$(P, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_Z)$$

Il s'agit encore d'une base locale car elle est attachée au point mobile P . Les vecteurs :

$$\vec{U}_r \; et \; \vec{U}_\theta$$

varient dans le temps, leur dérivée respective n'est donc pas nulle. Par contre

$$\vec{U}_Z$$

est un vecteur constant, sa dérivée temporelle est nulle.

En notant que :

$$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{HP} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

et en utilisant la définition de

$$\vec{V} \; et \; de \; \vec{a}$$

on arrive facilement aux résultats suivants :

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z\,,$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

les modules des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques :

$$\|\vec{r}(t)\| = r = \sqrt{r^2 + z^2}\,,\ \|\vec{v}(t)\| = v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}\; et\; a = \sqrt{(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)^2 + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

Expression du vecteur déplacement élémentaire :

On obtient l'expression très simplement en combinant un déplacement élémentaire en coordonnées polaires avec un déplacement élémentaire suivant l'axe . On a donc :

$$d\,\vec{OM} = \vec{dl} = \vec{V}\,(t)\,dt = dr\,\vec{u}_r + rd\,\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$$

7. Expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques, mouvement à trois dimensions

Définition :

Les coordonnées sphériques (voir figure) permettent de repérer un point sur une sphère de rayon . C'est typiquement le repérage d'un point sur la Terre pour lequel il suffit alors de préciser deux angles: la latitude et la longitude.

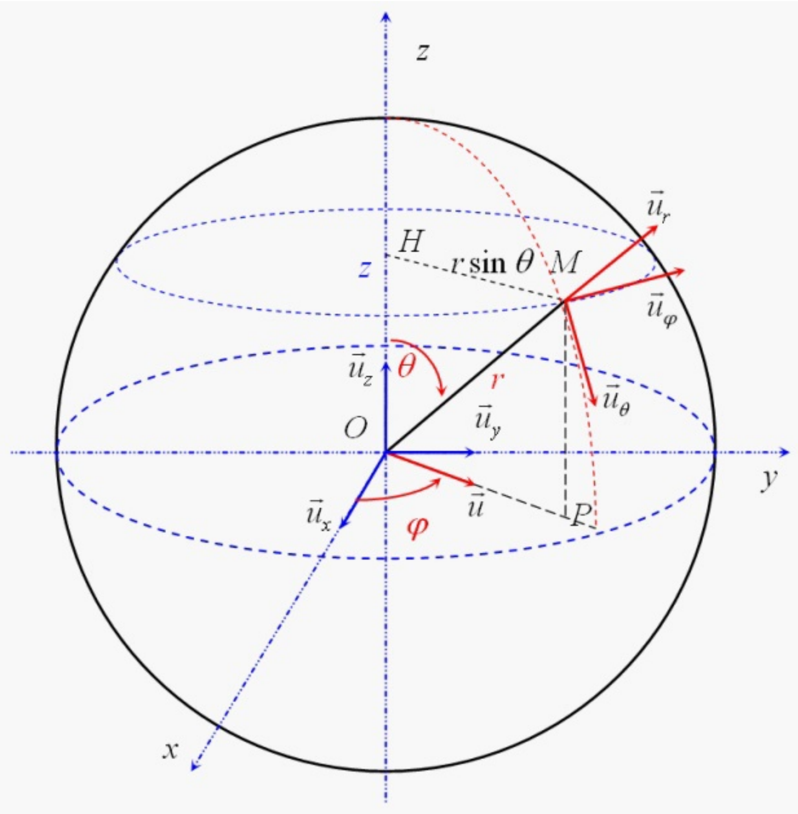


Figure : Le système de coordonnées sphériques **(r,θ,Φ)** et la base associée

$$\left(\vec{u}_r , \vec{u}_\theta , \vec{u}_\varphi\right)$$

Ces vecteurs forment une base orthonormée directe. Cette base est « mobile » dans le repère.

Coordonnées sphériques (r,θ,Φ) :

- La coordonnée radiale **r** correspond à la distance de l'origine **O** du repère au point **M**.
- La coordonnée angulaire **θ** correspond à l'angle que fait **OM** avec l'axe **OZ**. Cet angle, compris entre **0** et **π**, est appelé colatitude (angle complémentaire de la latitude) ou zénith.
- La coordonnée angulaire **Φ** correspond à l'angle que fait le plan défini par l'axe **OZ** et **OM** avec l'axe **OX** Cette angle, compris entre **0** et **2π**, est appelé la longitude ou l'azimut.

a)-1- Le vecteur position dans la base des coordonnées sphériques

Le vecteur position permet de définir le premier vecteur de la base :

$$\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$$

Le vecteur unitaire

$$\vec{u}_r$$

est suivant la direction et le sens de **O** vers **M** : c'est le vecteur radial (suivant le rayon).

Lorsque seul l'angle **θ** varie, le **M** point décrit un demi-cercle (un méridien) de rayon **r**. Le vecteur unitaire

$$\vec{u}_\theta$$

est tangent à ce demi-cercle (suivant le méridien) orienté comme **θ**.

Lorsque seul l'angle **Φ** varie le point **M** décrit un cercle de rayon **r sinθ**. Le vecteur unitaire

$$\vec{u}_\varphi$$

est tangent à ce cercle (suivant un parallèle) orienté comme **φ** .

a)-2- Relation entre les coordonnées sphériques et cartésiennes :

La projection **H** du point **M** sur l'axe **Oz** donne la cote :

Z=OH=rcosθ ....(1-a)

Si **P** est la projection de **M** sur le plan **xOy** on a : OP=r sinθ

Les coordonnées **x** et **y** du point **M** sont celles du point **P** c'est à dire :

X=OP cosΦ = r sinθ cos Φ........(2-a)

Y=OP sin Φ = r sin θ sin Φ........(3-a)

Le vecteur unitaire suivant a pour expression :

$$\vec{u} = \cos\Phi\,\vec{u}_x + \sin\Phi\,\vec{u}_y$$

Les vecteurs de la base des coordonnées sphériques :

$$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\Phi\,\vec{u}_x + \sin\theta\sin\Phi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\Phi\,\vec{u}_x + \cos\theta\sin\Phi\,\vec{u}_y - \sin\theta\,\vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\Phi\,\vec{u}_x + \cos\Phi\,\vec{u}_y$$

b)-Expression en coordonnées sphériques :

L'expression du vecteur vitesse peut s'obtenir à partir de l'expression du déplacement élémentaire. En s'aidant de la figure 6 un déplacement élémentaire peut se décomposer en :

- Déplacement élémentaire radial **dr** suivant

$$\vec{u}_r$$

(le point s'éloigne de l'origine). La coordonnée radiale passe de **r** à **r+dr.**

- Déplacement élémentaire suivant (le point se déplace sur le méridien) La colatitude passe de **θ** à **θ+dθ**.
- Déplacement élémentaire **r sin θ dΦ** suivant

$$\vec{u}_\varphi$$

(le point se déplace suivant le parallèle) La longitude passe de **Φ** à **Φ+dΦ**.

On obtient donc l'expression :

$$d\,\vec{OM} = \vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\,\theta\,\vec{u}_\theta + \sin\theta\,d\,\Phi\,\vec{u}_\varphi$$

On en déduit l'expression du vecteur vitesse

$$\vec{V}(t)=\frac{d\,\vec{OM}}{dt}=\frac{\vec{dl}}{dt}=\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+\frac{rd\,\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\frac{r\sin\theta\,d\,\theta\,d\,\Phi}{dt}\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{V}(t)=\frac{d\,\vec{OM}}{dt}=\frac{\vec{dl}}{dt}=\dot{r}\,\vec{u}_r+r\,\dot{\theta}\,u_\theta+r\sin\theta\,\dot{\Phi}\,\vec{u}_\varphi$$

Remarque

Les coordonnées sphériques du point **M** sont : **(r, θ, Φ)**

Les composantes du vecteur position sont : **(r,0,0)**

8. Base de Frenet)

a) Abscisse curviligne et base de Frenet (dans un plan) :

Lorsque la trajectoire que suit le point **M** est connue il est possible de repérer le point sur la courbe représentant cette trajectoire. On choisit sur la courbe orientée un point origine **ω** et on définit l'abscisse curviligne comme la mesure algébrique sur la courbe de la distance **ωM**:

$$S=\overline{\omega M}$$

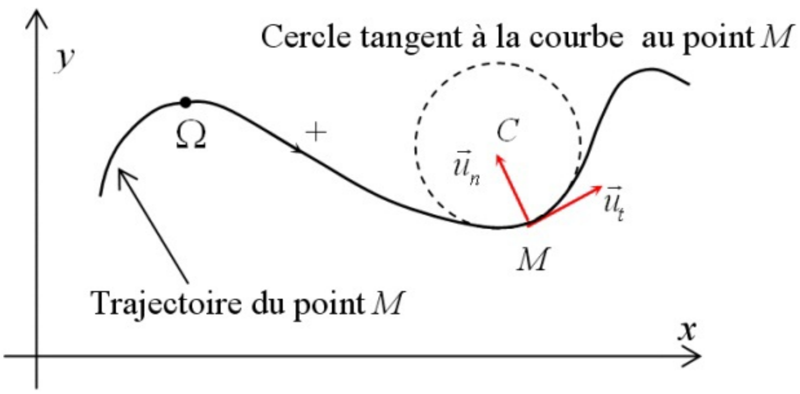


Figure : Abscisse curviligne (S=ωM mesure sur la trajectoire) et base de Frenet

$$(\vec{u}_t\,,\,\vec{u}_n)$$

Le cercle de centre **C** et de rayon **ρ** qui tangente localement en **M** la trajectoire du point est appelée cercle osculateur. Le rayon **ρ** de ce cercle correspond alors au rayon de courbure de la trajectoire au point considéré (voir figure) et **C** est le centre de courbure. En chaque point **M** de la courbe on définit la base de Frenet avec :

$$\vec{u}_t$$

Est un vecteur tangent à la courbe en M et orienté dans le sens positif choisi.

$$\vec{u}_n : [est\, un\, vecteur\ perpendiculaire\, à\, \vec{u}_t]$$

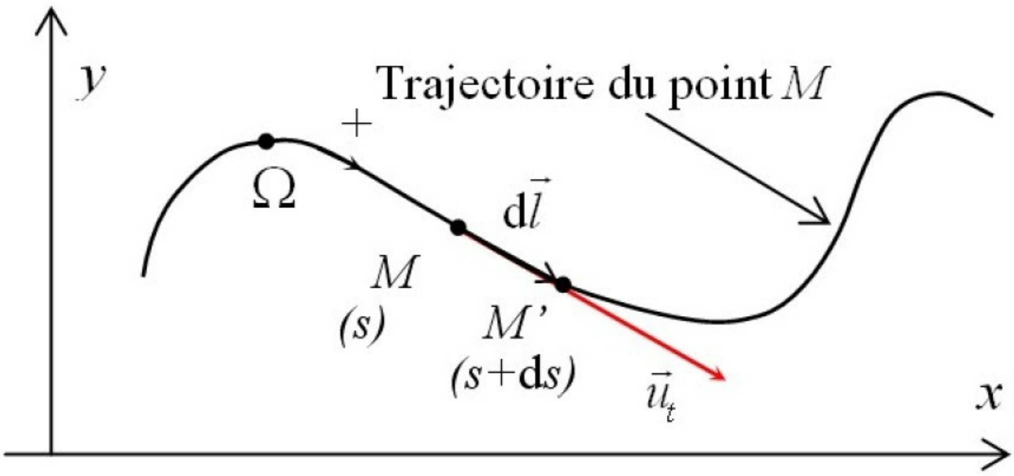
et orienté vers le centre de courbure (de M vers C). Cette base est "mobile" dans le repère.

b) Expression du vecteur vitesse dans la base de Frenet :

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point **M** en décrivant la trajectoire, l'abscisse curviligne du point **M** passe de **S** à **S + dS** entre l'instant **t** et l'instant **t +dt** (voir la figure qui représente le déplacement élémentaire dans le repère de Frenet).

Le déplacement élémentaire du point est tangent à la trajectoire et s'écrit alors :

$$d\,\vec{OM} = \vec{MM}' = dS\,\vec{u}_t$$



Le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t = \dot{s}\,\vec{u}_t = v\,\vec{u}_t\,(avec\; v = \dot{s})$$

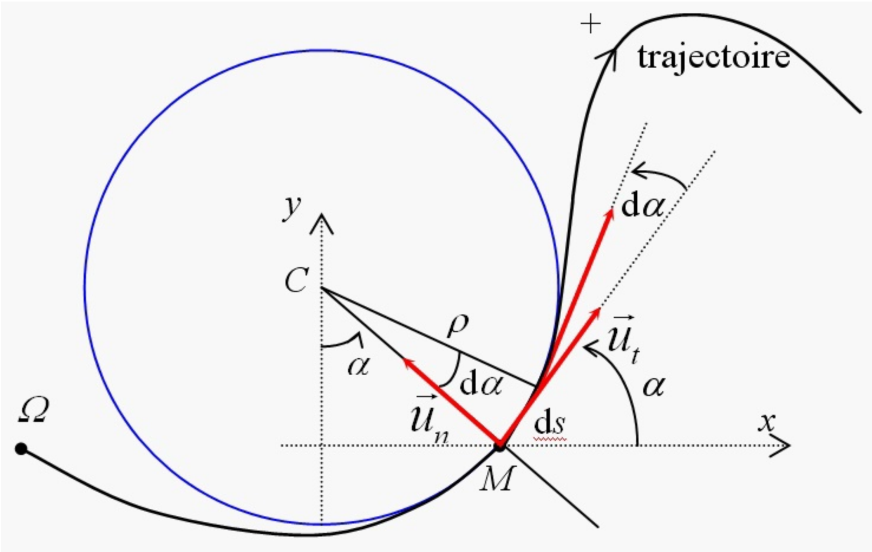
La grandeur **v** correspond à la valeur algébrique de la vitesse (positive si le point se déplace dans le sens positif choisi).

$$\|\vec{V}\| = \|\dot{S}\,\vec{u}_t\| = |\dot{S}|\,\|\vec{u}_t\| = |\dot{S}| = |v| = V$$

c) Expression du vecteur accélération dans la base de Frenet :

Le vecteur l'accélération s'obtient en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{V}}{dt} = \frac{d\,(v\,\vec{u}_t)}{dt} = \frac{d\,(\dot{S}\,\vec{u}_t)}{dt} = \frac{d\,\dot{S}}{dt}\,\vec{u}_t + \dot{S}\,\frac{d\,\vec{u}_t}{dt}$$



À un instant **t**, au point **M** de la trajectoire, le vecteur de base

$$\vec{u}_t$$

fait un angle **α** avec la direction de l'axe des **x** (voir la figure qui représente : Base de Frenet et déplacement **dS** élémentaire). À l'instant **t + dt**, ce vecteur tourne d'un angle **dα**. La dérivée, par rapport au temps, de ce vecteur unitaire est donc donnée par (voir règle de dérivation par rapport au temps d'un vecteur tournant de norme constante) :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt}=\dot{\alpha}\vec{u}_n$$

Avec **CM=ρ**, le rayon du cercle osculateur tangent à la courbe au point **M**, on a :

$$dS=CM\,d\alpha=\rho\,d\alpha\Rightarrow\frac{d\alpha}{dt}=\dot{\alpha}=\frac{1}{\rho}\frac{dS}{dt}=\frac{\dot{S}}{\rho}=\frac{v}{\rho}$$

Finalement :

$$\dot{S}\frac{d\vec{u}_t}{dt}=\dot{S}\dot{\alpha}\vec{u}_n=\dot{S}\frac{\dot{S}}{\rho}\vec{u}_n=\frac{\dot{S}^2}{\rho}\vec{u}_n=\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

L'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet est :

$$\vec{a}=\ddot{S}\vec{u}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n=\frac{dv}{dt}\vec{u}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

Remarque

On pourra vérifier que ce résultat est toujours vrai quelle que soit la concavité de la trajectoire.

-

La composante normale de l'accélération **a_n=v2/ρ** est toujours positive : elle est toujours tournée vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré. Elle indique que la direction du vecteur vitesse change et est d'autant plus important que le rayon de courbure est faible (virage serré). Si le mouvement est rectiligne (rayon de courbure infini) ce terme est nul.

- La composante tangentielle **a_t=dv /dt** de l'accélération , indique si la valeur de la vitesse change. Si le mouvement est uniforme ce terme est nul.

9. Vecteur vitesse angulaire

Définition :

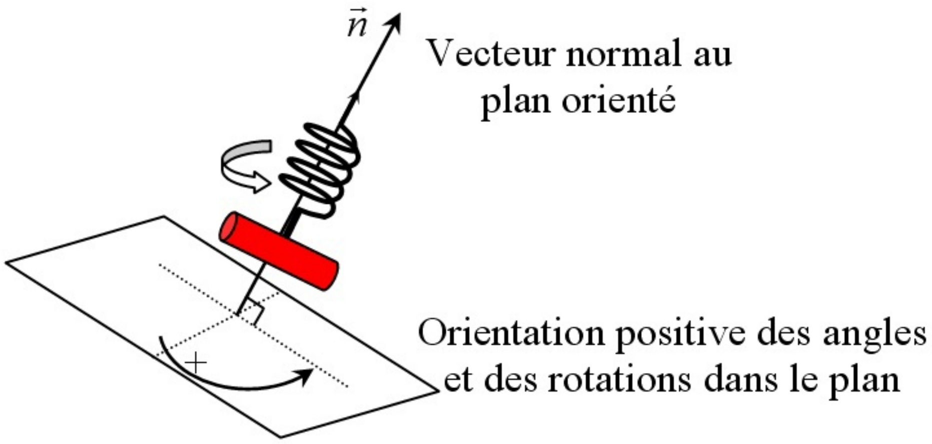
Nous avons vu que la base polaire

$$\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\right)$$

est une base mobile. Les vecteurs de cette base tourne autour de l'axe **Oz** avec une vitesse angulaire **ω**. Pour caractériser cette rotation il suffit de se donner la valeur de la vitesse angulaire et la direction autour de laquelle les vecteurs tournent. Il est donc pratique d'introduire un vecteur vitesse angulaire

$$\vec{\omega}$$

dont la direction est celle de l'axe de rotation et le module la valeur de la vitesse angulaire. Le sens de ce vecteur oriente automatiquement les rotations dans le plan par la règle habituelle du tire-bouchon [voir figure : Règle du « tire-bouchon ». Le sens positif de rotation dans le plan est celui qu'il faut donner au tire-bouchon (ou à une vis) pour qu'il se dirige suivant le vecteur unitaire normal au plan].



Le vecteur vitesse angulaire caractérisant la rotation des vecteurs de la base polaire est donc un vecteur suivant l'axe **Oz** et de module correspondant à la valeur algébrique de la vitesse angulaire

$$\omega = \dot{\theta}$$

(une valeur positive donne une rotation dans le sens positif).

$$\vec{\omega}=\omega\,\vec{u}_z=\dot{\theta}\,\vec{u}_z$$

Dérivée des vecteurs de la base polaire en fonction du vecteur vitesse angulaire

La dérivée du vecteur

$$\vec{e}_r$$

$$\frac{d\,\vec{u}_r}{dt}=\omega\,\vec{u}_\theta\,...........(I)$$

La base

$$(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$$

des coordonnées cylindriques est une base orthonormée directe. Cela signifie qu'il est toujours possible d'exprimer l'un de ces vecteurs par un produit vectoriel des deux autres en respectant l'ordre. On a par exemple :

$$\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta=\vec{u}_z\,;\,\vec{u}_\theta\wedge\vec{u}_z=\vec{u}_r\,;\,\vec{u}_z\wedge\vec{u}_r=\vec{u}_\theta$$

Dans chacun des cas précédents l'ordre **(r, θ, z, r, θ, z,....)**est respecté. Dans le cas contraire il suffit de mettre un signe moins :

$$\vec{u}_\theta\wedge\vec{u}_r=-\vec{u}_z\,;\,\vec{u}_z\wedge\vec{u}_\theta=-\vec{u}_r\,;\,\vec{u}_r\wedge\vec{u}_z=-\vec{u}_\theta$$

Dans ce cas, l'expression (I) devient

$$\frac{d\,\vec{u}_r}{dt}=\omega\,\vec{u}_\theta=\omega(\vec{u}_z\wedge\vec{u}_r)=(\omega\,\vec{u}_z\wedge\vec{u}_r)=\vec{\omega}\wedge\vec{u}_r$$

De même :

$$\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt}=-\omega\,\vec{u}_r=\omega(\vec{u}_z\wedge\vec{u}_\theta)=(\omega\,\vec{u}_z\wedge\vec{u}_\theta)=\vec{\omega}\wedge\vec{u}_\theta$$

Ce résultat se généralise pour un vecteur

$$\vec{X}\ de\ norme\ constante\ (\|\vec{X}\|=Constante)$$

en rotation caractérisée par le vecteur vitesse angulaire

$$\vec{\omega}$$

Ce vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs de base et donc on a :

$$\frac{d\,\vec{X}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{X}$$

Attention

Le vecteur vitesse

$$\vec{V}(t)$$

d'un point **M** se déplaçant dans le plan **(O, x, y)** est un vecteur dans ce plan alors que le vecteur vitesse angulaire

$$\vec{\omega}(t)$$

est un vecteur perpendiculaire à ce plan. Bien faire la distinction entre ces deux grandeurs.

10. Exemples de mouvement

10.1. Définitions

a)-Équations horaires du mouvement :

Ce sont les fonctions x(t), y(t), z(t) ou r(t), θ(t), z(t)

Exemple n°1 (en cartésienne) :

$$x(t)=v_0 t\ ;\ y(t)=\frac{a t^2}{2}\ ;\ z(t)=0$$

Exemple n°2 (en cartésienne, dans le plan xOy) :

$$x=R_0\cos\omega t\ ;\ y=R_0\sin\omega t\ ;\ z(t)=0$$

Exemple n°3 (en cylindrique) :

$$r(t)=R\ ;\ \theta(t)=\omega(t)\ ;\ z(t)=0$$

b)-Équation de la trajectoire :

C'est la relation liant **x, y et z** , et ou liant **r, θ et z** indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différentes coordonnées ou équations horaires.

- Exemple n°1 : Pour tout **t** ; **z(t)= 0** : le mouvement se fait dans le plan **(O, z, y).**
  On élimine le temps **t** :

$$x(t)=v_0 t \Rightarrow t=\frac{x}{v_0}\ et\ y(t)=\frac{1}{2}a_0 t^2=\frac{1}{2}a_0\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

L'équation de la trajectoire est

$$y=\frac{1}{2}a_0\frac{x^2}{v_0^2}$$

mouvement parabolique dans le plan z=0

- Exemple n°2 :

$$x^2=R_0^2\cos^2\omega t\ et\ y^2=R_0^2\sin^2\omega t\ soit\ x^2+y^2=R_0^2$$

La trajectoire correspond à un cercle de rayon $\mathbf{R_0}$ et de centre **O**.

- Exemple n°3 : Pour tout **t**, **z(t)**: le mouvement se fait dans le plan **(O, x, y, z)**. Pour tout **t**, **r(t)=R** (une constante) : Ceci correspond, en coordonnées polaires, à l'équation d'un cercle de centre **O** et de rayon **R** .

c)-Équation différentielle

C'est une équation reliant une fonction (par exemple)avec ses dérivées.

Exemple :

$$\ddot{X} + b\,\dot{X} + cX = 0\,;\ \ddot{X} + \omega^2 X = 0\,;\ ....$$

10.2. Mouvements rectilignes

Dans le référentiel d'étude, la trajectoire est une portion de droite. On choisit un axe **Ox** suivant cette droite et le point **M** est repéré par son abscisse. L'équation horaire correspond à **x(t)** et la trajectoire est connue. Il y a une seule composante pour les vecteurs vitesse

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x = v\,\vec{u}_x$$

et accélération

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u}_x = a\,\vec{u}_x$$

Si le choix est laissé, on prend souvent l'origine **O** confondue avec la position du point **M** à l'instant **t =0** (condition initiale).

10.2.1. Mouvement rectiligne uniforme

Définition

Un mouvement est rectiligne uniforme si le vecteur vitesse est constant, ce qui est équivalent à ;

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 = V_0\,\vec{u}_x$$

Équation différentielle :

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x = V_0\,\vec{u}_x \Rightarrow \dot{x} = V_0$$

Accélération nulle :

$$a = \ddot{x} = 0$$

Équation horaire :

$$\dot{x} = V_0 \Rightarrow x(t) = V_0\,t + x_0$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes d'intégration comme ici $\mathbf{x_0}$**.** Avec la condition initiale **x(t=0) =0** on obtient $\mathbf{x_0}$et l'équation horaire devient :

$$x(t) = V_0\,t$$

L'équation horaire **x(t)** s'obtient par intégration de la vitesse **v(t)**

10.2.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Définition

Un mouvement est dit rectiligne uniformément varié si le vecteur accélération est constant et la trajectoire est rectiligne

$$\vec{a}(t)=\vec{cste}=\vec{a}_0=a_0\vec{u}_x \text{ et trajectoire rectiligne}$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x}=a_0$$

La vitesse : primitive de l'accélération :

$$v(t)=\dot{x}=\int a_0 dt=a_0 t+v_0 \left(v_0 \text{constante d'intégration}\right)$$

L'équation horaire **x(t)** s'obtient par intégration de la vitesse **v(t)**:

$$x(t)=\int v(t)\,dt=\int (a_0 t+v_0)\,dt=\frac{1}{2}a_0 t^2+v_0+x_0$$

Les constantes $\mathbf{x_0}$ et $\mathbf{v_0}$ sont déterminées par 2 conditions ou par les conditions initiales (conditions à **t=0**). Par exemple, si à **t= 0**, le point **M** est en **O** sans vitesse, on aura les conditions **v(t= 0) =0** et **x (t=0) = 0**. En reportant dans les expressions de la vitesse et position on obtient très simplement $\mathbf{v_0}$ **=0 et** $\mathbf{x_0}$**= 0**. alors l'équation horaire devient :

$$x(t)=\frac{1}{2}a_0 t^2$$

Attention

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_0$$

vecteur constant ne suffit pas pour dire que le mouvement est rectiligne uniformément varié. En effet on a alors :

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_0=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\vec{v}(t)=\vec{a}_0 t+\vec{v}_0$$

Si le vecteur vitesse

$$\vec{v}_0(\text{à } t=0)$$

n'est pas suivant la direction du vecteur accélération le mouvement sera plan, dans le plan contenant

$$\vec{v}_0 \text{ et } \vec{a}_0$$

(voir par exemple le mouvement de chute parabolique). Il faut donc rajouter une condition : soit dire que le mouvement est rectiligne soit préciser qu'à un instant **t** quelconque vecteur accélération et vecteur vitesse sont colinéaires.

Remarque

Le mouvement est uniformément accéléré si la norme du vecteur vitesse est une fonction croissante de **t**, soit v^2 fonction croissante. La dérivée de $\mathbf{v^2}$ doit donc être positive. La condition sera :

$$\frac{d\,v^2}{dt}>0 \Rightarrow 2\,\vec{v}\,.\,\frac{d\,\vec{v}}{dt}>0 \Rightarrow \dot{x}\,.\,\ddot{x}>0$$

Remarque

En exprimant le temps en fonction de la vitesse et en reportant dans l'expression de **x(t)** il est possible d'obtenir une relation entre position et vitesse indépendamment du temps :

$$v(t)=\dot{x}=a_0 t+v_0 \Rightarrow t=\frac{v-v_0}{a_0}$$

$$x-x_0=\frac{1}{2}a_0 t^2+v_0=\frac{1}{2}\frac{(v-v_0)^2}{a_0}+\frac{v_0}{a_0}(v-v_0)$$

$$2\,a_0(x-x_0)=(v-v_0)^2+2\,v_0(v-v_0)$$

$$2\,a_0(x-x_0)=v^2-v_0^2$$

10.2.3. Mouvement rectiligne quelconque

L'accélération est une fonction quelconque du temps. En intégrant une première fois cette fonction, on obtient la vitesse à une constante près. En l'intégrant une deuxième fois on obtient l'équation horaire.

$$a=\ddot{x}=f(t) \Rightarrow v(t)=\dot{x}=\int f(t)\,dt \Rightarrow x(t)=\int v(t)\,dt$$

Les constantes d'intégration se déterminent suivant les conditions initiales (vitesse et position à **t = 0**) ou à un instant **t** quelconque.

10.2.4. Mouvement rectiligne sinusoïdal

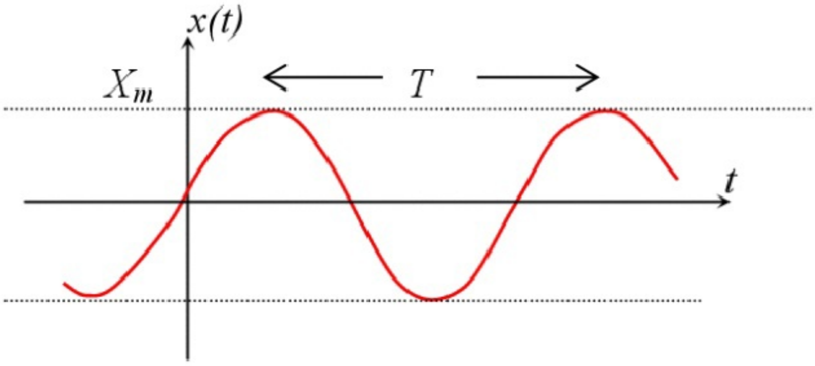
Définition

L'équation horaire d'un mouvement rectiligne sinusoïdal est une fonction sinusoïdale du temps du type :

$$x=x_m\cos(\omega\,t+\phi)$$

C'est le mouvement par exemple d'une masse accrochée à un ressort.

- La quantité s'appelle la pulsation (unité en **$rad.s^{-1}$**, homogène à l'inverse d'un temps).
- **X_m** est l'amplitude maximale du mouvement d'oscillation du point **M** autour du point **O**. La fonction cosinus variant entre -1 et +1 , oscille entre **$-X_m$** et +**X_m**.
- **$\Phi(t)$ =(ω t +Φ)** est la phase à l'instant **t**.
- **Φ** est la phase à l'origine (à **t = 0**).



La fonction cosinus est une fonction périodique de période **2π**. Si **T** est la période temporelle du mouvement, on aura donc : **X(t) = X (t + T)** soit **Φ (t + T) - Φ (t)= 2 π**.

Cela conduit à :

[ω (t + T) + φ] - [ω t + φ] = 2 π

La fréquence **f** correspond au nombre d'oscillations (d'aller et retour) par seconde. On a donc **f= 1/T**.

La vitesse est obtenue en dérivant la fonction **X(t)** :

$$v(t)=\dot{x}(t)=\frac{dx}{d\Phi}\frac{d\Phi}{dt}\Rightarrow v(t)=-X_m\omega\sin(\omega t+\phi)$$

L'accélération est obtenue en dérivant la fonction **v(t)** :

$$a(t)=\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv(t)}{dt}\Rightarrow a(t)=-X_m\omega^2\cos(\omega t+\phi)$$

On constate que l'accélération peut s'exprimer en fonction de **X(t)**. La relation est :

$$a(t)=-\omega^2 x(t)$$

L'Équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{X}+\omega^2 X=0$$

Ceci correspond à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

Remarque

La solution de cette équation différentielle peut s'écrire de différentes façons, toutes équivalentes. On a :

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi) = X_m \sin(\omega t + \phi') = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

En utilisant les relations trigonométriques usuelles, on obtient très sim

$$\phi' = \phi + \frac{\pi}{2} ;\ A = -X_m \sin(\phi) ;\ B = X_m \cos(\phi)$$

10.3. Mouvements circulaires

La trajectoire du point est un cercle caractérisé par son centre **O** et son rayon **R**. Il est logique de choisir l'origine du repère en centre du cercle et l'axe **Oz** perpendiculaire au plan contenant la trajectoire. Le système de coordonnées polaires est bien adapté pour ce type de mouvement. Les équations horaires du mouvement peuvent s'écrire : **ρ= R =constante** et **θ = θ(t)**. La forme de la fonction **θ(t)** qualifiera le type de mouvement circulaire. Suivant la forme de la fonction **θ(t)** le mouvement sera dit circulaire et :

- Uniforme si

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \ \textit{avec}\ \dot{\theta} = \omega_0 = \textit{constante}$$

- Uniformément varié (accéléré ou décéléré) si

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = \textit{constante soit} ;\ \dot{\theta} = \omega = \ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0 \ \textit{et}\ \theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta} t + \theta_0$$

- Sinusoïdale si **$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \Phi)$.**

10.3.1. Mouvement circulaire quelconque

Les caractéristiques cinématiques du mouvement circulaire peuvent se déduire du schéma présenté sur la figure (vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire quelconque) et sont données par :

$$\vec{OM}(t) = (\rho \cos\theta)\vec{u}_x + (\rho \sin\theta)\vec{u}_y$$

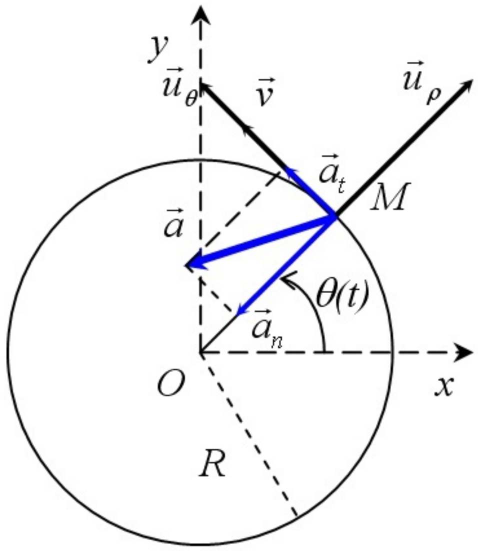
ou bien

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho = R \vec{u}_\rho$$

$$\vec{V} = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = \frac{d(R\vec{u}_\rho)}{dt}$$

On obtient finalement l'expression du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\,\omega(t)\,\vec{u}_\theta$$



Ce résultat peut se retrouver en utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées polaires en posant **ρ = R =Constante**.

La dérivée du vecteur vitesse fait apparaître deux termes. On a :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = R\,\frac{d\,(\omega\,\vec{u}_\theta)}{dt} = R\,\frac{d\,\omega}{dt}\,\vec{u}_\theta + R\,\omega\,\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -R\,\omega^2\,\vec{u}_\rho + R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

Remarque

Le vecteur unitaire orthoradiale

$$\vec{u}_\theta$$

est perpendiculaire au rayon **OM** et est donc tangent à la trajectoire. Dans ce cas, en orientant la trajectoire dans le sens trigonométrique, il correspond au vecteur

$$\vec{u}_t$$

de la base de Frenet . L'autre vecteur

$$\vec{u}_n$$

de cette base est toujours tourné vers la concavité et est opposé au vecteur

$$\vec{u}_\rho\,.\,On\,a\,donc : \vec{u}_t = \vec{u}_\theta\;et\;\vec{u}_n = -\vec{u}_\rho$$

On retrouve l'expression de la valeur algébrique **v** de la vitesse :

$$\vec{v}=v\,\vec{u}_t=R\,\omega\,\vec{u}_\theta \Rightarrow v=R\,\omega$$

L'expression du vecteur accélération s'écrit dans la base de Frenet

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n=\frac{dv}{dt}\,\vec{a}_t+\frac{v^2}{R}\,\vec{a}_n$$

La composante radiale ou accélération normale :

$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n=R\,\omega^2\,\vec{u}_n=-R\,\omega^2\,\vec{u}_\rho$$

Le terme (**Rω^2**) étant positif, on constate que cette accélération est toujours dirigée vers le centre du cercle : c'est la composante normale centripète. C'est elle « qui fait tourner » c'est-à-dire qui rend compte de la variation de la direction du vecteur vitesse. Même si le mouvement est uniforme (**v** et **ω** constantes) cette accélération existe nécessairement.

La composante orthoradiale ou tangentielle :

$$\vec{a}_t=R\,\dot{\omega}\,\vec{u}_\theta=R\,\frac{d\,\omega}{dt}\,\vec{u}_\theta=\frac{d(R\,\omega)}{dt}\,\vec{u}_\theta$$

D'où

$$\vec{a}_t=\frac{dv}{dt}\,\vec{u}_\theta=\frac{dv}{dt}\,\vec{u}_t$$

Cette accélération indique si la valeur de la vitesse varie ou pas. Dans le cas du mouvement circulaire uniforme il est nul. La figure précédente représente les vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire quelconque. Dans le cas où l'accélération tangentielle est dirigée comme le vecteur vitesse le mouvement est accéléré. Dans le cas contraire le mouvement serait freiné.

10.3.2. Mouvement circulaire uniforme

Définition :

Un mouvement est circulaire uniforme si

$$\frac{d\,\theta}{dt}=\dot{\theta}(t)=\omega_0=Constante\,(l\,'\,\acute{e}quation\;diff\acute{e}rentielle\;du\;mouvement).$$

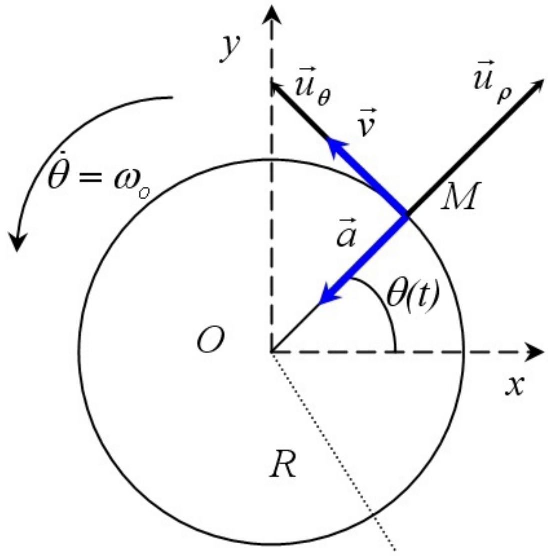
L'équation horaire **θ(t)** est obtenue par intégration. Avec, à l'instant initial **θ (t=0) =$\boldsymbol{\theta_0}$** ,on a :

θ(t)=ω t+$\boldsymbol{\theta_0}$

$$\vec{OM}(t)=\rho\,\vec{u}_\rho(t)=R\,\vec{u}_\rho$$

$$\vec{v}=\frac{d\,\vec{OM}}{dt}=\frac{d(R\,\vec{u}_\rho)}{dt}=R\,\frac{d(\vec{u}_\rho)}{dt}=R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta=R\,\omega_0\,\vec{u}_\theta$$

Dans la figure qui suit, on représente les vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme :



La vitesse angulaire étant constante la composante tangentielle du vecteur accélération est nulle. Il ne reste que la composante normale :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\,\omega_0\,\vec{u}_\theta)}{dt} = R\,\omega_0\,\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = R\,\omega_0(-\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho) = -R\,\omega_0^2\,\vec{u}_\rho$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}C = R\,\omega_0^2\,\vec{u}_n = -R\,\omega_0^2\,\vec{u}_\rho$$

Remarque

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. Uniforme ne veut donc pas dire accélération nulle.

10.3.3. Expressions générales des vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire

Les vecteurs vitesse et accélération peuvent s'exprimer en introduisant le vecteur vitesse angulaire

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z$$

En utilisant la relation que :

$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$$

on obtient une expression du vecteur vitesse indépendante de la base choisie :

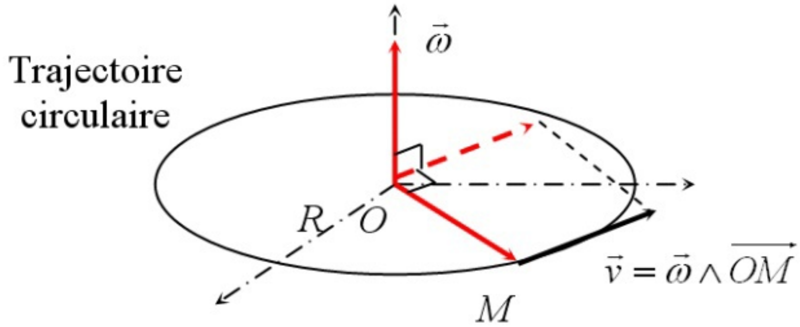
$$\vec{v} = R\,\omega\,\vec{u}_\theta = R\,\omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) = \omega\,\vec{u}_z \wedge R\,\vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

Le vecteur position

$$\vec{OM}$$

est un vecteur de norme constante (rayon **R** du cercle) qui tourne. La dérivée de ce vecteur est un vecteur qui lui est directement perpendiculaire et dont la norme a été multipliée par la vitesse angulaire. On peut exprimer cette dérivée indépendamment de la base choisie (voir formule précédente). figure : Lien entre vecteur vitesse et vecteur vitesse angulaire



Cette relation est valable pour tout mouvement circulaire. La même règle peut être utilisée pour déterminer le vecteur accélération :

Composante radiale :

$$\vec{a}_n = -R\,\omega^2 \vec{u}_\rho = R\,\omega^2 (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = R\,\omega^2 (\vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho))$$

$$\vec{a}_n = \omega\,\vec{u}_z \wedge (\omega\,\vec{u}_z \wedge R\,\vec{u}_\rho)$$

D'où :

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

Composante orthoradiale :

$$\vec{a}_t = R\,\dot{\omega}\,\vec{u}_\theta = R\,\frac{d\,\omega}{dt}(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) = \frac{d(\omega\,\vec{u}_z)}{dt} \wedge R\,\vec{u}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{a}_t = \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM}$$

Le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) + (\frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM})$$

$$\vec{a} = [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})] + \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge OM$$

Ce résultat peut être obtenu directement en dérivant le vecteur vitesse exprimé sous forme d'un produit vectoriel et en appliquant la règle habituelle de dérivation d'un produit de fonction :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{OM})}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\frac{d\,\vec{OM}}{dt}) + \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM}$$

11. Mouvement relatif et mouvement absolu

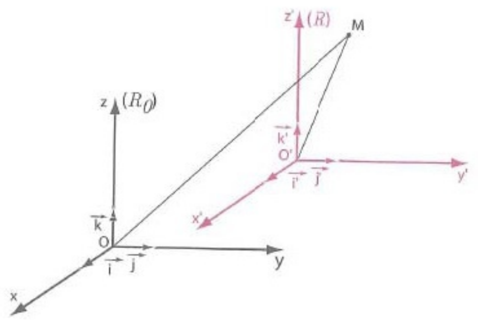
Soit un référentiel ($\mathbf{R_0}$) considéré comme fixe et (**R**) un référentiel mobile par rapport à ($\mathbf{R_0}$).

Associons respectivement aux référentiels ($\mathbf{R_0}$) et (**R**) les repères d'espaces :

$$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \; et \; (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

Si **M** est un point mobile dans (**R**) , on appellera :

- **Mouvement relatif**, le mouvement de **M** par rapport à (**R**).
- **Mouvement absolu**, le mouvement de **M** par rapport à ($\mathbf{R_0}$).
- **Mouvement d'entraînement**, le mouvement de (**R**) par rapport à ($\mathbf{R_0}$)



11.1. Composition des vitesses

On a

$$\vec{OM}=(\vec{OO'})+(\vec{O'M})=(\vec{OO'})+(x\,\vec{i}'+y\,\vec{j}'+z\,\vec{k}')$$

comme

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt}=\frac{d(\vec{OO'})}{dt}+\frac{d(\vec{O'M})}{dt}\text{, } alors$$

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt}=\frac{d(\vec{O\,O'})}{dt}+x\frac{d\,\vec{i}'}{dt}+y\frac{d\,\vec{j}'}{dt}+z\frac{d\,\vec{k}'}{dt}+\dot{x}\,\vec{i}'+\dot{i}\,\vec{j}'+\dot{z}\,\vec{k}'$$

Soit

$$\Rightarrow \vec{V}_a=\vec{V}_e+\vec{V}_r$$

$$Où : \vec{V}_a, \vec{V}_e\; et\; \vec{V}_r$$

sont respectivement les vecteurs vitesse absolue, vitesse d'entraînement et vitesse relative.

Lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, les vecteurs de base du référentiel (**R**) gardent des directions fixes de sortes que :

$$\frac{d\,\vec{i}'}{dt}=\frac{d\,\vec{j}'}{dt}=\frac{d\,\vec{k}'}{dt}=0$$

Par suite :

$$\vec{V}_a=\frac{d(\vec{OM})}{dt}=\vec{V}(M)/(R_0)$$

$$\vec{V}_r=\frac{d(\vec{O'M})}{dt}=\vec{V}(M)/(R)\; si\,(R)\,est\; en\, translation\; par\; rapport\; à\,(R_0)$$

$$\vec{V}_e=\frac{d(\vec{OO'})}{dt}=\vec{V}(R)/(R_0)$$

11.2. Composition des accélérations

Comme

$$\vec{a}(M)=\frac{d\,\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d(\vec{OM})}{dt}\right)$$

alors en dérivant par rapport au temps

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt}=\frac{d(\vec{OO'})}{dt}+x\frac{d\vec{i'}}{dt}+y\frac{d\vec{j'}}{dt}+z\frac{d\vec{k'}}{dt}+\dot{x}\,\vec{i'}+\dot{i}\,\vec{j'}+\dot{z}\,\vec{k'}$$

on obtient

$$\boxed{\vec{a}_a}=\boxed{\vec{a}_r}+\boxed{\vec{a}_e}+\boxed{\vec{a}_c}$$

Accélération absolue

Accélération relative

Accélération d'entraînement

Accélération de Coriolis

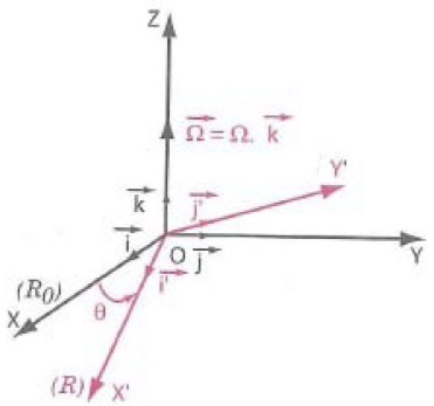
avec

$$\begin{cases}\vec{a}_a=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\\[2mm] \vec{a}_e=\dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x\dfrac{d^2\vec{i'}}{dt^2}+y\dfrac{d^2\vec{j'}}{dt^2}+z\dfrac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\\[2mm] \vec{a}_r=\ddot{x}\,\vec{i'}+\ddot{y}\,\vec{j'}+\ddot{z}\,\vec{k'}\\[2mm] \vec{a}_c=2(\dot{x}\dfrac{d\,\vec{i'}}{dt}+\dot{y}\dfrac{d\,\vec{j'}}{dt}+\dot{z}\dfrac{d\,\vec{k'}}{dt})\end{cases}$$

où $\vec{a}_c$ représente l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire.

Si (R) est en rotation par rapport à (R_0), on définit un vecteur rotation

$$\vec{\Omega}=\Omega.\vec{k}\ (\Omega=cste\ ,\ est\ la\ vitesse\ angulaire)$$



On montre que :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

avec

$$\vec{a}_a = \frac{d^2(\vec{OM})}{dt^2}, \vec{a}_r = \frac{d^2(\vec{O'M})}{dt^2} \text{ et } \vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

Exercice :

Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D). La tige (D) tourne dans un plan horitontal (xOy) autour de l'axe vertical Oz avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, où θ représente l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u_r})$ et $\vec{u_r}$ un vecteur unitaire de (D) (Fig 1).

Le mouvement du point matériel M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$r = r_0(1 + \sin \omega t)$

où r_0 est une constante positive et $\vec{r} = \vec{OM} = r\vec{u_r}$.

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer, pour l'anneau, dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

1. La vitesse et l'accélération relatives,

2. La vitesse et l'accélération d'entraînement,

3. L'accélération de Coriolis.

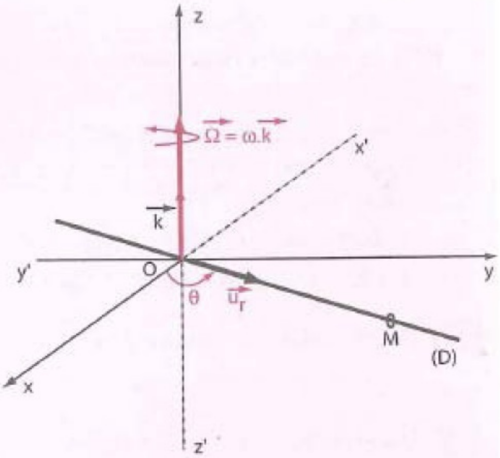


Figure 1