Série de TD n°3 (Cinématique du point matériel)

Exercice 1 :

Une voiture se déplace sur une route rectiligne assimilée à l'axe (OX) d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Son équation horaire est la suivante :

$$x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$$

Déterminer la vitesse et l'accélération de la particule. Pendant quels intervalles de temps la particule se déplace-t-elle vers les x positifs ? Vers les x négatifs ? Pendant quels intervalles de temps le mouvement est-il accéléré ? décéléré (retardé) ?

Exercice 2 :

Soit M un point repéré dans le plan (OXY) par les équations paramétriques suivantes :

$$x(t) = 2t - 3 \ ; \ y(t) = t^2 + 3t - 2$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire du point M ;
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point M ainsi que leurs modules ;
3. Quelle est la nature du mouvement ? Justifier ;
4. Déterminer les accélérations tangentielle et normale. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 3 :

Dans le référentiel $\mathcal{R}(OXY)$ muni de la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'accélération d'une particule est donnée par $\vec{a}(t) = -g\cos(\omega t)\,\vec{\jmath}$, où $g$est l'accélération de la pesanteur et ω une constante positive. Sa vitesse initiale (à $t = 0$) est notée $\vec{v}_0$ et sa position initiale est l'origine. Calculer le vecteur position $\vec{r}(t)$ de cette particule en fonction du temps.

Exercice 4 :

Dans le système de coordonnées polaires, le mouvement d'un point M est décrit par les équations horaires suivantes :

$$\rho(t) = \alpha t^2 \ ; \ \theta(t) = \omega t$$

Où α et ω sont des constantes positives.

1. Dans la base des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$, déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération ;
2. Déterminer l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires (c'est-à-dire ρ en fonction de θ) ;
3. Représenter les vecteurs position, vitesse et accélération aux instants $t_1 = 0$ et $t_2 = \pi/2\omega$.

Exercice 5 :

Dans le référentiel $\mathcal{R}(OXYZ)$ muni de la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le mouvement d'un point matériel M est décrit par les équations horaires suivantes :

$$x(t) = a\cos(\omega t) \ ; y(t) = a\sin(\omega t) \ ; z(t) = h(\omega t)$$

Où a, h et ω sont des constantes positives.

1. Montrer que la trajectoire du point M est une hélice. La dessiner ;
2. Sachant que le pas de l'hélice correspond à la hauteur atteinte quand $\theta = \omega t$ parcourt 2π, calculer le pas de cette hélice ;
3. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$;
4. Dans la base des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{k})$, déterminer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération ainsi que leurs modules ;
5. Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec le plan (OXY) ;
6. Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M sachant que $s(t = 0) = 0$;
7. Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération de M ;
8. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire de M ;
9. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ da la base de Frénet.

Exercice 6 :
Une planète est en orbite circulaire de rayon R_1 et de période T_1 autour d'une étoile fixe située à l'origine. Un satellite est en orbite circulaire de rayon R_2 et de période T_2 autour de cette planète. Les orbites sont toutes dans le plan (OXY). On suppose que la planète et le satellite sont sur l'axe des x à $t = 0$.
Écrire une expression explicite pour la position $\vec{r}(t)$ du satellite par rapport à l'étoile.

Exercice 7 :
Dans un référentiel $\mathcal{R}$, un point M décrit un cercle de centre O et de rayon R avec une vitesse $\vec{v}$ de module :

$$v = \frac{v_0}{1 + \alpha t}$$

Où v_0 et α sont deux constantes positives.

1. Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M sachant que $s(t = 0) = 0$;
2. En déduire la durée du 1er tour effectué par le point M ;
3. Exprimer l'accélération du point M dans la base de Frénet.

Exercice 8 :
Un objet, initialement au repos, est accéléré sur une trajectoire circulaire de rayon R. Son accélération angulaire est donnée par $\alpha(t) = 120t^2 - 48t + 16$. Trouver les expressions de la vitesse angulaire et de la position angulaire. Etudier la nature du mouvement. Déterminer les composantes intrinsèques (tangentielle et normale) de l'accélération.

Exercice 9 :
Deux trains A et B roulent sur deux voies parallèles respectivement à 70 km/h et 90 km/h. Déterminer le vecteur vitesse relative de B par rapport à A lorsque : a) les trains se déplacent dans le même sens b) les trains se déplacent en sens inverse c) les voies font entre elles un angle de 60°.

Exercice 10 :
En roulant sous la pluie à 100 km/h sur une route plane, un conducteur remarque que les gouttes de pluie ont, vues à travers les vitres latérales de sa voiture, des trajectoires qui font un angle de 80° avec la verticale. Ayant arrêté sa voiture, il remarque que la pluie tombe en fait verticalement. Calculer la vitesse de la pluie par rapport à la voiture immobile et par rapport à la voiture se déplaçant à 100 km/h.

Exercices supplémentaires
Exercice S1 :
Le mouvement d'une particule est donné par le vecteur position suivant :

$$\vec{r}(t) = Re^{-\alpha t}(\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + \sin(\omega t)\,\vec{\jmath})$$

Où R, α et ω sont des constantes positives. On supposera que $\alpha < \omega$.

1. Calculez le vecteur vitesse $\vec{v}$, son module, ainsi que l'angle entre $\vec{v}$ et le vecteur position. Cet angle est-il constant au cours du temps?
2. Calculez l'accélération $\vec{a}$ de la particule et exprimez-la en fonction de $\vec{r}$ et de $\vec{v}$;
3. Dans la base des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$, exprimez les vecteurs $\vec{r}, \vec{v}$ et $\vec{a}$.

Exercice S2 :

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, une particule est en mouvement circulaire uniforme : $\vec{r}(t) = R(\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + \sin(\omega t)\,\vec{\jmath})$
Où R et ω sont des constantes positives. Observons la même particule à partir d'un référentiel $\mathcal{R}'$ dont l'origine se déplace à une vitesse $\vec{V}$ par rapport à $\mathcal{R}$.
Si $\vec{V} = V\vec{k}$, à quoi ressemble la trajectoire de la particule vue de $\mathcal{R}'$? Donnez-en une expression analytique ($\vec{r}'(t)$) et tracez-la.