Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA-BÉJAIA

Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie

Département Des TCSN

Polycopie de Cours Première Année LMD

Matière :

Mathématiques : Analyse et calcul de probabilités

Rédigé par :

BELLAHSENE Hocine

Année Universitaire 2017/2018

Avant Propos

Ce cours est destiné aux utilisateurs de mathématiques en biologie, médecine, pharmacie...spécialement aux étudiants inscrits en sciences de la natures et de la vie. Il fait office d'un support de cours explicite, au travers des nombreux exemples qu'il comporte. Le but étant de faciliter la compréhension de l'étudiant en le menant à raisonner pour choisir le degré de difficulté qui lui plait. C'est la raison pour laquelle des exercices corrigés sont suggérés. Il est à signaler que ce polycopie est composé d'une partie analyse et d'une partie qui concerne le calcul des probabilités comportant les trois lois de probabilités les plus connues.

Afin d'étoffer et d'affiner ce polycopie merci de m'envoyer par courrier électronique toutes vos remarques, vos suggestions et encouragements.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions, notion de limites et de continuité

1.1 Notion de fonction

f est une fonction de la variable x si à toute valeur de x choisie dans un ensemble convenable E, f fait correspondre une valeur bien déterminée y d'un ensemble F. Soit $f \ : \ E \to F$ une fonction.

— Si $F \subset \mathbb{R}$, alors f est dite fonction réelle.

— Si $E \subset \mathbb{R}$, alors f est dite fonction d'une variable réelle.

— Si $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, alors f est dite fonction réelle d'une variable réelle (le reste du chapitre).

Exemple

$x \mapsto f(x) = 5x$; E et F : ensemble des nombres réels.

$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2+1}$; E : ensemble des nombres réels

et F ensemble des nombres ≥ 1.

1.1.1 Domaine de définition

C'est l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ pour lequel f existe (soit définie) on le note D_f.

Exemple

$x \mapsto f(x) = \ln x$; $D_f =]0, +\infty[$.

$x \mapsto f(x) = \frac{x^2+1}{\ln(x-1)}$

$D_f = \{\forall x \in \mathbb{R}/ \ln(x-1) \neq 0 \,\text{et}\, x-1 > 0\}$

$D_f = \{x \neq 2 \,\text{et}\, x > 1\}$

$D_f =]1, 2[\cup]2, +\infty[$

1.1.2 Intervalles

a et b étant deux nombres réels quelconques, on appelle intervalle $[a, b]$ l'ensemble des nombres compris entre a et b. Plus précisément :

— L'intervalle ouvert, $]a, b[$ est l'ensemble des x vérifiant $a < x < b$.

— L'intervalle fermé, $[a, b]$ est l'ensemble des x vérifiant $a \leq x \leq b$.

1.1.3 Graphe

On associe à une fonction f un graphe voir figure 1.1 . Ox et Oy étant un système d'axes de référence, on construit pour toute valeur x_0 appartenant à l'intervalle où f est définie le point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. L'ensemble des points obtenus constitue le graphe de f. Le graphe $\Gamma(f)$ d'une fonction $f : E \to F$, $E \subset \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Gamma(f) = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in E\right\}$$

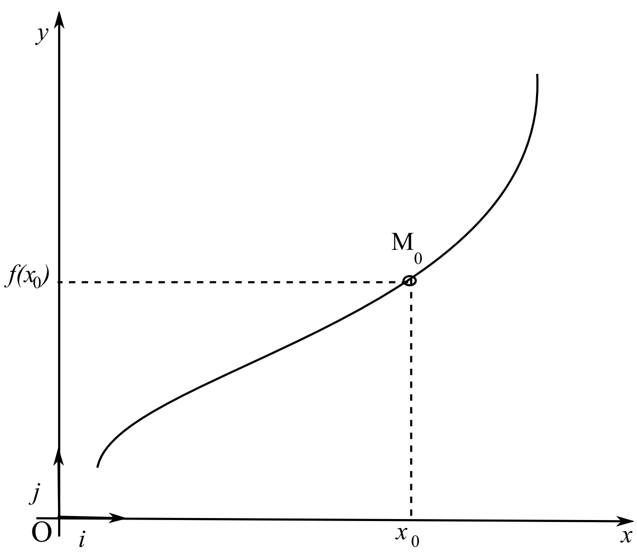

FIGURE 1.1 – Graphe d'une fonction

1.2 Composée de deux fonctions

Soient E, F et G trois ensembles : $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle fonction composée de f et par g, la fonction notée $g \circ f$ définie pour tout $x \in E$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exemples

1) $f(x) = \ln x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g(x) = \exp x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \exp(\ln x) = x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$

2) $f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ et $g(x) = \ln x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x), \nexists$ car $[-1, 1] \nsubseteq \mathbb{R}_+^*$.

1.3 Monotonie

1.3.1 Définition

1. On dit que f est **croissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

2. On dit que f est **décroissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1))$$

3. On dit que f est **strictement croissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

4. On dit que f est **strictement décroissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1))$$

5. On dit que f est **monotone** si et seulement si : f est croissante ou $f$est décroissante.

6. On dit que f est **strictement monotone** si et seulement si : f est strictement croissante ou f est strictement décroissante.

Exemples

Soit $f(x) = x^2$

I_1 étant $\mathbb{R}_+^*$ donc, si $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, alors f est strictement croissante sur I_1.

I_2 étant $\mathbb{R}_-^*$ donc, si $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, alors f est strictement décroissante sur I_2.

1.4 Fonction paire, impaire (parité) et fonction périodique :

1.4.1 Parité (voir figure 1.2)

Une condition nécessaire pour étudier la parité est la symétrie du D_f. Si x existe alors $-x$ doit exister.

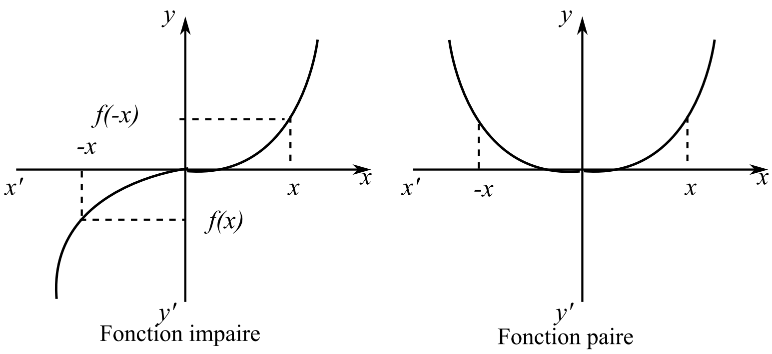

FIGURE 1.2 – Parité

On dit que f est paire si et seulement si :

$$f(x) = f(-x)$$

Exemple

— $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = x^2$

f est dite impaire si et seulement si : $f(-x) = -f(x)$.

Exemple

— $f(x) = \sin x \Rightarrow f(-x) = -\sin x$ d'où $-f(-x) = \sin x = f(x)$

1.4.2 Périodicité

On dit qu'une fonction f est périodique s'il existe un nombre positif T tel que :

$$f(x+T) = f(x)$$

T est la période.

La relation précédente permet de vérifier que $\forall k$, kT est également une période ;

$$f(x+kT) = f(x)$$

Cependant lorsqu'on parle de période on sous-entend la plus petite de toutes les périodes.

Exemple

Soit $f(x) = \sin 5x$, calculer sa période ?

$$\sin 5x = \sin 5(x+T) = \sin(5x+5T)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2k\pi = & 5x + 5T \to (1) \\ ou & \\ (\pi - 5x) + 2k\pi) = & 5x + T \to (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow T = 2k\pi/5 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}$.

1.4.3 Notion de limite

Soit f une fonction de la variable x définie sur l'intervalle $[a, b]$ (sauf éventuellement pour la valeur x_0). On dit que f à pour limite L lorsque $x \to x_0$ si en donnant à x des valeurs suffisamment rapprochées de x_0, on rend f aussi proche de L que l'on veut. Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall x \in [a, b] \quad et \quad |x - x_0| \leq \mu \quad \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

La solution n'est pas unique car tout μ', $0 < \mu' < \mu$ convient aussi. Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.

La limite à gauche et à droite d'un point

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_g$, si elle existe est la limite à gauche de x_0.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_d$, si elle existe est la limite àdroite de x_0.

La fonction f admet une limite si $Lg = L_d$.

Exemples

1) La fonction $f(x) = 2x - 1$ est définie $\forall x$, pour $x = 2$, $y = f(2) = 3$ supposons que nous choisissons $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$ que vaut μ ?

On a $||y - 3|| < \varepsilon$ soit $|2x - 4| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon/2$ par conséquent toute valeur inférieure à $\frac{\varepsilon}{2} = 5.10^{-7}$ convient à μ.

2) $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

$f(x)$ est définie $\forall x \neq 0$

Si $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$, lorsque $x \to 0$ par valeurs positives $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, lorsque $x \to 0$ par valeurs négatives $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

La limites à gauche et à droite de zéro sont distinctes f n'admet pas de limite en $x = 0$.

1.4.4 Extension de la notion de limite

Si nous désignons par A un nombre positif arbitrairement grand, nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to x_0$, si $\forall A > 0$ arbitrairement grand, il est possible de trouver un nombre $\mu > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \, , \, |x - x_0| < \mu \Rightarrow f(x) > A \text{ on écrit } \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ alors $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Si on désire que $\frac{1}{(x-1)^2} > A \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{A} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}}$ d'où μ doit prendre toutes les valeurs inférieures ou égales à $\frac{1}{\sqrt{A}}$.

Remarques

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\, \exists \mu > 0 / \forall x, 0 < |x - x_0| < \mu \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\, \exists \beta > 0 / \forall x, x > \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\, \exists \beta > 0 / \forall x, x > \beta \Rightarrow f(x) > A$

1.4.5 Formes indéterminées

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $-\infty + \infty$, $0 \times \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0 sont les cas d'indéterminations possibles qu'ils faudrait lever pour conclure sur l'existence ou non d'une limite ainsi que sa valeur. Parfois, une étude directe permet de lever l'indétermination.

Exemples

1) $f(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a}$ pour $x = a \Rightarrow f(x) = \frac{0}{0}$ forme indéterminée.

Or $\frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)} = (x^2 + ax + a^2)$ d'où $\underset{x \to a}{lim}\, f(x) = 3a^2$.

2) $f(x) = \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a}$ on à $f(a) = \frac{0}{0}$

Mais, $f(x) = \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a} = \frac{-\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}} = -\tan\frac{x+a}{2}$ et $f(a) = -\tan a$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$, quand $x \to +\infty$ alors $f(x) = \infty - \infty$ mais si on multiplie et on divise par le conjugué $\sqrt{x^2 + x} + x$ on obtient :

$f(x) = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$ donc $\underset{x \to +\infty}{lim}\, f(x) = 1/2$.

1.5 Continuité d'une fonction

1.5.1 Continuité en un point

Soit f une fonction telle que $f : I \to \mathbb{R}$, I étant quelconque de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est continue pour la valeur $x = x_0$ (ou au point x_0) si et seulement si :

$f(x)$ est définie pour $x = x_0$ ($f(x_0)$existe)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

— f est continue à droite de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

— f est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

D'où f est continue au point x_0 si elle est continue à gauche et à droite de ce point.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I, et continues au point $x_0 \in I$. Les fonctions :

1. αf avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $f + g$.
3. $f \cdot g$.
4. $\frac{f}{g}$ avec $g(x_0) \neq 0$.
5. $|f|$.

Sont continues au point x_0.

1.5.2 Continuité sur un intervalle

f est dite continue sur un intervalle I , si elle est continue en tout point de I.

1.6 Propriétés des fonction continues sur un intervalle

1.6.1 Théorème

Si f est continue sur $[a, b]$, alors $f$est bornée $\Leftrightarrow \forall x \in [a, b], \exists (M, m) / m \leq f(x) \leq M$. Figure 1.3

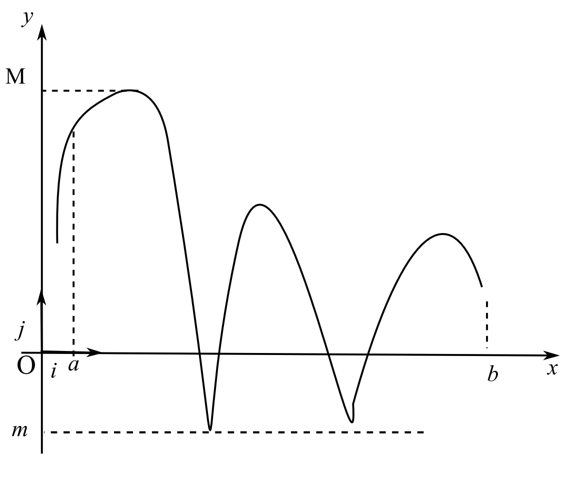

Figure 1.3 – Fonction bornée

1.6.2 Théorème de Bolzano

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, (figure1.4) :

Si $f(a)f(b) < 0$, alors $\exists$ au moins $c \in]a, b[/ f(c) = 0$.

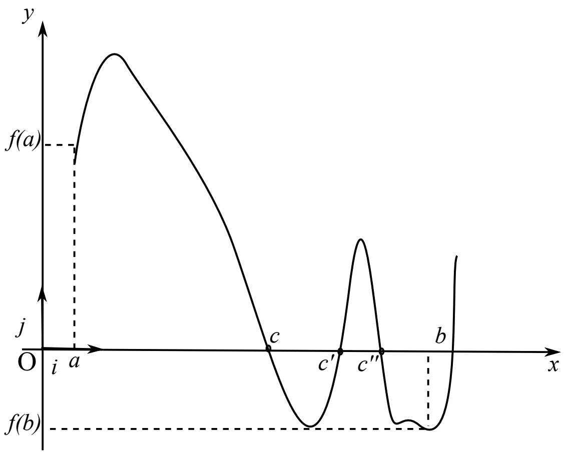

FIGURE 1.4 – Théorème de Bolzano

1.6.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie et continue sur l'intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$, alors pour tous réels $a$et b de I , pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

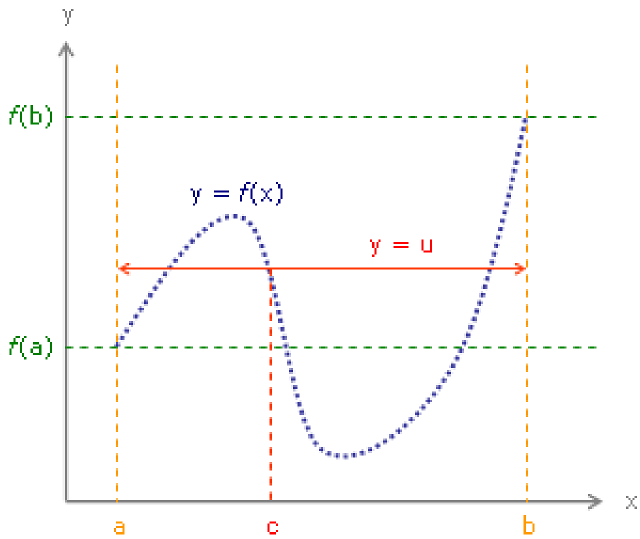

FIGURE 1.5 – Théorème des valeurs intermédiaires

1.6.4 Continuité de la composée de deux fonctions

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\ : J \longrightarrow K$ tels que $f(I) \subset J$:notée $g \circ f : I \longrightarrow K$ et qui à tout $x \longmapsto g(f(x))$

Si f est continue sur I, et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

1.7 Prolongement par continuité

Soit f définie sur un intervalle I sauf en $x_0 \in I$, si f admet une limite en x_0, et qu'on pose :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \\ l & si\ x = x_0 \end{cases}$$

Si g est continue en x_0, alors elle est appelée prolongement par continuité de f , et :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = l$$

Exemples

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ non définie pour $x_0 = 0$, or :

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ d'où si l'on pose : $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

g est la prolongée par continuité de f en $x = 0$.

2) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ non définie en $x = 0$. Or :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x/2}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ \\ 1/2 & si\ x = 0 \end{cases}$

g est la prolongée par continuité de f en $x = 0$.

Exercice

1) Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 2) = 0$.

Solution :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0 /\ \ 0 < \ \ |x-1| < \mu \ \ \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$|2x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

2) La fonction $f(x) = \frac{x}{|x|}$ admet-elle une limite en $x = 0$?

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{x}{-x} = -1.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{x}{x} = 1.$

$\Rightarrow f$ n'admet pas de limite au point $x = 0$.

Chapitre 2

Dérivée et différentielle d'une fonction d'une variable

2.1 Notion de dérivée

2.1.1 Définition : Dérivée en un point

Une fonction numérique f définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, est dérivable en x_0 si le rapport :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ tend vers une limite.}$$

Cette limite, quand elle existe, est la dérivée de f en x_0, et on la note : $\frac{df}{dx} \mid_{x=x_0}$ou $f'(x)$. Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

2.1.2 Signification géométrique de la dérivée

Soit (C) la courbe représentative des variations de $y = f(x)$ figure 2.1, A et B les points d'abscisses x_0 et $x_0 + \Delta x$ sur (C). La sécante AB a pour pente, le rapport de la différence des ordonnées de Bet A à la différence de leurs abscisses ; si a est l'ange (Ox, AB) on aura :

$$\tan a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Faisons tendre Δx vers O ; le point B se rapprochera du point A en décrivant (C), à la limite, si $y = f(x)$ admet une dérivée au point x_0 la droite AB pivotera autour de A et tendra vers une position limite AL, qui par définition est la tangente en A à (C). Cette tangente AL à donc pour pente $f'(x_0)$ avec :

$$\tan a_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

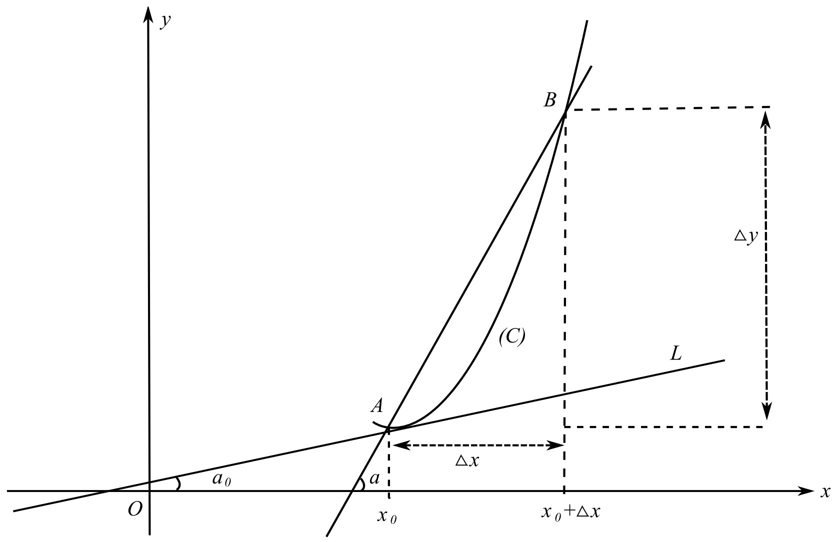

FIGURE 2.1 – Signification géométrique de la dérivée

2.1.3 Définition : Fonction dérivée

Si f est définie sur un intervalle I et dérivable en tout point x_0 de I , on définit la fonction dérivée f' qui à tout x_0 de I associe le réel $f'(x_0)$.

2.1.4 Définition : Dérivée à gauche et à droite

2.1.4.1 Dérivée à gauche :

$\lim\limits_{x \to x_{0-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0)$
Si $f'_g(x_0)$ existe alors f est dérivable à gauche de x_0.

2.1.4.2 Dérivée à droite :

$\lim\limits_{x \to x_{0+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$

Si $f'_d(x_0)$ existe alors f est dérivable à droite de x_0.
f est dérivable en un point si elle est dérivable à droite et à gauche de ce point et si ces dérivées sont égales.

Remarques

— Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, on dit que la dérivée est infinie pour x_0 c'est à dire au point x_0, $a_0 = \frac{\pi}{2}$ par rapport à Ox.

— Il se peut que $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ diffère de $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, on dit qu'il existe une dérivée à droite et une dérivée à gauche , qu'on note : $f'(x_{0^+})$ et $f'(x_{0^-})$. On a ainsi au point M_0 d'abscisse x_0 deux tangentes de pentes différentes pour la courbe (C). M_0 est dit point anguleux. Voir figure

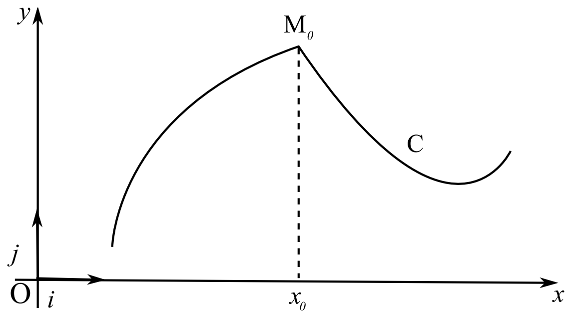

FIGURE 2.2 – Point anguleux

— Si une fonction est dérivable au point d'abscisse $x = x_0$, elle est également continue en x_0, c'est à dire que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2.1.5 Dérivée de la somme , du produit et du quotient de deux fonctions

2.1.5.1 La somme

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions admettant des dérivées respectivement u' et v' et si :

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

alors :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

2.1.5.2 Le produit

Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, alors :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

2.1.5.3 Le quotient

Dans le cas où $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ alors on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

2.1.6 Dérivée de x^m $m \in \mathbb{N}^\star$

Sachant que la dérivée de $f(x) = x$ est $f'(x) = 1$
La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$ (utiliser 2.1.5.2)
Supposons que $f(x) = x^{m-1} \Rightarrow f'(x) = (m-1)x^{m-2}$
La dérivée de $f'(x) = x^m$s'obtient en posant $x^{m-1} = u$ et $x = v$ alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot (m-1)\, x^{m-2} + x^{m-1} \\ &= (m-1)x^{m-1} + x^{m-1} \\ &= mx^{m-1} \end{aligned}$$

Ce résultat vrai pour $m = 2$ est ainsi généralisé par récurrence.

2.1.7 Dérivée de $f(x) = \tan x$

$Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Sachant que la dérivée de $u(x) = \sin x$ est $u'(x) = \cos x$ et la dérivée de $v(x) = \cos x$ est $v'(x) = -\sin x$, alors la dérivée de la fonction :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2.1.8 Dérivée de $f(x) = \cot x$

De même la dérivée de$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ est donnée par :

$$f'(x) = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Exemple

Soit à calculer la dérivée de $y = \frac{3\cos x}{1+\sin x}$
Posons $u = 3\cos x$ alors $u' = -3\sin x$
$v = 1 + \sin x$ alors $v' = \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3\sin x(1+\sin x)-3\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-3\sin x-3(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-3(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-3}{(1+\sin x)} \end{aligned}$$

2.2 Dérivée d'une fonction composée

Une fonction composée est de la forme $y = f(u)$ où u est une fonction de x c. à d. $u = \varphi(x)$.

Théorème

Si u admet une dérivée u'_x et $y$une dérivée par rapport à u : y'_u, la dérivée de $y$par rapport à x sera :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

ou bien

$f : I \to \mathbb{R}\,;\ g : J \to K$

$$\begin{aligned} g \circ f : J &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

alors :

$$(g \circ f)^{'} = \left(g^{'} \circ f\right) f^{'}$$

de même

$$(h \circ g \circ f)^{'} = \left(h^{'} \circ g \circ f\right)\left(g^{'} \circ f\right) f^{'}$$

Exemples

1. Dérivée de $f(x) = y = [u(x)]^m$, $m \in \mathbb{Z}^\star$

$$y' = mu^{m-1}u'_x$$

Ainsi la dérivée de $y = \frac{1}{u(x)}$

On a $m = -1 \Rightarrow y' = -u^{-2}(x) \cdot u'_x \Rightarrow y' = -\frac{u'_x}{u^2}$

2. $y = f(x) = \tan^3 \frac{2x}{3}$ dans ce cas $m = 3$

On pose $u = \frac{2x}{3} = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = u'_x = \frac{2}{3}$

on pose $f(u) = \tan^3 u \Rightarrow f'(u) = 3\tan^2 u \cdot (1 + \tan^2 u)$
Comme $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, alors :

$$\begin{aligned} y'_x &= 3\tan^2 \frac{2x}{3}\left(1+\tan^2 \frac{2x}{3}\right)\frac{2}{3} \\ &= 2\tan^2 \frac{2x}{3}\left(1+\tan^2 \frac{2x}{3}\right) \end{aligned}$$

3. $y = \sin(x^2+1)$ on pose $u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x$
$f(u) = \sin u \Rightarrow f'(u) = \cos u$
d'où : $f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$.
4. Soit à dériver la fonction suivante : $f(x) = (1 - x^4)^5$
$u = \varphi(x) = 1 - x^4 \Rightarrow u' = -4x^3$
$f(u) = u^5 \Rightarrow f'(u) = 5u^4$
finalement, $f'(x) = -20x^3(1 - x^4)^4$.
Les principaux résultats trouvés sont résumés dans le tableau 2.1

Fonction	Dérivée
$f(x) = C^{te}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^m$	$f'(x) = mx^{m-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u'(x) \cdot v'(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$f\,[u(x)]$	$f'_x = f'_u \cdot u'_x$
$f'(u) = [u(x)]^n$	$f'(x) = nu^{n-1}u'_x$

TABLE 2.1 – Les dérivées des fonctions usuelles

Définition (Fonction continûment dérivable)

On dit qu'une fonction f est continûment dérivable sur un intervalle I , si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I. Alors on dit aussi que f est de classe C^1 sur I. Plus généralement, on dit que f est n ($n \in \mathbb{N}^*$) fois continûment dérivable sur I, ou de classe C^n sur I, si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

2.3 Fonctions dérivées successives, formule de Leibniz

Si f et g sont deux fonctions N fois dérivables, la règle de dérivations successives du produits conduit à :

$$\begin{aligned}
[f \cdot g]^{'} &= f^{'}g + g^{'}f \\
[f \cdot g]^{''} &= f^{(2)}g + 2f^{'}g^{'} + g^{(2)}f \\
[f \cdot g]^{(3)} &= f^{(3)}g + 3f^{(2)}g^{'} + 3f^{'}g^{(2)} + fg^{(3)}
\end{aligned}$$

En général :

$$[f \cdot g]^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + C_n^p f^{(n-p)}g^{(p)} + \cdots + fg^{(n)}$$

$$[f \cdot g]^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(n-p)}g^{(p)}$$

Cette égalité, appelée formule de Leibniz, est valable pour tout entier $n \leq N$.

2.4 Différentielle d'une fonction d'une variable

2.4.1 Définition

Soit une fonction $x \mapsto f(x) = y$ définie sur $[a, b]$ et dérivable au point $x_0 \in [a, b]$, et Δx un accroissement de x à partir de x_0. On appelle différentielle de $f(x)$ au point x_0, l'application qui à Δx fait correspondre le nombre $f'(x_0) \cdot \Delta x$ et on note :

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{2.1}$$

Dans le cas où $y = f(x) = x$, $f'(x) = 1$, alors $dy = \Delta x = dx$.Pour la variable indépendante x,il y a identité entre Δx et la différentielle dx d'où : $\Delta x = dx$.
Cette remarque permet de mettre l'équation 2.1 sous la forme :

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{différentielle de } f(x)$$

La dérivée sera donnée par le rapport des différentielles de y et de x, on aura :

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Exemple

— La différentielle de $y = \frac{1}{x}$ est $dy = -\frac{1}{x^2}dx$.
— $y = \cos^2 x \Rightarrow y' = -2\sin x \cos x \Rightarrow dy = -2\sin x \cos x dx$.
— $y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x \Rightarrow dy = (1 + \tan^2 x)\, dx$.

2.5 Dérivée et extréma

Définition

f admet un extremum au point x_0, si elle admet un maximum relatif ou un minimum relatif en ce point.

Théorème 1

Si f admet un extremum en x_0 et si f est dérivable en ce point, alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 2

Si f est dérivable sur un intervalle de centre x_0 et si f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet en x_0 un extremum.

Remarques

La condition $f'(x_0) = 0$ n'est ni nécessaire ni suffisante pour l'existence d'un extremum.

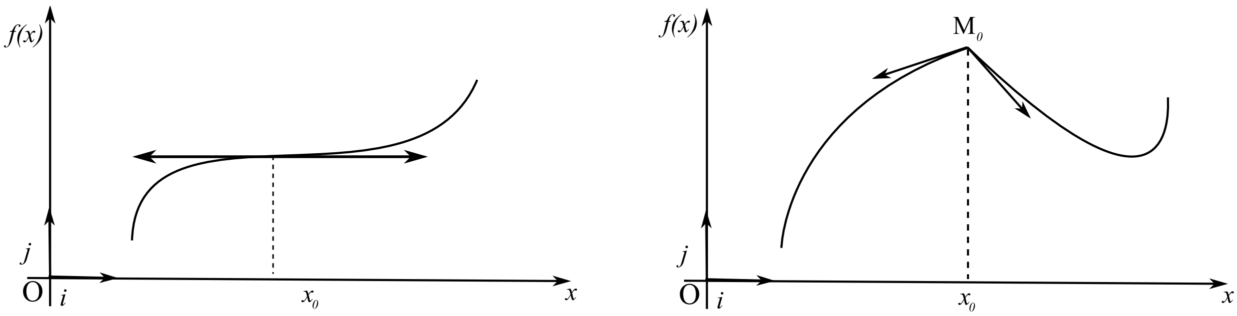

FIGURE 2.3 – Remarque sur la dérivée

Dans le premier cas de la figure 2.3 $f'(x) = 0$, mais il n y a pas d'extremum en x_0. Dans le second cas de figure ; il y a un extremum en x_0 mais f n'est pas dérivable.

Exemple

1) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 & \text{pour } x \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

D'après le théorème 2.1.4.2 en $x = 0$, f admet un extremum voir figure 2.4.

2) $f(x) = |x|$ présente un minimum au point x_0 alors qu'elle n'est pas dérivable en ce point.
3) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$. Au point $x = 0$, $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en $x = 0$.
La résolution de l'équation $f'(x) = 0$ donne tous les points dans lesquels f pourrait admettre des extremums, ces points sont appelés points stationnaires ou points critiques.

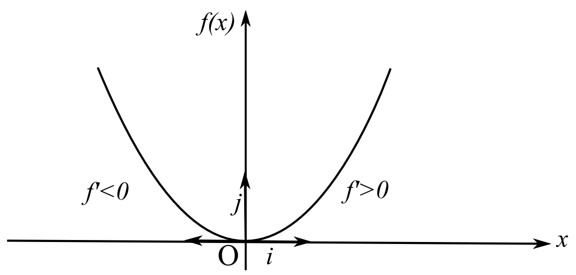

FIGURE 2.4 – Changement de signe et annulation de la dérivée

2.5.1 Étude du maximum et du minimum à l'aide de la dérivée seconde

Soit $y = f(x)$ une fonction dont la dérivée s'annule au point $x = x_0$, c'est à dire $f^{'}(x_0) = 0$ supposons que la dérivée seconde $f^{''}(x)$ existe et soit continue au voisinage de x_0.

Théorème

Soit $f^{'}(x) = 0$ alors la fonction a un maximum au point $x = x_0$ si $f^{''}(x_0) < 0$ et un minimum si $f^{''}(x_0) > 0$.

Exemple

1) La portée $R = OA$ voir figure 2.5 d'un projectile lancée (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 sous un angle φ avec l'horizontale est donnée par la formule :

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g est la pesanteur) . Pour une vitesse initiales donnée v_0 déterminer pour quelle valeur de l'angle φ la portée sera la plus grande.

Solution :

Étudions les max de la fonction $R(\varphi)$ sous l'angle $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$R^{'} = \left(\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}\right)^{'} = \frac{v_0^2 2 \cos 2\varphi}{g}$$

Calculons de φ pour lequel $R^{'} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$. car $\cos 2\varphi = 0$.

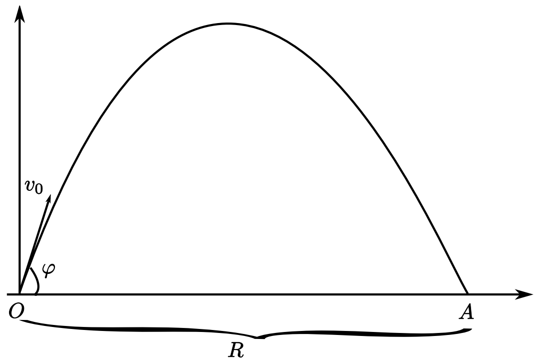

FIGURE 2.5 – Recherche du max

Calculons la dérivée seconde :

$$R^{''} = \left(\frac{v_0^2 2\cos 2\varphi}{g}\right)^{'} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

à $\varphi = {}^{\pi}/_{4}$ on a $R^{''} = -{}^{4v_0}/_{g} < 0$, $R\left({}^{\pi}/_{4}\right) = {}^{v_0}/_{g}$ il s'agit bien d'un maximum au point $\left({}^{\pi}/_{4}, {}^{v_0}/_{g}\right)$.

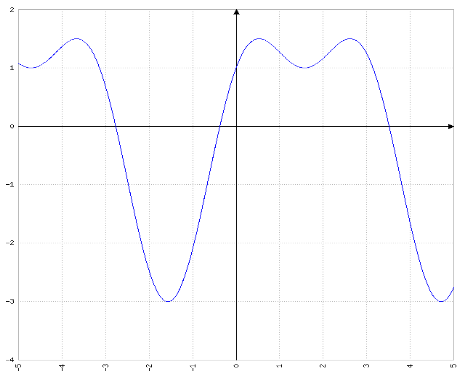

FIGURE 2.6 – Max et Min de la fonction $f(x)$

2) Déterminer les extrémums de la fonction :

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

Solution :

$f^{'}(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x\,(1 - 2\sin x)$

Les points critiques sont :

$2\cos x\,(1-2\sin x)=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{6}\,;\,x_2=\frac{\pi}{2}\,;\,x_3=\frac{5\pi}{6}\,;\,x_4=\frac{3\pi}{2}$

Calculons la dérivée seconde :

$f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

La nature de chaque point critique :

$f''(\frac{\pi}{6})=-2\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}=-3<0 \Rightarrow maximum \Rightarrow f(\frac{\pi}{6})=2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$f''(\frac{\pi}{2})=-2\cdot 1+4\cdot 1=2>0 \Rightarrow minumum \Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=2.1-1=1$

$f''(\frac{5\pi}{6})=-2\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}=-3<0 \Rightarrow maximum \Rightarrow f(\frac{5\pi}{6})=2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$f''(\frac{3\pi}{2})=(-2)\,(-1)-4.\,(-1)=6>0 \Rightarrow minimum \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2})=2\,(-1)-1=-2$

voir figure 2.6

2.6 propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

Théorème (Rolle)

Soit une fonction f (voir figure 2.7) telle que $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, Si :

1. f est continue sur $[a,b]$
2. f est dérivable sur $]a,b[$
3. avec $f(a)=f(b)$

Alors, il existe au moins $c\in\,]a,b[\,/f'(c)=0$.

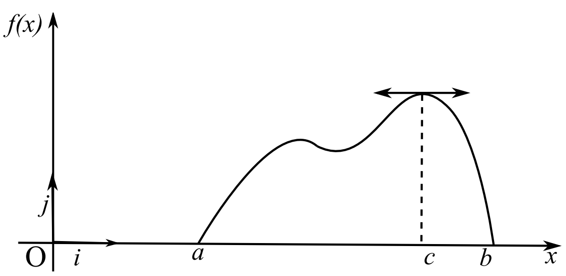

FIGURE 2.7 – Théorème de Rolle

Théorème (théorème des accroissements finis -Lagrange)

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable dans $]a,b[$, alors :
il existe au moins $c\in\,]a,b[\,/f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Remarque

Autre notation-En posant $a = x$, $b = x + h$ et $c = x + \theta h$, où $\theta \in]0, 1[$, on a :

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$$

Théorème des AF généralisé (Cauchy)

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, et dérivables sur $]a, b[$ et que g ne s'annule pas dans $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[\, / \, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{2.2}$$

Corollaire (Règle de l'Hôpital)

Si f et g sont deux fonctions dérivables aux voisinage de a et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point a , alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ admet la même limite en ce point.
La réciproque de ce corollaire est inexacte.

Remarque

Le résultat précédent s'applique seulement aux formes indéterminées $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^5+3}{2x^5+8} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{\exp x} = 0$.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Supposons que la dérivé f' d'une fonction f soit définie sur un intervalle I. Soit $[a, b] \subset I$ et $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Si γ est un nombre strictement compris entre α et β, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$.

2.7 Théorèmes de Taylor

2.7.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $[a, b]$ une dérivée d'ordre $n + 1$, il existe une valeur $c \in]a, b[$pour laquelle :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \frac{(b - a)^3}{3!} f^{(3)}(a) + \cdots + \\ &\quad \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{n + 1!} f^{(n+1)}(c) \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor à l'ordre $n+1$ où le dernier terme est appelle le reste de Lagrange.

2.7.2 Formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I , f une fonction définie et continue sur I, ainsi que ses n premières dérivées admettant une dérivée d'ordre $n+1$ en x_0. Alors pour tout $x \in I$, il existe une fonction ε d'une variable réelle telle que :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x) + (x-x_0)^{n+1}\,\varepsilon(x) \tag{2.3}$$

où : $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
La différence entre la formule de Taylor avec le reste de Lagrange a un caractère global (permettant l'étude globale d'une fonction sur un intervalle), tandis que celle de Taylor avec le reste de Young a un caractère local (le développement local intervient lors de l'étude du comportement d'une fonction au voisinage d'un point x_0.

2.7.3 Formule de Mac-Laurin

On pose dans la formule de Taylor-Young de l'équation 2.3, $x_0 = 0$, on obtient la formule de Mac-Laurin à l'ordre n avec reste de Young suivante :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{n+1}\varepsilon(x) \tag{2.4}$$

avec : $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
La formule donnée par l'équation 2.4 est pratique pour le calcul de limites.Cette même formule peut être utilisée dans le calcul de valeurs approchées en prenant :
$\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ avec $0 < \theta < 1$.

2.8 Développements limités des fonctions usuelles

Définition

Une fonction $f(x)$ définie au voisinage de $x = x_0$ admet un développement limité d'ordre n, s'il existe un polynôme de degré n.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

tel que : $f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x-x_0)^n$ où ε tend vers 0 lorsque $x \to x_0$.
$P_n(x)$ est la partie régulière du développement, $\varepsilon(x-x_0)^n$ est le terme complémentaire ou le reste.

Remarque

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de zéro , ce développement est unique.

Exemple

développent limités de $\sin x$ et $\cos x$ au voisinage de zéro.
$f(x) = \sin x \qquad \Rightarrow f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f'(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) \qquad \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$
$\vdots$
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & si\ n = 2p\ (pair) \\ (-1)^p & si\ n = 2p+1\ (impair) \end{cases}$$
finalement :
$\mathrm{V}(0) : \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$
de même on aura :
$\mathrm{V}(0) : \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$
$\mathrm{V}(0) : \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n)!} + x^n\varepsilon(x)$
$\mathrm{V}(0) : \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$

2.9 Opérations sur les développements limités

soit f et g deux fonctions admettant des DL au même ordre n au voisinage de l'origine. Alors, les fonctions $f+g$, $f \cdot g$ et f/g si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ admettent des D. L. d'ordre n au voisinage de zéro.
En outre si $f(x) = P_1(x) + x^n\varepsilon(x)$ et $g(x) = P_2(x) + x^n\varepsilon(x)$, au voisinage de zéro on a :
$V(0)\ (f+g)(x) = (P_1 + P_2)(x) + x^n\varepsilon_{1,2}(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_{1,2}(x) = 0$.
$V(0)\ (f \cdot g)(x) = (P_3)(x) + x^n\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$.
La partie régulière $P_3(x)$ du produit de f et g s'obtient en ne conservant dans le produit des parties régulières P_1 et P_2 que les termes de degré inférieur ou égal à n.
$V(0)\ (f/g)(x) = (P_4)(x) + x^n\varepsilon_4(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$.
$P_4(x)$ est le quotient dans la division suivant les puissances croissantes de $P_1(x)$ par $P_2(x)$ à l'ordre n.

Théorème

Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable admettant un DL d'ordre n au voisinage de zéro et si sa dérivée f' admet un DL d'ordre $(n-1)$ au V(0) , alors la parie régulière du DL de f' est la dérivée de la partie régulière du DL de f.

Remarque

l'existence du DL d'une fonction f ne permet pas de tirer aucune conclusion sur l'existence du DL de f'.

Exemple

V(0) : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)\,;\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$
V(0) : $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^{n-1}\mu(x)\,;\lim\limits_{x\to 0}\mu(x) = 0.$
avec :$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$
Théorème
Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable admettant un DL d'ordre n au voisinage de zéro.
$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0.$
Alors, le fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$, $x \in [-a, a]$ admettant au V(0) un DL d'ordre $(n + 1)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\mu(x) \\ &= \int_0^x P_n(t)dt + x^{n+1}\mu(x) \end{aligned}$$

avec :$\lim\limits_{x\to 0}\mu(x) = 0.$

Exemple

V(0) : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^nx^n + x^n\varepsilon(x)\,;\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$
On intègre sur $[0, x]$pour obtenir :
$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x(1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^nt^n)dt + \int_0^x t^n\varepsilon(t)dt.$

$$V(0): \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\mu(x)\,\text{avec}\,\lim_{x\to 0}\mu(x) = 0$$

Exemple

1) En utilisant le formule de Mac Laurin d'ordre n pour la fonction $\exp x$, montrer que :

$$\exp x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \text{ avec } (x \geq 0)$$

2) En utilisant la relation de Mac-Laurin d'ordre 2, montrer que l'on a :

$$\frac{8}{3} < e < 3$$

Solution

1) La fonction e est de classe C^∞, d'après la formule de Mac Laurin d'ordre n, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x\theta} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

d'où :

$$e^x - (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x\theta} \geq 0 \quad \text{si } x \geq 0$$

donc

$$\exp x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \text{ avec } (x \geq 0)$$

2) On a :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^{x\theta} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

Pour $x = 1$

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{e^\theta}{6} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{e^\theta}{6} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$0 < \theta < 1 \Rightarrow 1 < e^\theta < e \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{e^\theta}{6} < \frac{e}{6}$$

car e^x est fonction croissante

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{6} < \frac{5}{2} + \frac{e^\theta}{6} < \frac{5}{2} + \frac{e}{6} \Rightarrow \frac{8}{3} < e < 3$$

car $3 < \frac{5}{2} + \frac{e}{6}$

Exemples

Trouvez le DL à l'ordre 4 au V(0) des fonctions suivantes :

1- $f(x) = \sin x + \cos x$

V(0) : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{x^5\varepsilon(x)}_{R_4}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

et

V(0) : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underbrace{x^4\varepsilon(x)}_{R_4}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

alors au V(0) : $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4$

2- $f(x) = (\sin x)(\cos x)$

V(0) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + R_4\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4\right) = x - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + R_4 \\ &= x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^3 + R_4 = x - \frac{2}{3}x^3 + R_4 \end{aligned}$$

3- $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

V(0) : $f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + R_4}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4}$

$$\begin{array}{c|c} x - \frac{x^3}{3!} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ \hline x - \frac{x^3}{2} & x + \frac{x^3}{3} \end{array}$$

Autre méthode

Sachant qu'au V(0) : $\dfrac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + R_4$ alors :

$$\frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)}_{y}} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4 \ldots$$

4- D.L de e^x au V(1)

On pose $y = x - 1 \Rightarrow y$ est au $V(0)$ quand x est au $V(1)$

V(0) : $e^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \dfrac{y^3}{3!} + \cdots + \dfrac{y^n}{n!} + R_n$

V(1) : $e^x = 1 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2!} + \dfrac{(x-1)^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(x-1)^n}{n!} + R_n$

au V(∞) on pose $y = \dfrac{1}{x}$

5- D.L 3 de $f(x) = x^2 e^{\sin x}$ au V(0)

V(0) : $e^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \dfrac{y^3}{3!} + R_3$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3$

V(0) : $e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{3!}} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \dfrac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2!} + \dfrac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} + R_3$

$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \dfrac{1}{2}\left(x^2\right) + \dfrac{1}{6}\left(x^3\right) + R_3 = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + R_3$

D'où au V(0) : $f(x) = x^2 + x^3 + R_3$

6- D.L 4 de $f(x) = \ln \dfrac{\sin x}{x}$ au V(0)

Au V(0) : $f(x) = -\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} + R_4$

6- D.L 3 de $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x - x}{x \sin x}$ au V(0)

Au V(0) : $f(x) = \dfrac{\dfrac{-x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_5}{x^2 - \dfrac{x^4}{3!} + R_5}$ or $\dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{6} + R_3} = 1 + \dfrac{x^2}{6} + R_3$

D'où V(0) : $f(x) = -\dfrac{x}{6} - 7\dfrac{x^3}{360} + R_3$

2.10 Application à la recherche de limites

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin px}{\sin qx}$?

V(0) : $\sin px \simeq px$ et $\sin qx \simeq qx \Rightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin px}{\sin qx} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{px}{qx} = \dfrac{p}{q}$

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \dfrac{x \sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos x}$?

Posons $x = \dfrac{\pi}{2} + u \Rightarrow si\ x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u \longrightarrow 0$

$I_1 = \lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \dfrac{x \sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos x} = \lim\limits_{u \longrightarrow 0} \dfrac{\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \sin(u + \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}}{\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim\limits_{u \longrightarrow 0} \dfrac{\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \cos u - \frac{\pi}{2}}{-\sin u}$

$I_1 = \lim\limits_{u \longrightarrow 0} \dfrac{\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{2}\right) - \frac{\pi}{2}}{-u}$ on développe à l'ordre 2 le numérateur et le dénominateur

$I_1 = \lim\limits_{u \longrightarrow 0} \dfrac{u + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi u^2}{4} - \frac{\pi}{2}}{-u} = -1$

3) $I_2 = \lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$?

Sachant que le D.L à l'ordre n au V(0) de tangente est :

$\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots + R_3$

Posons $u = x - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow si\ x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u \longrightarrow 0$

$I_2 = \lim\limits_{u \longrightarrow 0} u \tan\left(u + \dfrac{\pi}{2}\right) = u\left(-\dfrac{1}{\tan u}\right)$ avec D.L $\tan x \simeq x$ au V(0) à l'ordre 1

$$I_2 = \lim_{u \longrightarrow 0} -\frac{u}{u} = -1$$

Chapitre 3

Fonctions aux intégrales générales

3.1 Intégrales définies

3.1.1 Définition

Soit une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Partageons le segment $[a,b]$ en $n$parties aux points $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$ avec $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ et posons $x_1 - x_0 = \triangle x_1, x_2 - x_1 = \triangle x_2, \cdots, x_n - x_{n-1} = \triangle x_n$. Prenons un point de chaque segment $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ que nous désignons par $t_1, t_2, \cdots, t_n$ avec :

$x_0 < t_1 < x_2, x_2 < t_2 < x_3, \cdots, x_{n-1} < t_n < x_n$.

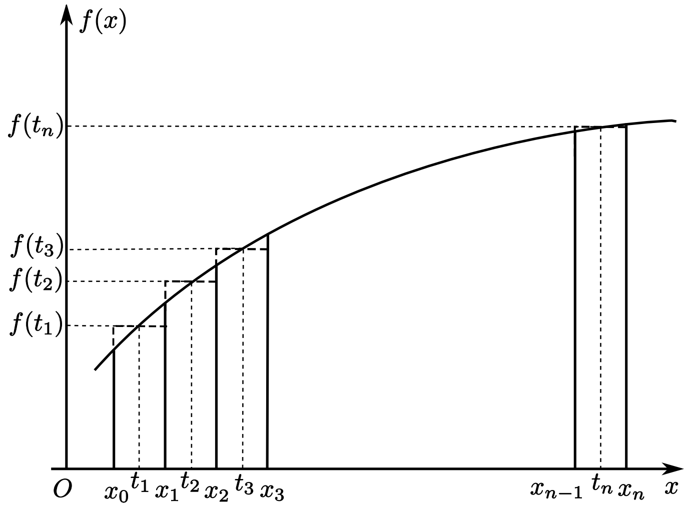

FIGURE 3.1 – Intégrales

Soient $f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_n)$ les valeurs de la fonction en ces points. La somme des rectangles obtenus est donnée par :

$$\begin{aligned} S_n &= f(t_1)\triangle x_1 + f(t_2)\triangle x_2 + \cdots + f(t_n)\triangle x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\triangle x_i \end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, $\triangle x \to 0$. La limite de la somme quant le plus grand des $\triangle x_i$ tend vers zéro s'appelle l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Par définition

$$\lim_{max\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)dx$$

f est dite intégrale si la limite de la somme existe.

Théorème

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

3.1.2 Propriétés Intégrales définies

— Relation de Chasles

Si f est continue sur I, alors $\forall\,(a, b, c) \in I^3$.

$\int_a^a f(x)dx = 0$;

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$;

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

— Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, alors $(f + g)$ est intégrable sur $[a, b]$ et :

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

— Si f est intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (λf) est intégrable sur $[a,b]$ avec :

$$\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

— Si f est intégrable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ alors :

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

— Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, et si $f(x) \geq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$$

3.1.3 Application des intégrales au calcul d'aire

Soit f une fonction positive et continue sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est la mesure de l'aire du domaine (Δ) de la figure

Cas particulier figure : si f change de signe sur $[a,b]$ on obtient :

$$\boldsymbol{A} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

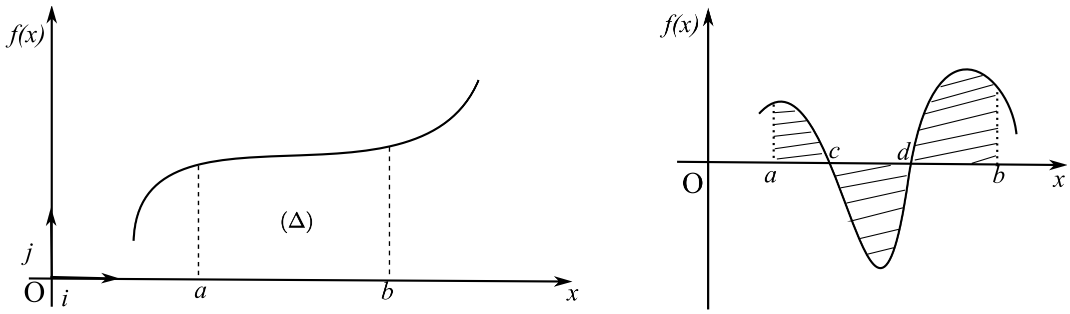

Figure 3.2 – Calcul d'aire

3.2 Intégrales indéfinies - Primitives

3.2.1 Définition

Une fonction F définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si et seulement si, F est dérivable sur I et admet pour fonction dérivée la fonction f. Ainsi, si F est une primitive quelconque de f on a :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{où } C \text{est une constante réelle}$$

3.2.2 Propriétés Intégrales indéfinies

Si F et G sont deux primitives de f sur I, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in E,\ G(x) = F(x) + k$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$, alors : $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.

Si f est continue sur $[a, b]$, pour toute primitive F de f sur $[a, b]$ on a :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

3.2.3 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	I	Primitive $F(x) + C = \int f(x)\,dx \ C \in \mathbb{R}$
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$ax + C$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln x + C$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$	$x \mapsto \ln(-x) + C$
$x \mapsto \cos(ax + b)\ (a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$
$x \mapsto \sin(ax + b)(a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$	$x \mapsto \tan x + C$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$]k\pi, (k+1)\pi[$	$x \mapsto -\cot x + C$
$x \mapsto \exp x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp x + C$
$x \mapsto a^x, (a \in \mathbb{R}^*, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\log a} + C$
$x \mapsto \frac{1}{a^2 - x^2}, x \neq \pm a$	$\mathbb{R} - \{\pm a\}$	$x \to \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
$\frac{dU}{U^2}$		$\frac{-1}{U} + C$
$\frac{dU}{U}$		$\ln\lvert U\rvert + C$

TABLE 3.1 – Tableau des primitives usuelles

Théorème de la moyenne pour les intégrales

Si M et m sont respectivement le max et le min de f sur $[a, b]$ on a :

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f\,(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

Pour cela $\exists c \in\,]a, b[\, /\, \int_a^b f\,(x)\,dx = (b-a)\,f(c) \Leftrightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx$

$f(c)$ est la valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$.

Exemple

Soit $f(x) = x^2$ sur $[1, 2]$, quelle est la valeur moyenne de f sur cet intervalle ?

$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2,33.$

3.2.4 Principales règles d'intégration

3.2.4.1 Intégration directe

— $\int (ax^2 + bx + c)\,dx = a\int x^2 dx + b\int x dx + c\int dx = \frac{3}{2}ax^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C.$

— $\int \sqrt{2px}dx, p \in \mathbb{R}\,;\, \sqrt{2px}dx = \sqrt{2p}\int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{3/2} + C.$

3.2.4.2 Méthodes de substitution

1. **Intégration par introduction sous le signe de la différentiation**

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} &= \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-1/2}\,d\,(5x-2)\\ &= \frac{1}{5}\int (u)^{-1/2}\,du = \frac{1}{5}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{2}{5}u^{1/2} = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C\end{aligned}$$

.

2. **Changement de variable**, **Théorème** :

Soit f: $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$une fonction continûement dérivable telle que $\varphi\,(\alpha) = a$ et $\varphi\,(\beta) = b$ alors, la fonction $t \mapsto f\,(\varphi\,(t))\,\varphi'\,(t)$ est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ et l'on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi^{'}(t)\,dt$$

Applications immédiates

1) Si $\int f(x)dx = F(x) + C$ alors, $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$

Démonstration

On pose $t = ax \Rightarrow \frac{dt}{a} = dx$ d'où $\int f(ax)dx = \int f(t)\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C$

2) Si $f(x)$ est impaire alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Démonstration

Sachant que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)dx}_{I} + \int_0^a f(x)dx$

On pose $t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow I = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_0^a -(f(t))(-dt)$

$I = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx$

donc $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$

De même si $f(x)$ est paire alors :$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

3) $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C\,;\, C \in \mathbb{R}.$

Exemples

1) $\int \frac{x}{1+x^2}dx\,?$

On pose $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ d'ou :

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{2}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$

$I_1 = \int_1^2 (\ln x)^3 \frac{dx}{x}\,?$

On pose $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ lorsque $x = 1 \Rightarrow t = 0$ et $x = 2 \Rightarrow t = \ln 2$

$I_1 = \int_0^{\ln 2} t^3 dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{4}\ln 2.$

2) $\int x\sqrt{x-1}dx\,?$

On pose $t = (x-1)^{1/2} \Rightarrow t^2 = (x-1) \Rightarrow x = t^2+1 \Rightarrow dx = 2tdt.$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \left(t^2+1\right) t \cdot 2tdt = \int \left(2t^4+2t^2\right) dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{5}t^3 + C \\ I_3 &= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{5}(x-1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

3.2.4.3 Intégration par partie

Théorème

Soient u et v deux fonctions continûment dérivables dans $[a,b]$ on a alors :

$$\int_a^b u(x)v(x)'dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

avec : $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Exemples

1) $I_1 = \int_0^\pi x^2 \cos x dx$?

On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 \Rightarrow & du = 2xdx \\ v = \sin x & \quad \Leftarrow & dv = \cos x dx \end{aligned}$$

$I_1 = \underbrace{\left[x^2 \sin x\right]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi 2x \sin x dx \Rightarrow I_1 = -2\int_0^\pi x \sin x dx$ on pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x \Rightarrow & du = dx \\ v = -\cos x & \quad \Leftarrow & dv = \sin x dx \end{aligned}$$

$I_1 = -2\left[-x\cos x\right]_0^\pi - 2\underbrace{\int_0^\pi \cos x dx}_{0}$=-2$[-\pi\cos\pi + 0] = -2\pi.$

2) $I = \int x \ln x dx$?

$$u(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$
$$v(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \Leftarrow \quad dv = xdx$$

$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right] - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$I = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C; \qquad C \in \mathbb{R}.$

3.2.4.4 Intégration par décomposition en éléments simple de première espèce

Il s'agit de calculer $F(x) = \int \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ avec $\alpha \geq 1 \in \mathbb{N}$.

Premier Cas $\alpha = 1$

$\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln |x - a| + C$; $C \in \mathbb{R}$.

Deuxième cas $\alpha > 1$

$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int (x-a)^{-\alpha} dx = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C = \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C.$

Exemple

$\int \frac{xdx}{x^2+x-1}$?

on a : $x^2 + x - 1 = \left[x - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] \left[x - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = (x-a)(x-b)$

d'où : $\frac{x}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

$A = \lim\limits_{x \to a} \frac{x(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x}{(x-b)} = \frac{a}{(a-b)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$B = \lim\limits_{x \to b} \frac{x(x-b)}{(x-a)(x-b)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x}{(x-a)} = \frac{b}{(b-a)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

ainsi

$\int \frac{xdx}{x^2+x-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \int \frac{dx}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \int \frac{dx}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Finalement :

$\int \frac{xdx}{x^2+x-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \ln \left|x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \ln \left|x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|.$

3.3 Intégrales impropres

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ lorsque la limite :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

existe alors on la note $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et elle est appellée *intégrale impropre* de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On dit aussi, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. Si la limite n'existe pas on dit qu'elle diverge.

3.4 Intégrale d'une fonction discontinue

Soit f continue sur $[a, c[$ (la fonction n'étant pas définie ou pas continue au point $x = c$). L'intégrale $\int_a^c f(x)dx$ définie par :

$$\lim_{b \to c} \int_a^c f(x)\, dx$$

converge si la limite exite et elle diverge si elle n'existe pas.

Exemple

1) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$?

$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = \lim\limits_{b \to 0} \int_b^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$

on pose

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(1+x) \Rightarrow & du = \frac{dx}{1+x} \\ v = -\frac{1}{x} & \quad\quad \Leftarrow & dv = \frac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

$\int_b^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]_b^1 + \int_b^1 \frac{dx}{x(1+x)} = \left[-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]_b^1 + \int_b^1 \frac{dx}{x} - \int_b^1 \frac{dx}{1+x}$

$\int_b^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = -\ln 2 + \frac{\ln 1+b}{b} + [\ln|x|]_b^1 - [\ln|1+x|]_b^1$

donc $\lim\limits_{b\to 0}\int_b^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx = -\ln 2 + \underbrace{\lim\limits_{b\to 0}\frac{\ln 1+b}{b}}_{1} + \ln 1 - \lim\limits_{b\to 0}\ln b - \ln 2 + \lim\limits_{b\to 0}\ln(1+b) = +\infty$

L'intégrale diverge.

2) $\int_{-\infty}^{0}\exp(x)dx$?

$\int_{-\infty}^{0}\exp(x)dx = \lim\limits_{A\to -\infty}\int_A^0 \exp(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}[\exp(x)]_A^0 = 1 - \lim\limits_{A\to-\infty}\exp(A) = 1$

L'intégrale est convergente.

3.5 Intégration des fonctions trigonométriques

3.5.1 Intégrales du type $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$; m et n sont des nombres entiers.

Premier cas si $m = 2k+1$ (positif impaire)

$I_{m,n} = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x dx$ or $d(\cos x) = -\sin x$

$I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x d(\cos x)$

On pose $z = \cos x \Rightarrow I_{m,n} = -\int \left(1-z^2\right)^k z^n dz$

De même si n est impair.

Exemple

$I = \int \sin^2 x\cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x)$

On pose $t = \sin x \Rightarrow I = \int t^2\left(1-t^2\right)^2 dt = \int t^2\left(t^4-2t^2+1\right)dt = \int \left(t^6 - 2t^4 + t^2\right)dt$

$I = \frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

Deuxième cas si m et n positifs paires

on pose $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ et $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

Exemple

$I = \int \cos^2 3x \sin^4 3x dx = \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)^2\left(\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\right)dx$

$I = \frac{1}{8}\int\left(\sin^2 6x - \sin^2 6x\cos 6x\right)dx = \frac{1}{8}\int\left(\left(\frac{1}{2}(1-\cos 12x)\right) - \sin^2 6x\cos 6x\right)dx$

$I = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right] + C$

car $\int \sin^2 6x\cos 6x dx = \frac{1}{6}\int \sin^2 6x d(\sin 6x) = \frac{1}{18}\sin^3 6x + C.$

Troisième cas si m et n sont paires et si l'un d'eux au moins est négatif

Il faut alors poser $t = \tan x$ (ou $t = \cot x$)

Exemple

$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2}{\cos^6 x} dx = \int \tan^2 x \left(1 + \tan^2 x\right)^2 dx$

On pose $t = \tan x \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$I = \int t^2 \left(1 + t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 \left(1 + t^2\right) dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C.$

3.5.2 Intégrales du type : $\int \sin mx \cos nx dx$; $\int \sin mx \sin nx dx$; $\int \cos mx \cos nx dx$ $(m \neq n)$

Dans ce cas on utilise les transformations suivantes :

$\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int \left[\sin\left(m+n\right)x + \sin\left(m-n\right)x\right] dx$;

$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int \left[\cos\left(m-n\right)x - \cos\left(m+n\right)x\right] dx$;

$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int \left[\cos\left(m-n\right)x + \cos\left(m+n\right)x\right] dx.$

Exemple

$\int \sin 9x \sin x dx = \frac{1}{2} \int \left[\cos 8x - \cos 10x\right] dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{10}\sin 10x\right) + C.$

3.5.3 Intégrales du type $\int R(\sin x, \cos x) dx$

On essaie l'un des changement de variable $u = \sin x$, $u = \cos x$ ou $u = \tan x$ en cas d'echec , on pose :

$t = \tan\frac{x}{2}$ d'où $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Exemple

$I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$?

on pose $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{1+t} = \ln\left|1+t\right| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

Changement de variable

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$;

$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$

Chapitre 4

Analyse Combinatoire

4.1 Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. On dit que deux objets sont indiscernables s'ils sont "équivalents par rapport au critère considéré. sinon, on dit qu'ils son discernables. Un objet est caractérisé par :

1. La place qu'il occupe dans la disposition.
2. Le nombre de fois où il peut apparaître.

4.2 Notion de répétition

On dit que la répétition est permise si un élément peut apparaître plus d'une fois. on dit alors que l'expérience est avec répétition. Sinon, elle est dite sans répétition.

4.3 Notion d'ordre

Si Quant un objet change de place, la distribution change, on dit que celle-ci est ordonnée. Si non, on dit qu'elle est non ordonnée. ($1234 \neq 4123$).

Exemple

On considère un ensemble E ayant trois éléments $E = \{a, b, c\}$. Choisir 2 éléments dans cet ensemble peut se faire de plusieurs façons différentes, suivant que l'on ordonne les éléments et que l'on autorise la possibilité de choisir le même élément plusieurs fois ou non. Le tableau 5.1 nous donne toutes les possibilités.

	Avec répétition	Sans répétition
Avec ordre	aa ab ac ba bb bc ca cb cc	ab ac ba bc ca cb
Sans ordre	aa ab ac bb bc cc	ab ac bc

TABLE 4.1 – Exemple

4.4 Factorielle n

Supposons que nous procédons n objets et que nous décidons de les ordonner tous, il y a :

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$$

manières de le faire. Par convention : $0! = 1$.

Dès que $n$dépasse la dizaine, $n!$ se compte en millions, il est bon de connaître la formule d'approximation de Stirling suivante :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

4.5 Arrangements

4.5.1 Arrangements sans répétition

On appelle arrangement sans répétition de n éléments p à p ($n \geq p$), tout ensemble ordonné de p de ces éléments, tous distincts. Un arrangement est donc caractérisé par la nature des éléments ou par leur ordre. On le note A_n^p .

Calcul de A_n^p :

1	2	3	$\cdots$	$p-2$	$p-1$	p

Dans la première case, on peut placer un objet parmi n (donc n façons pour le choisir), dans la deuxième, un objet parmi n–1 et ainsi jusqu'à la $p^{ième}$ où on peut placer un objet parmi n–$p+1$.

D'où $A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$.

Avec la notation factorielle, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple :

Combien de mots de 3 lettres ne comportant pas plus d'une fois la même lettre peut-on former avec les lettre de l'alphabet ?

$A_{26}^3 = \frac{26!}{23!} = 26 \times 25 \times 24 = 15600$

4.5.2 Arrangements avec répétition

Un arrangement de n objets p à p avec répétition est un arrangement où chaque objet peut être répété jusqu'à p fois d'où :

$$\alpha_n^p = n^p$$

Calcul de $\alpha_n^p = n^p$

1	2	3	$\cdots$	$p-2$	$p-1$	p

Dans la première case, on peut placer un objet parmi n, dans la deuxième, un objet parmi n et ainsi jusqu'à la $p^{ième}$ où on peut placer un objet parmi n.

D'où $\alpha_n^p = \underbrace{(n)(n)(n)\cdots(n)}_{p\,fois} = n^p$.

Exemple :

Combien de mots de 2 lettres peut-on obtenir avec les lettres de l'alphabet.

$\alpha_{26}^2 = 26^2 = 676$ mots.

4.6 Permutations

4.6.1 Permutations sans répétition

Une permutation de n objets est un ensemble ordonné de ces n objets. Les permutations de ces n objets constituent un cas particulier des arrangements. C'est le cas où $n = p$. Deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

$$P_n = A_n^n = n!$$

Exemple :

Le nombre de manière de placer 8 personnes autour d'une table est $P_8 = 8! = 40320$ façons.

8 façons pour placer le premier

7 façons pour placer le second

6 façons pour placer le troisième

etc.. jusqu'au dernier , donc $8 \times 7 \times \cdots \times 1$.

4.6.2 Permutations avec répétition

Dans le cas où il existe k objets identiques parmi les n objets, le nombre de permutations de n objets est alors :

$$P_n(avec\, k\, répétitions) = \frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}$$

Exemple :

Le nombre de permutations des lettres du mots "statistiques" est :

$P_{12}(3t, 3s, 2i) = \frac{12!}{3!3!2!} = 6652800$.

4.7 Combinaisons

Le nombre de manières de prendre p objets parmi n sans prendre deux fois le même objet et sans ordonner est noté C_n^p ou $\binom{p}{n}$ (combinaisons de p objets parmi n). Pour calculer ce nombre, on utilise le principe suivant :

Il y a A_n^p manières de tirer p objets en les ordonnant et une fois qu'on a les p objets il y $p!$ manières de les ordonner. Donc il y a $\frac{A_n^p}{p!}$ manières de les tirer sans les ordonner. d'où :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple :

Un groupe de 50 personnes se fait représenter par cinq d'entre elles. Combien de solutions y-t-il ?

Il s'agit de prendre 5 personnes parmi 50, les 5 personnes étant toutes différentes et ce groupe de 5 n'étant pas ordonné, il y alors, C_{50}^5 cas possibles.

$C_{50}^5 = \frac{50!}{5!(50-5)!} = 2118760$ possibilités.

4.8 Formules Remarquables :

4.8.1 $C_n^p = C_n^{n-p}$

4.8.2 $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

4.8.3 $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^p + \cdots + C_n^n = 2^n$

$2^0 = 1$

$2^1 = 1 + 1$

$2^2 = 1 + 2 + 1$

$2^3 = 1 + 3 + 3 + 1$ etc...

4.8.4 Binôme de Newton

Le binôme de Newton est le produit de n facteurs égaux à $(a+b)$ d'où : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

4.8.5 Exercice corrigé :

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.

Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

a- 4 boules jaunes.

b- 4 boules vertes.

c- 3 jaunes et une verte dans cet ordre.

d- 3 jaunes et une verte.

e- 2 jaunes et 2 vertes dans cet ordre.

f- 2 jaunes et 2 vertes.

g- Au moins 3 vertes.

h- Au plus 3 jaunes.

On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

Solution :

Le tirage est successif, alors l'ordre est important , il s'agit donc d'arrangements avec $n = 10$ et $p = 4$. Dans le cas avec remise on utilisera $\alpha_n^p = n^p$, dans le cas sans remise c'est l'équation $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ qui sera appliquée. Le tableau qui suit résume la solution dans les deux cas.

Façon de tirer successivement	Avec remise	Sans remise
a- 4 jaunes	$7^4 = 2401$	$A_7^4 = 840$
b- 4 vertes	$3^4 = 81$	0 car il n'y a que 3 vertes
c- 3 jaunes puis une verte	$7^3 \cdot 3 = 1029$	$A_7^3 \cdot A_3^1 = 630$
d-3 jaunes et une verte	$P_4(3) \cdot 7^3 \cdot 3 = 4 \cdot 343 \cdot 3 = 4116$	$P_4(3) \cdot A_7^3 \cdot A_3^1 = 2520$
e- 2 jaunes et 2 vertes dans cet ordre	$7^2 \cdot 3^2 = 441$	$A_7^2 \cdot A_3^2 = 126$
f- 2 jaunes et 2 vertes	$P_4(2,2) \cdot 7^2 \cdot 3^2 = 6 \cdot 441 = 2646$	$P_4(2,2) \cdot A_7^2 \cdot A_3^2 = 6 \cdot 126 = 756$
g- Au moins 3 vertes	$P_4(3) \cdot 3^3 \cdot 7 + 3^4 = 837$	$P_4(3) \cdot A_7^1 \cdot A_3^3 + 0 = 28$
h- Au plus 3 jaunes évènement équivalent à tous les tirages - plus de 3 jaunes	$10^4 - 7^4 = 7599$ ou bien $3^4 + 4.7.3^3 + 6.7^2.3^2 + 4.7^3.3$	$A_{10}^4 - A_7^4 = 4830$

Table 4.2 – **Solution de l'exercice**

Chapitre 5

Théorie élémentaire du calcul de probabilités

5.1 Introduction

La théorie des probabilités à pour but l'étude des phénomènes ou les expériences aléatoires (non déterministes). Une expérience est dite aléatoire lorsqu'il n'est pas possible de prévoire quel sera le résultat de cette expérience c'est une épreuve aléatoire. Par exemple le nombre de voitures rentrant dans une station de service, le déplacement d'une particule dans un liquide, etc...

5.2 Vocabulaire et axiomes

5.2.1 Définition

Considérons un ensemble fini Ω, nous l'appellerons *Univers* ou *espace* des épreuves et ses éléments seront appelés *éventualités* ou *événements élémentaires* ω. Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, chaque partie de Ω, donc éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, s'appelle un *événement*.

Exemple :

Soit l'univers $\Omega = \{\times, +, /\}$. Les éventualités sont $\times, +$et$/$. les évènements, les ω possibles sont :

$\Phi, \{\times\}, \{+\}, \{/\}, \{\times, +\}, \{\times, /\}, \{+, /\}, \{\times, +, /\}$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \{\times\}, \{+\}, \{/\}, \{\times, +\}, \{\times, /\}, \{+, /\}, \{\times, +, /\}\}$ sont l'ensemble des parties de Ω.

5.2.2 Correspondance entre les terminologies ensembliste et probabiliste

Terme ensembliste	Terme probabiliste
Ω : Référentiel	Ω : Univers, espace des épreuves ou des observables
ϕ : Ensemble vide	ϕ : Évènement impossible
Ω : Parie pleine	Ω : Évènement certain
$\cap$: Intersection	$\cap$ ET
$A \cap B$: Intersection de A et B	$A \cap B$: L'évènement A et B se réalise
$A \cap B = \phi$: A et B sont disjoints $B \subseteq \bar{A}$	$A \cap B = \phi$:A et B sont incompatibles
$A \cup B$: Réunion de A et B	$A \cup B$: Évènement A ou B se réalise
$\bar{A}$: Complémentaire de A	$\bar{A}$: Évènement contraire de A

Table 5.1 – Terminologie

Remarque

$\bar{A}$ ou (A^c) complémentaire de A dans Ω. Alors $\bar{A}$ est réduit aux évènements élémentaires qui ne sont pas dans A. Donc $\bar{A}$ est réalisé si et seulement si A ne l'est pas. On remarque que A et $\bar{A}$ sont toujours disjoints.

Exemple :

Dans le cas d'un jet de dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si $A = \{1, 2\}$ alors $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$.

5.2.3 Propriétés

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

$\overline{A \cup B} = \bar{B} \cap \bar{A}$; $A \cap B = \bar{A} \cup \bar{B}$;

5.3 Définition classique des probabilités

Sur un univers finis Ω, supposons qu'un évènement A consiste en n expériences de probabilités égales (équiprobables) et que parmi ces n cas possibles il y ait h cas favorables à la réalisation de A.On définit la probabilité de la réalisation de l'évènement A par :

$$P(A) = \frac{h}{n} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Nous considérons l'évènement certain : c'est Ω lui même et l'évènement impossible c'est ϕ. Par conséquent la probabilité doit vérifier :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\phi) = 0.$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$

d'où la probabilité de non réalisation de l'évènement A, autrement dit celle de la réalisation de $\bar{A}$ est alors :

$P(\bar{A}) = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - P(A)$

Ainsi $P(A) + P(\bar{A}) = 1.$

On a aussi, $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.

Exemple :

Soit A l'évènement : "les nombres 3 ou 4 apparaissent lors d'une seule partie de dé". Le dé peut tomber sur l'une ou l'autre des six faces :1, 2, 3, 4, 5, 6. Si le dé est bien équilibré, on peut supposer que chaque évènement ω des six possibilités est égal à 1/6 (évènements équiprobables).

Comme A peut se produire de deux manières possibles on a : $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, et $P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

La loi de probabilité pour laquelle tous les évènements élémentaires ont des probabilités égales s'appelle loi **équirépartie.** On dit aussi il y a **équiprobabilité.** Si pour l'univers d'une expérience aléatoire ayant n issues, on a choisi la loi équirépartie alors :

La probabilité de chaque élement est $1/n$.

La probabilité d'un évenement A est telle que $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$. ou $card(A)$désigne le nombre d'issues(nombre de cas favorables) de A.

5.4 Définition des probabilités à partir des fréquences relatives

La définition statistique de la probabilité est assimilée à une fréquence ; on ne définit alors la probabilité qu'à partir d'expériences indéfiniment renouvelables. La probabilité d'un évènement est la fréquence d'apparition de cet évènement. C'est un nombre compris entre 0 et 1 ; 0 signifiant que l'évènement n'apparaît jamais et 1 qu'il apparaît chaque fois qu'on renouvelle l'expérience.

5.5 Probabilités conditionnelle, évènements dépendants et indépendants

Si A et B sont deux évènements, on désigne par $P(B/A)$ la probabilité que B se produise sachant que A s'est produit. Si la réalisation ou la non réalisation de A n'affecte pas la probabilité de réalisation de B, alors $P(B/A) = P(B)$, on dit que A et B sont deux évènements indépendants, dans le cas contraire on dit qu'ils sont dépendants.

Si A et B désigne l'évènement composé "A et B se produisent tous les deux" alors :
$P(A \text{ et } B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$, d'où la première formule de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si B ne se réalise jamais ($P(B) = 0$) cette définition n'a aucun sens.

5.5.1 Propositions

Si $A \cap B = \phi$ alors $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C)$

$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$

Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ $P(\underset{i}{\cup} A_i) \leq \sum\limits_i P(A_i)$

5.5.2 Notion d'indépendance

Si deux évènements A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

5.5.2.1 Propriétés

1. ϕ est indépendant de tout évènement.
2. Un évènement de probabilité nulle est indépendant de tout autre évènement $P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A/B) = 0$.
3. Tout évènement est indépendant de Ω (univers).
4. Tout évènement est indépendant de tout évènement certain : $P(A) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$ et donc$P(B/A) = P(B)$.
5. A indépendant de $B \Rightarrow B$ indépendant de A.
6. A indépendant de $B \Rightarrow \bar{A}$ indépendant de B.
7. A indépendant de $B \Rightarrow A$ indépendant de $\bar{B}$.
8. A indépendant de $B \Rightarrow \bar{A}$ indépendant de $\bar{B}$.
9. A indépendant de B et B indépendant de $C \not\Rightarrow A$ indépendant de C.

Exemple 1 :

Soit A et B les évènements " face au cinquième jet" et "face au sixième jet" d'une pièce bien équilibrée. Alors, la probabilité qu'il y ait face à la fois au cinquième et au sixième jet est :

$P(A \text{ et } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Exemple 2 :

Supposons une boite renfermant 3 boules blanches et 2 boules noires. Quelles est la probabilité que la première boule extraîte soit noire et la deuxième boule extraîte soit noire en supposant les tirage exhaustifs.

Soit A "l'évènement la première boule est noire"

B "l'évènement la deuxième boule est noire"

Alors $P(A) = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$ c'est la probabilité que la $1^{ère}$ boule soit noire.

$P(B/A) = \frac{2-1}{3+2-1} = \frac{1}{4}$ c'est la probabilité que la seconde boule soit noire sachant qu'une boule noire ait été tirée au premier tirage.

d'où : $P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ est la probabililé que les deux boules soient noires.

5.6 Evènements incompatibles

Si $A \cup B$ est l'évènement correspondant à la réalisation de A ou B on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

si A et B sont deux évènements incompatibles ($A \cap B = \phi$) alors $P(A \cap B) = 0$ et dans se cas : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Soient A et B deux évenements quelconque, les évenements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ n'ont aucune éventualité commune, ils sont incompatibles Voir figure 5.1 et comme $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$ on a :

$$P(A) = P\left(A \cap B\right) + P\left(A \cap \bar{B}\right)$$

Exemple :

Dans le jeu de dé à 6 faces, on considère l'évènement A : "le résultat est pair" et l'évènement B : "le résultat est multiple de 3". on a :

$A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{3, 6\}$

donc $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

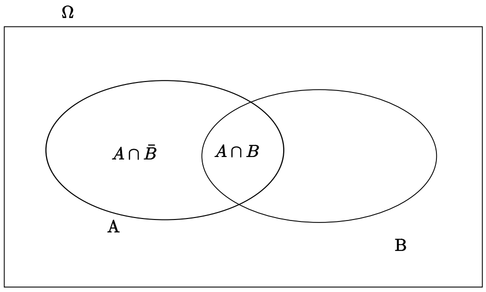

FIGURE 5.1 – Evenements incompatibles

et $A \cap B = \{6\}$

on obtient $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

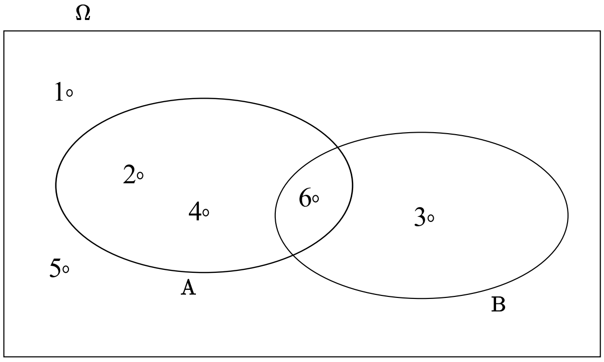

FIGURE 5.2 – Représentation de l'exemple

5.7 Probabilités composées

5.7.1 Formule des probabilités totales

Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des évènements deux à deux disjoints et dont la réunion donne l'espace A D'où $A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \cdots \cup (A \cap E_n)$ alors :

$$P(A) = P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + \cdots + P(E_n)P(A/E_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(E_i)P(A/E_i)$$

5.7.2 Formule de Bayes

La probabilité conditionnelle de l'évènement E_k sachant que l'évènement A ($P(A) > 0$) est réalisé est donnée par la formule de Bayes suivante :

$$P(E_k/A) = \frac{P(E_k)P(A/E_k)}{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)} \ \forall k = 1, 2, \cdots, n$$

Cette formule permet de calculer les probabilités des causes possibles sachant qu'une conséquence s'est réalisée.

5.8 Exercices corrigés

Exercice 1 :

Une urne contient 4 boules rouges,3 vertes et 2 noires indisernables au toucher. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1- Exactement deux boules rouges.

2- Au moins deux boules rouges.

3- Exactement deux boules de même couleur.

4- Une boule de chaque couleur.

Solution :

Le nombre de tirage possible est $C_9^3 = 84$

1-Soit A l'évènement tirer exactement deux boules rouges.

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_3^1 C_2^0 + C_4^2 C_3^0 C_2^1}{C_9^3} = \frac{18 + 12}{84} = \frac{30}{84} \simeq 0.36$$

2-Soit B l'évènement tirer au moinst deux boules rouges.

$$P(B) = \frac{C_4^2 C_3^1 C_2^0 + C_4^2 C_3^0 C_2^1 + C_4^3 C_3^0 C_2^0}{C_9^3} = \frac{18 + 12 + 4}{84} = \frac{34}{84} \simeq 0.4$$

3-Soit C l'évènement tirer exactement deux boules de même couleur.

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{C_4^2C_3^1C_2^0 + C_4^2C_3^0C_2^1 + C_4^1C_3^2C_2^0 + C_4^0C_3^2C_2^1 + C_4^1C_3^0C_2^2 + C_4^0C_3^1C_2^2}{C_9^3} \\ &= \frac{18+12+12+6+4+3}{84} = \frac{55}{84} \simeq 0.65 \end{aligned}$$

4-Soit D l'évènement tirer une boule de chaque couleur.

$$P(D) = \frac{C_4^1C_3^1C_2^1}{C_9^3} = \frac{24}{84} \simeq 0.29$$

Exercice 2 :

Quatres urnes contiennent : la première une boule blanche et une boule noire ; la deuxième deux boules blanches et trois boules noires ; la troisième : trois boules blanches et cinq boules noires et la quatrième : quatre boules blanches et sept boules noires. L'évènement E_i consiste à choisir une urne parmi les quatres $(i = 1, 2, 3, 4)$. Sachant que le choix de la $i^{ième}$ urne a une probabilité égale à $\frac{i}{10}$, et que l'on tire une boule à partir d'une urne au hasard. Trouvez la probabilité du tirage d'une boule blanche.

Solution :

Soit A l'évènement tirer une boule blanche.

On a :

$P(E_1) = 1/10$ (probabilité de choisir l'urne 1).

$P(E_2) = 2/10$ (probabilité de choisir l'urne 2).

$P(E_3) = 3/10$ (probabilité de choisir l'urne 3).

$P(E_4) = 4/10$ (probabilité de choisir l'urne 4).

On a : $P(A) = P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3) + P(E_4)P(A/E_4)$

avec :

$P(A/E_1) = 1/2$ probabilité de tirer une BB sachant que l'on a choisit l'urne 1.

$P(A/E_2) = 2/5$ probabilité de tirer une boule blanche sachant que l'on a choisit l'urne 2.

$P(A/E_3) = 3/8$ probabilité de tirer une boule blanche sachant que l'on a choisit l'urne 3.

$P(A/E_4) = 4/11$ probabilité de tirer une boule blanche sachant que l'on a choisit l'urne 4.

Finalement :$P(A) = \frac{1707}{4400} = 0.38$.

Exercice 3 :

Trois urnes identiques, la première contient : 20 boules blanches , la deuxième : 10 boules blanches et 10 boules noires et la troisième : 20 boules noires. On choisit une urne au hasard et l'on tire une boule blanche. Calculez la probabilité que la boule blanche ait été tirée de la première urne.

Solution :

Formule de Bayes :

$$P(E_k/A) = \frac{P(E_k)P(A/E_k)}{P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(E_i)P(A/E_i)} \; \forall k = 1, 2, \cdots, n$$

Avec dans notre cas $P(E_k/A) = P(E_1/A)$ probabilité que l'on ait choisit la première urne sachant que l'on ait tiré une BB. A évènement "tirer une boule blanche"

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(E_i)P(A/E_i)}$$

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = 1/3$ (urne identiques donc leur probabilités aussi).

$P(A/E_1) = 1$ probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on ait choisit l'urne 1.

$P(A/E_2) = 1/2$ probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on ait choisit l'urne

2.

$P(A/E_3) = 0$ probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on ait choisit l'urne 3.

D'où :

$$P(E_1/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{2}{3}$$

Chapitre 6

Notions sur les variables aléatoires et principales lois des probabilités

6.1 Définition d'une Variable aléatoire

Toute mesure d'une grandeur dont les valeurs dépendent du hasard est dite variable aléatoires (v.a. abrégé) c'est donc une application de l'univers E vers $\mathbb{R}$.

6.2 Distribution de probabilité discrète (*v.a.* discrète)

Si X est une variable pouvant prendre l'ensemble des valeurs discrètes $x_1, x_2, \cdots, x_k$ avec comme probabilité respectives $p_1, p_2, \cdots, p_k$, telles que $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. On dit que $X = x_1, x_2, \cdots, x_k$ à une distribution de probabilité discrète si l'ensemble de ses valeurs possibles est fini avec $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$,$\cdots$,$P(X = x_k) = p_k$. On dit aussi que X est une v. a. discrète ou v.a. stochastique ou numérique.

Exemple 1

On lance une paire de dés identiques bien équilibrés. Soit x la somme de points obtenus. La distribution de probabilités est donnée par le tableau 6.1 suivant :

La somme 5 peut être obtenue suivant (1 et 4) ou (4 et 1) ou (3 et 2) ou (2 et 3)

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

TABLE 6.1 – Loi de la v.a. discrète pour deux dés

D'où la probabilité d'obtenir la somme égale à 5 est donnée par :

$P(X = 5) = P(1 \cap 4) + P(4 \cap 1) + P(3 \cap 2) + P(2 \cap 3)$

$P(X = 5) = P(1)P(4) + P(4)P(1) + P(3)P(2) + P(2)P(3) = 4\frac{1}{6}\frac{1}{6} = 4/36.$

La représentation en diagramme en bâtonnets est donnée par la figure 6.1.

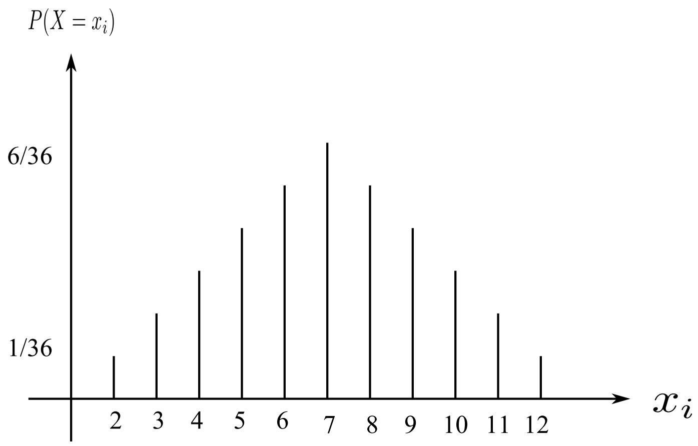

FIGURE 6.1 – Représentation en bâtonnets

Exemple 2

On lance un dé à six faces. Si on obtient 6, on gagne 900DA, si on obtient 1 on perd 500DA, si on obtient un autre résultat on perd 100DA. Donner la loi de probabilité de la v.a. X. Le tableau 6.2 donne la distribution discrète X.

x_i	900	-500	-100
$P(X = x_i)$	1/6	1/6	4/6

TABLE 6.2 – Loi de X

6.3 Variables aléatoires continues

Si la v.a. X est continue, par exemple la distance d'un projectile à l'objectif dans un tire répété, alors l'histogramme relatif des fréquences d'un échantillons dans le cas limite d'une population, devient, une courbe continue (figure) dont l'équation $y = f(x)$. L'aire totale limitée par la courbe et l'axe des x est égale à 1 et $P(a \leq X \leq b)$ représente l'aire limitée par la courbe et la droite $x = a$ et $X = b$ donne la probabilité que X soit entre a et b et $f(x)$ est appelée la densité de probabilité, X est la v.a continue qui lui est associée. On définit la probabilité que X prenne une valeur appartenant à l'intervalle $[a, b[$ par :

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Avec $F(x)$ est la fonction de répartition (ou fonction cumulative, c'est la primitive de $f(x)$) d'une v.a. X définie par :

$$F(x) = P(X < x)$$

on a aussi :

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{F(x + \triangle x) - F(x)}{\triangle x} = F'(x)$$

Exemple (v.a discrète)

Une plante peut avoir de 0 à 4 fleurs, avec les probabilités représentées selon le tableau 6.3 suivant :

Nombre de fleurs x_i	0	1	2	3	4
Probabilité $P(X = x_i)$	1/4	1/8	1/8	3/8	1/8

Table 6.3 – La loi de probabilité

sa fonction de répartition est donnée par le tableau 6.4.

Nombre de fleurs x_i	0	1	2	3	4	5
$F(x_i)$(moins de)	0	1/4	3/8	4/8	5/8	1

Table 6.4 – Fonction de répartition

Pour la variable aléatoire X continue de densité de probabilité $f(x)$ on a :

$f(x) \geq 0$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

La fonction de répartition d'une v.a. continue X :

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ avec $F(x)$ croissante avec $F(-\infty) = 0$ et $F(x) = 1$.

Exemple (cas continu)

Soit X une v.a. dont la ddp est donnée par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si\, x < 1 \\ a(x-x^2) & si\, 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & si\, x > 3 \end{cases}$$

1/ Calculer le coefficient a ?

2/ Construire la courbe représentative de $f(x)$?

3/ Calculer $P(1 < X < 2)$.

1/ X prend ses valeurs dans $[1, 3]$ d'où :

$\int_1^3 a(x - x^2)dx = 1 \Rightarrow a = -3/14$.

2/ Parabole dans $[1, 3]$ voir figure 6.2

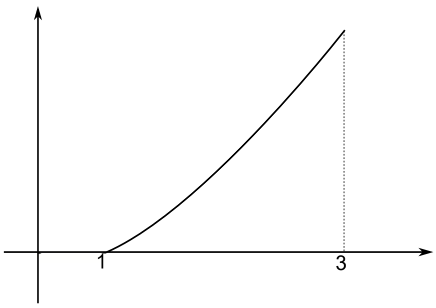

Figure 6.2 – Graphe de la fonction

3/ $P(1 < X < 2) = \int_1^2 (-\frac{2}{9}x + \frac{2}{9}x^2)dx = \left[-\frac{2}{18}x^2\right]_1^2 + \left[\frac{2}{18}x^3\right]_1^2 = 2/21$.

6.4 Variable aléatoire à deux dimensions

On peut considérer à la fois le nombre X de fleurs et le nombre Y de feuilles de la plante de l'exemple précédent. Le couple (X, Y) est une v. a. à deux dimensions. On appelle v.a. à deux dimensions une application de l'univers Ω vers $\mathbb{R}^2$. Lorsque la v.a. est discrète (X et Y), on appelle loi de probabilité du couple (X, Y) la fonction définie par :

$$p_{x,y} = P(X = x\, et\, Y = y)$$

La fonction de répartition qui lui est associée est donnée par :

$$F(x, y) = P(X < x\, et\, Y < y)$$

et si F est dérivable par rapport à x et y, on peut définir sa fonction de densité de probabilité $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

6.5 Espérance mathématique :

6.5.1 Définition :

L'espérance mathématique est une moyenne des valeurs possibles de x pondérées par les probabilités de ces valeurs.

Suite de l'exemple 1.3.1. L'espérance mathématique du nombre de fleurs est :

$$E(X) = 014 + 118 + 218 + 338 + 18 = 24$$

En moyenne, les plantes de ce type ont deux fleurs. Pour l'exemple 1.2.2, la moyenne des gains est donnée par : $E(X) = (900 = 6) + (-500 = 6) + (-400 = 6) = 0DA$ De façon générale, si X est une v.a. discrète prenant n valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$ on définit son espérance mathématique par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Si la v.a. est continue, on a si $f(x)$ est la densité de probabilité :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0 \\ \frac{1}{2}\sin x & si\, 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & si\, x > \pi \end{cases}$$

Montrer que f est fonction de densité de probabilité et calculer$E(X)$.

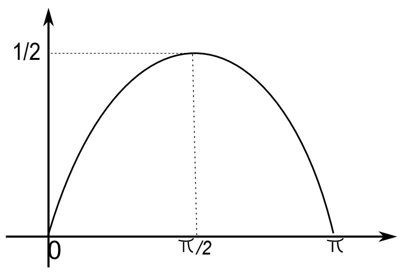

FIGURE 6.3 – Le graphe de $f(x)$

D'après le graphe donné par la figure 1.3 $f(x)$ est positive.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 1$

Par conséquent f est une densité de probabilité. Calculons $E(X)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}x \sin x dx$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \tfrac{1}{2}x \Rightarrow & du = \frac{1}{2}dx \\ v = -\cos x & \quad \Leftarrow & dv = \sin x dx \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\left[[-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x dx\right] = \frac{\pi}{2}$$

La valeur la plus probable est $\frac{\pi}{2}$.

6.5.2 Propriétés

a/ Pour deux variables aléatoires X et Y on a :

— dans le cas discret : $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

— dans le cas continu : $E[X+Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)\,f(x,y)dxdy$

b/ Espérance de la variable aX : $E\left[X\right] = aE\left[X\right]$

$$E(aX) = \sum_{i=1}^{n} ax_i p_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = aE\left[X\right]$$

c/ Espérance de la variable $aX + bY$:

$$E\left(aX + bY\right) = aE\left[X\right] + bE\left[Y\right]$$

d/ Si X et Y sont deux v. a. indépendantes on a :

$$E\left[XY\right] = E\left[X\right]E\left[Y\right]$$

6.6 Variance et moment d'une variable aléatoire

6.6.1 Définition :

La variance d'une v.a. noté $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

On définie l'écart type par la racine carrée de la variance :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Propriété : $E\left[(X-a)^2\right] = V(X) - (E(X) - a)^2$

Suite de l'exemple v.a. discrète :

La variance du nombre de fleurs est :$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$ comme $E(X) = 2$ alors :

$$V(X) = \frac{1}{4}(0-2)^2 + \frac{1}{8}(1-2)^2 + \frac{1}{8}(2-2)^2 + \frac{3}{8}(3-2)^2 + \frac{1}{8}(4-2)^2 = 2$$

d'où l'écart type est de $\sigma_X = \sqrt{2}$

Suite de l'exemple v.a. continue :

Calcul de la variance :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Sachant que $E(X^2) = \int_0^\pi x^2 f(x)dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}x^2 \sin x dx$ on pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 \Rightarrow \quad du = 2xdx \\ v = -\cos x &\quad \Leftarrow \quad dv = \sin x dx \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\left[\left[-x^2\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -x\cos x dx\right]$$

Une seconde intégration par partie :

$$u(x) = x \Rightarrow du = dx$$

$$v = \sin x \Leftarrow dv = \cos x dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + 2\underbrace{[x\sin x]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi \sin x dx\right] = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + 2\underbrace{[\cos x]_0^\pi}_{-4}\right] = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

6.6.2 Inégalité de Bienaimé-Tchebychev

L'espérance et l'écart type sont reliés par l'inégalité de bienaimé-Tchebychev :

$$P\left(|X - E[X]| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

dont on déduit que si $\sigma = 0$ la v.a. est presque surement égale à sa moyenne, c'est à dire constante. La variance mesure le caractère aléatoire d'une v.a., avec :

$V\left(X + a\right) = V\left(X\right)$

$V(aX) = a^2 V\left(X\right)$

6.6.3 Moments d'ordre q d'une v.a.

On définit les moments d'ordre q d'une v.a. par :

$$m_q = E\left(X^q\right)$$

Cas continue : $f(x)$ la ddp donc $m_q = \int_{-\infty}^{+\infty} x^q f\left(x\right) dx$

Cas discret $m_q = E(X^q) = \sum_{i=1}^{n} x_i^q p_i$

6.6.4 Propriétés

a) Il est possible d'exprimer la variance en fonction des moments d'ordre 1 et 2 :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - m_1^2$$

b) Pour deux v.a. X et Y indépendantes on a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

c) Si X et Y sont deux v.a. dépendantes on a :$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2cov(X,Y)$

avec : $cov(X,Y) = E(X - E(X))\,E(Y - E(Y))$

6.7 Mode et médiane d'une variable aléatoire

6.7.1 Le mode

- Pour une v.a. discrète , le mode est la valeur de X qui se répète le plus souvent.
- Pour une v.a. continue, le mode est la valeur de X qui donne le maximum pour la ddp.

6.7.2 La médiane

- Pour une v.a. discrète, la médiane est la valeur située au centre de la série statistique ordonnée.

Exemples :

1/ Soit la série statistique ordonnée suivante : 4,5,5,6,7,7,7,8,8,8,8,9,9,10.

La médiane est $M_e = \frac{7+8}{2} = 7.5$

Le mode est 8.

Pou une v.a. continue la médiane est la valeur α pour laquelle :

$$P(X < \alpha) = P(X > \alpha) = 1/2 \Rightarrow \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

2/ Soit la ddp $f(x) = a\exp(2x - x^2)$ avec $a > 0$. Calculer le mode de la v.a. X.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow a(2 - 2x)\exp\left(2x - x^2\right) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{le mode est égal à } 1$$

3/ Soit $f(x)$ la ddp d'une v.a. X . Calculer sa médiane.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x - \frac{1}{4}x^3 & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

$$P(X < \alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\int_0^{\alpha} \left(x - \frac{1}{4}x^3\right) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{16} = \frac{1}{2}$$

Sachant que $\alpha \in [0, 2]$ on trouve $\alpha = 1.09$.

6.8 La distribution de Bernoulli ou loi de Bernoulli $L(X) = B(1, p)$

Pour une expérience aléatoire qui n'a que deux issues, S (ou succès) et $\bar{S}$ (ou échec), on associe la v. a. X qui prend les valeurs 1 ou 0.

$P(S) = P(X = 1) = p$

$P(\bar{S}) = P(X = 0) = 1 - p = q$

On la note $B(p)$ ou p est le paramètre de Bernoulli.

L'espérance mathématiques $E(X) = p$

$E(X) = \sum p_i x_i = p\,.\,1 + q\,.\,0 = p$

La variance $V(X) = pq$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum p_i x_i^2 - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

Exemples

1- Dans une population un individu choisi au hasard possède un caractère A avec la probabilité p. La variable X définie sur $\Omega = \{A, \bar{A}\}$ par $X(A) = 1$ et $X(\bar{A}) = 0$ est une variable de $B(p)$.

2- On tire une boule dans une urne contenant 10 boules noire et 20 boules blanches. Soit N l'évènement tirer une boules noire et B l'évènement tirer une boule blanche ($N = \bar{B}$). La v.a. Xdéfinie sur $\Omega = \{N, B\}$ par $X(N) = 1$ et $X(B) = 0$ est une Bernoulli de paramètre $p = 1/3$.

6.9 Loi binomiale $L(X) = B(n, p)$

Lorsque les éventualités se produisent à une alternative (succès ou échec), la v.a. nombre de succès suit une loi de probabilité appelée loi binomiale lorsque :

1. Chaque épreuve donne lieu à deux éventualités exclusives de probabilité constante p succès et donc $q = 1 - p$ échec (cas de tirage de boules avec deux couleurs dans l'urne).
2. Les épreuves répétées sont indépendantes (cas de tirage de boules avec remise).

Alors la probabilité pour que cet évènement se produise X fois en n expériences c'est à dire k succès et $n - k$ échec est donnée par :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \; k = 0, 1, \cdots, n$$

La loi de Bernoulli est un cas particulier de la binomiale où $n = 1$ et $k = 0 \; ou \; 1$

Quelques propriétés de la loi binomiale

Moyenne $E(X)$	$E(X) = np$
La variance $V(X)$	$V(X) = npq$
Écart type σ_X	$\sigma_X = \sqrt{npq}$
Coefficient de symétrie α_3	$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$
Coéfficient d'applatissement α_4	$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{pq}$

Table 6.5 – Propriétés de la binomiale

Exemples

1/ Quelle est la probabilité d'obtenir lors d'un jet d'une pièce :

1. Deux faces avec 6 jets.
2. Au moins 4 faces en 6 jets.

On a 2 éventualités possible pile ou face les de probabilités constantes les épreuves sont indépendantes et se répètent donc c'est une $B(6, 1/2)$

$P(X = 2) = C_6^2 p^2 q^{6-2} = \frac{6!}{2!(4)!} (1/2)^2 (1/2)^4 = 15/64$

$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = C_6^4 (1/2)^4 (1/2)^2 + C_6^5 (1/2)^5 (1/2) + C_6^6 (1/2)^6 (1/2)^0 = 11/32$

2/ Pour 100 jets d'une pièce équilibrée le nombre de faces moyen est

$E(X) = np = 100.(\frac{1}{2}) = 50$

L'écart type est $\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{100.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 5$

3/ On suppose que la probabilité du nombre de garçon dans une famille de deux enfants suit une loi binomiale $B(2, \frac{1}{2})$. Si ont symbolise garçon par un G et F pour fille, il y a 4 cas possibles :

	GG	GF	FG	FF
X	2	1	1	0
$P(X = k)$	1/4	1/4	1/4	1/4

Table 6.6 – Tableau des probabilités pour une famille de 2 enfants

Pour une famille de 4 enfants on a :

k_i	0	1	2	3	4
$P(X = k_i)$	$C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$	$C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$	$C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$	$C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$	$C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

Table 6.7 – Tableau des probabilités pour une famille de 4 enfants

Quelle est la probabilité que dans une famille de 4 enfants le nombre de garçon soit inférieur à 3 ? Calculer l'espérance, la variance et l'écart type.

On cherche $P(X < 3)$ on a :

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1/16 + 4/16 + 6/16 = 11/16$.

L'espérance $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$ or $E(X) = np = 4.(1/2) = 2$.

La variance $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16}\right] - (2)^2 = 1$

or $V(X) = npq = 4 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1$.

L'écart type $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 1$.

6.10 Loi de Poisson $L(X) = \mathcal{P}(\lambda)$

On appelle processus de Poisson (loi des évènements rares), tout processus obéissant aux conditions suivantes :

La probabilité de réalisation de l'évènement au cours d'une petite période ou sur une petite portion d'espace est proportionnelle à la variation.

Elle est indépendante de ce qui c'est produit antérieurement ou à côté.

La probabilité de deux apparition au même temps est négligeable. Ainsi, des évènements qui se réalisent dans le temps tels que : les appels téléphoniques sur un canal, les pannes de machines, arrivées à un guichet. Ou dans l'espace tels que : répartition de points au hasard sur une droite, les n tirages dans une urne contenant deux type de couleurs avec n grand et la probabilité p très petite, ... peuvent être considéré comme processus de Poisson. Si $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ où $X = 0, 1, 2, \cdots$ alors on à :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

avec :$\lambda = np$ est dit paramètre de Poisson.

6.10.1 Approximation de la loi binomiale par celle de Poisson

La loi de poisson est une approximation de la loi binomiale où n très grand (≥ 50) et p très petit (≤ 5).

6.10.2 Propriétés de la loi de Poisson

Moyenne $E(X)$	$E(X) = np = \lambda$
La variance $V(X)$	$V(X) = \lambda = np$
Écart type σ_X	$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$
Coefficient de symétrie α_3	$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Coefficient d'applatissement α_4	$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$

TABLE 6.8 – Propriétés de la de Poisson

Exemples

1-sur une population de 100000 personnes, on rencontre 1080 daltoniens. En supposant que la distribution des daltoniens sur un échantillon de 100 personnes suit une loi de Poisson de moyenne $E(X) = \lambda = np = 100 \cdot \frac{1080}{100000}$, déterminer la probabilité de rencontrer au plus 3 daltoniens.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-1.08} \left[\frac{(1.08)^0}{0!} + \frac{(1.08)^1}{1!} + \frac{(1.08)^2}{2!} + \frac{(1.08)^3}{3!} \right] = 0.9757$$

2-Un central téléphonique automatique reçoit en moyenne 600 appels par heure. Quelle est la probabilité que durant 1 minute donnée, il recevra exactement deux appels ? 600 est le nombre d'appels en 1 heure d'où en moyenne il reçoit $\lambda = 600/60 = 10$. $P(X = 2) = \frac{10^2 e^{-10}}{2!} = 0.0022$

6.11 Loi Normale $L(X) = \aleph(\mu, \sigma)$

6.11.1 Définition

On parle de loi normale ou loi de Laplace-Gauss ou loi de Gauss ou encore deuxième loi de Laplace, lorsqu'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant de plusieurs causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante. Ainsi, les dimensions de pièces fabriquées dépendent du réglage de l'appareil de fabrication, des vibrations auxquelles il est soumis, de l'homogénéité de la matière première, de la température, de l'humidité..., lorsque tous ces facteurs sont indépendants et qu'aucun n'est prépondérant, on peut supposer que les dimensions de la pièce suivent une loi normale.

Une v.a. continue X suit une distribution normale si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \; x \in \mathbb{R}$$

on la note $\aleph(\mu, \sigma)$ avec μ la moyenne et σ est l'écart type.

Quand X est centrée et rapportée à son écart type c'est à dire on pose $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ on obtient alors $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ grâce au changement de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, on dit Z suit une loi normale centrée réduite de moyenne nulle et d'écart type 1 notée $\aleph(0, 1)$.

La probabilité que la v.a. $X \rightsquigarrow \aleph(\mu, \sigma)$ soit comprise entre x_1 et x_2 est donnée par :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

on pose $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow dz = \frac{dx}{\sigma}$ avec $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ et $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$ d'où :

$$P(z_1 \leq X \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz$$

$$P(z_1 \leq X \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

où $Z \rightsquigarrow \aleph(0,1)$ une ddp paire et dont la représentation est donnée par la figure6.4. Les probabilités sont lues à partir de la table de la loi normale cantrée réduite donnée à la fin du chapitre.

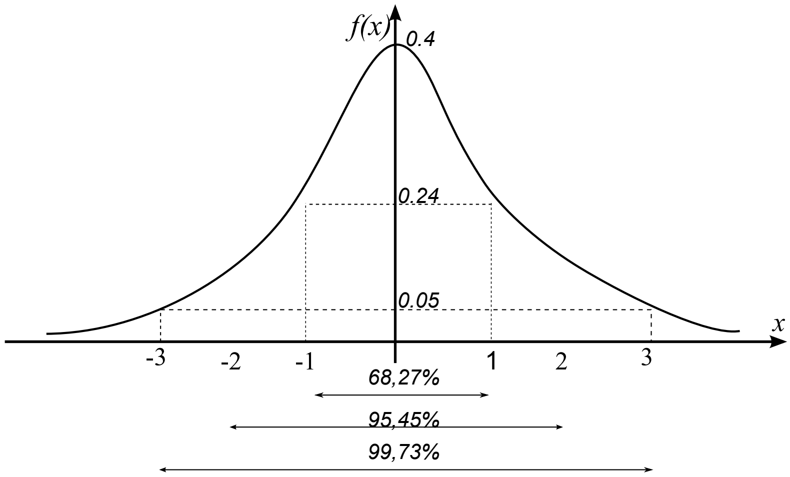

FIGURE 6.4 – Représentation de la distribution de la loi normale

6.11.2 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Si la probabilité de réalisation de l'évènement p est différente de 0 ou de 1, et que $E(X) = np \geq 15$ pour une binomiale avec un nombre n supérieur à 50 alors celle ci peut être approximée par une loi normale de paramètres $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

6.12 Exercices corrigés

Exercice 1

Sachant que la probabilité d'avoir un garçon est $p = 0.48$. Quelle est dans une famille de 5 enfants la probabilité d'avoir 2 garçon ?

Solution :

Il s'agit d'une loi binomiale car : chaque expérience donne lieu à deux éventualités (G ou F) qui sont indépendantes.... d'où $X \rightsquigarrow B(5, 0.48)$

$$P(X=2)=C_5^2p^2q^3=\frac{5!}{2!3!}\left(0.48\right)^2\left(0.52\right)^3=0.324$$

Exercice 2

Une fabrique produit 1000 pièces par jour dont 2% sont défectueuses. On tire parmi elles 100 pièces au hasard. Déterminer la probabilité pour que parmi ces 100 pièces 3 soient défectueuses ?

Solution :

Pour les mêmes raisons que l'exercice 1 il s'agit d'une $B(100, 0.02)$

$$\begin{aligned} P(X &= 3)=C_{100}^3p^3q^{97}=\frac{100!}{97!3!}\left(0.02\right)^3\left(0.98\right)^{97}=\frac{100.99.98}{6}\left(0.02\right)^3\left(0.98\right)^{97} \\ &= 161700.\left(8.10^{-6}\right).\left(1.409\right)=0.1822 \end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminer la probabilité d'obtenir 520 fois pile au cours de 1000 essais du jeu de pile ou face.

Solution :

Appliquons la loi binomiale $B(1000, 1/2)$ après avoir justifier tel que l'exercice 1.

$P(X=520)=C_{1000}^{520}\left(p\right)^{520}q^{480}=\frac{1000!}{520!480!}\left(1/2\right)^{520}\left(1/2\right)^{480}$

Appliquons la formule de Stirling :

$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\Rightarrow\ln n!=\frac{1}{2}\ln\left(2\pi n\right)+n\ln n-n\ln e=\frac{1}{2}\ln\left(2\pi n\right)+n\ln n-n$

$P(X=520)=\left[\left[\frac{1}{2}\ln\left(2\pi 1000\right)+1000\ln 10000-1000\right]-\left[\frac{1}{2}\ln\left(2\pi 520\right)+520\ln 520-520\right]-\left[\frac{1}{2}\ln\left(2\pi 480\right)+480\ln 480-480\right]\right]\cdot\left(1/2\right)^{520}\left(1/2\right)^{480}$

$P(X=520)=0.0134.$

Peut-on approximer la loi binomiale par celle de Poisson dans ce cas$P(X=520)=\frac{500^{520}e^{-500}}{520!}$? Non car $np=500\gg 15$ et $n\gg 50$. Il est possible de le faire par une loi normale car $np=500\gg 15$ et $n\gg 50$ avec $\sigma=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$.

Exercice 4

Quelles doivent être les valeurs des constantes a et b pour que la fonction $y = a + 3bx^2$puisse jouer le rôle d'une densité de probabilité pour la v.a. continue X dans l'intervalle $[-1, 1]$ et pour que dans cet intervalle la valeur de $E(X^2)$ soit égale à $2/5$? Donner alors la valeur moyenne de la variable X soit $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

Solution :

La fonction $y = a + 3bx^2$ joue le rôle d'une ddp si :

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (a + 3bx^2)\, dx = 1 \Leftrightarrow [ax + bx^2]_{-1}^{1} = 1 \Leftrightarrow 2a + 2b = 1 \Leftrightarrow a + b = 1/2$

Par ailleurs, $E(X^2) = 2/5$ alors : $\int_{-1}^{1} x^2 (a + 3bx^2)\, dx = 2/5 \Leftrightarrow \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{3bx^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

d'où $\frac{a}{3} + \frac{3b}{5} + \frac{a}{3} + \frac{3b}{5} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5a + 9b = 3$

on a alors : $\begin{cases} a + b & = 1/2 \\ 5a + 9b & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 3/8 \\ b & = 1/8 \end{cases}$

La moyenne est par conséquent :

$E(X) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^3\right) dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$

La variance $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{5}$.

Exercice 5

A pile ou face, on fait 10000 expériances. Quelle est la probabilité pour que le nombre Xde fois qu'on obtient pile ne soit pas compris entre 4900 et 5100 ?

Solution :

Il s'agit d'une binomiale qu'on approximera par une loi normale car $\mu = np = 0.5 * 10000 = 5000 > 15$ et $n = 10000 > 50$ deplus $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500} = 50$. Par ailleurs, on doit la centrer et réduire avec :$Z = \frac{X-5000}{50}$ et on cherche $P(z_1 > Z\, et\, Z > z_2) = 1 - P(z_1 < Z < z_2)$ avec $z_1 = \frac{4900-5000}{50} = -2$ et $z_2 = \frac{5100-5000}{50} = 2$

d'où : $P(z_1 > Z\, et\, Z > z_2) = 2 - 2F(z) = 2 - 2F(2) = 2 - 2(0.97725) = 0.0455$. La valeur $F(2)$ est lue à partir du tableau 6.9.

La table de la loi normale centrée réduite est donnée par le tableau 6.9 correspondant

à $P(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. $F(t) = P(Z < z)$ et $F(-t) = 1 - F(t)$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Table 6.9 – Tableau de la Loi Normale centrée réduite

Bibliographie

[AZOU1984] E.Azoulay, “ Mathématiques : Analyse Tome3 : cours et exercices, “ Ed. Mac Graw-Hill, Paris, France, 1984.

[LIPS1970] S. Lipschutz, “Probabilités - cours et problèmes,” Série schaum, Ed. Mac Graw-Hill, New York, USA, 1973.

[PISK1966] N. Piskounov,”Calcul différentiel et intégral : tome 1,” Moscou, Ed. Mir, URSS, 1966.

[REIS2002] C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, “Théorie des probabilités : problèmes et solutions,” Presses de l’Université du Québec, 2002.

[SHAO2005] J. Shao,”Mathematical Statistics : Exercises and Solutions,” Ed. Springer, New York, USA, 2005.