

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA-Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

Polycopié présenté par
Boukhalfa BELACHE

Intitulé :

Mécanique du point matériel
(Cours et exercices résolus)

Module de Physique 1 (Mécanique du point)
Cursus de formation Licence LMD L1 - Socles communs des domaines SM, ST
et MI.

Décembre 2018.

Avant-propos

Ce cours fait suite à plusieurs années d'enseignement des travaux dirigés du module de Mécanique des socles communs des domaines MI et SM. Son contenu répond au programme officiel du module de Mécanique enseigné au niveau de ces socles communs. Nous estimons qu'il peut aussi être utilisé par les étudiants du socle commun ST.

Ce polycopié ne couvre pas de façon complète le sujet relatif à la mécanique du point. Notre but est surtout de fournir à l'étudiant un outil de base minimal et accessible dans le cadre du programme officiel. L'étudiant peut ensuite approfondir, selon ses besoins, ses connaissances. Les exercices résolus donnés à la fin de chaque chapitre sont, pour la plupart, ceux proposés aux étudiants de 1^{ère} année (socles communs des domaines SM et MI) de la Faculté des Sciences Exactes.

Lors des séances de travaux dirigés, nous avons remarqué une maîtrise insuffisante de la langue d'enseignement par certains étudiants. Ceci rend parfois difficile la compréhension des concepts scientifiques. Ces étudiants découvrent pour la première fois des termes nouveaux pour eux. Pour leur faciliter la transition Lycée-Université, nous avons jugé utile d'inclure un lexique de terminologie Français-Arabe à la fin du polycopié. Aussi, un premier chapitre est consacré aux outils mathématiques de base utilisés dans le présent cours.

Les références bibliographiques permettant d'élargir ou d'approfondir le sujet sont données à la fin de ce cours. Nous avons intentionnellement sélectionné une liste d'ouvrages disponibles à la bibliothèque de l'université de Béjaia. Bien entendu, une vaste bibliographie relative au sujet est aussi disponible sur internet.

Notation

Les vecteurs sont notés en gras.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : RAPPELS ET COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

I.1 Introduction	4
I.2 Les vecteurs	
I.2.1 Multiplication d'un vecteur par un scalaire	4
I.2.2 Addition de vecteurs	5
I.2.3 Composantes d'un vecteur	5
I.2.4 Produit scalaire de deux vecteurs	5
I.2.5 Produit vectoriel de deux vecteurs	6
I.3 La dérivée, la différentielle et la primitive	
I.3.1 Cas d'une fonction scalaire	8
I.3.2 Dérivée et intégrale d'une fonction vectorielle	9
I.4 Système d'unités, unités dérivées et équations aux dimensions	10
I.5 Systèmes de coordonnées particuliers	
I.5.1 Les coordonnées cylindriques	12
I.5.2 Les coordonnées polaires	14
I.5.3 Les coordonnées sphériques	15
I.6 Champs scalaires et vectoriels	
I.6.1 Gradient d'un champ scalaire	16
I.6.2 Divergence d'un champ vectoriel	17
I.6.3 Rotationnel d'un champ vectoriel	17
I.6.4 Propriétés des champs scalaires et vectoriels	17
EXERCICES CORRIGÉS	18

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

II.1 Introduction	23
II.2 Le mouvement, le référentiel et la trajectoire	23
II.3 Vecteurs position, vitesse et accélération	23
II.4 Le mouvement rectiligne	24
II.5 Mouvement dans un plan	25
II.6 Mouvement curviligne dans l'espace à trois dimensions	27
II.7 Mouvement dans les systèmes de coordonnées particuliers	
II.7.1 Coordonnées cylindriques	31
II.7.2 Coordonnées sphériques	31
II.8 Vecteur vitesse de rotation	32

II.9 Le mouvement relatif	33
II.10 Mouvement d'un satellite artificiel autour de la terre	36
EXERCICES CORRIGÉS	43

CHAPITRE III : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

III.1 Introduction	49
III.2 Les lois de Newton	49
III.3 Forces de frottement	51
III.4 Forces d'inertie	52
III.5 La loi de gravitation universelle de Newton	53
III.6 La quantité de mouvement	55
III.6.1 Conservation de la quantité de mouvement	56
EXERCICES CORRIGÉS	58

CHAPITRE IV : TRAVAIL ET ENERGIE DANS LE CAS DU POINT MATERIEL

IV.1 Introduction	64
IV.2 Travail	64
IV.3 Puissance	65
IV.4 Energie cinétique, potentielle et mécanique	
IV.4.1 Energie cinétique	65
IV.4.2 Energie potentielle	66
IV.4.3 Energie mécanique	69
IV.4.3.1 Théorème de la variation de l'énergie	
Mécanique	70
EXERCICES CORRIGÉS	71

ANNEXE : LEXIQUE DE TERMINOLOGIE FRANÇAIS-ARABE 75

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 81

CHAPITRE I

RAPPELS ET COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

I.1 Introduction

La physique est une science qui a comme but l'étude des propriétés de la matière et l'établissement des lois qui régissent ses différents comportements. Parmi les branches de la physique on peut citer : la mécanique, l'optique et l'électricité.

La mécanique est la première branche de la physique qui s'est développée avec l'étude du mouvement des planètes et de la chute libre qui sont provoqués par l'interaction de gravitation.

La mécanique peut être subdivisée en trois parties :

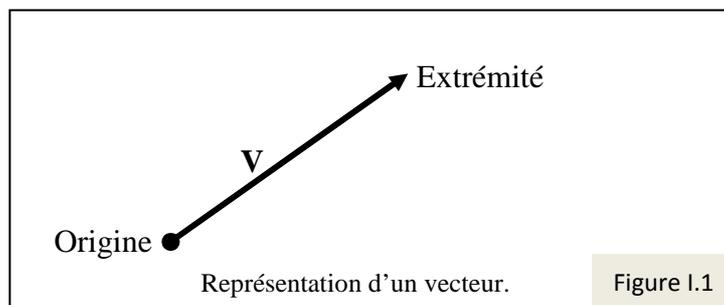
- La cinématique : étudie les mouvements des corps sans tenir compte des forces qui les provoquent.

- La dynamique : étudie les mouvements des corps et les forces qui les provoquent.

- La statique : étudie les conditions d'équilibre d'un corps.

I.2 Les vecteurs

Un vecteur est un segment de droite orienté. On le représente par une flèche (figure I.1). Il est caractérisé par sa direction, son module et son sens. Le module d'un vecteur \mathbf{V} noté $\|\mathbf{V}\|$ est la longueur de la flèche. L'intensité d'un vecteur est égale à son module.



Remarque

Les notions de direction et de sens ne doivent pas être confondues. La direction d'un vecteur est l'inclinaison de la droite qui porte ce vecteur. Elle peut être par exemple horizontale, verticale, inclinée de 23° par rapport à l'horizontale etc... Dans l'espace, il existe une infinité de directions. Pour une direction donnée, il existe deux sens possibles. Par exemple pour la direction verticale, on a deux sens : de haut en bas ou bien de bas en haut.

L'opposé d'un vecteur \mathbf{V} est un vecteur noté $-\mathbf{V}$ qui a les mêmes module et direction que \mathbf{V} mais son sens est opposé à celui de \mathbf{V} .

Un vecteur unitaire est un vecteur dont le module est égal à 1.

I.2.1 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient \mathbf{V} un vecteur et λ un nombre réel ($\lambda \in \mathbb{R}$). Le produit de λ par \mathbf{V} noté $\lambda\mathbf{V}$ est un vecteur dont :

- la direction est la même que celle de \mathbf{V} .

- le module $\|\lambda\mathbf{V}\|$ est égal à $|\lambda| \|\mathbf{V}\|$, où $|\lambda|$ est la valeur absolue de λ .

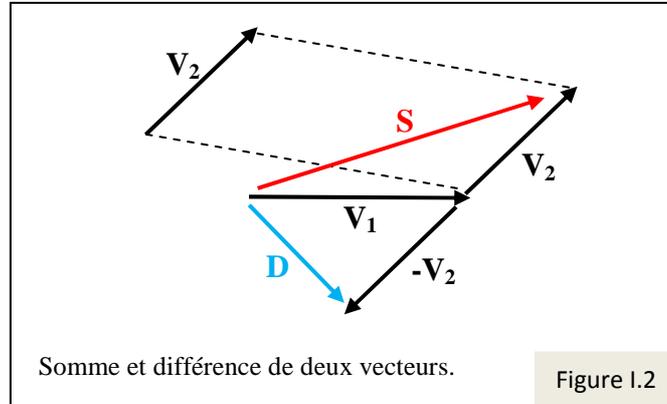
- le sens est celui de \mathbf{V} si λ est positif ou opposé si λ est négatif.

Si $\lambda = 0$, $\lambda\mathbf{V}$ est un vecteur nul noté $\mathbf{0}$.

I.2.2 Addition de vecteurs

Soient deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 . La somme $\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ s'obtient en déplaçant \mathbf{V}_2 parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son origine coïncide avec l'extrémité de \mathbf{V}_1 . Le vecteur \mathbf{S} a alors comme origine celle de \mathbf{V}_1 et comme extrémité celle de \mathbf{V}_2 (figure I.2).

La différence entre ces deux vecteurs est : $\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2)$.



On démontre que :

$$\|\mathbf{S}\|^2 = \|\mathbf{V}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_2\|^2 + 2 \|\mathbf{V}_1\| \|\mathbf{V}_2\| \cos\theta$$

$$\|\mathbf{D}\|^2 = \|\mathbf{V}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_2\|^2 - 2 \|\mathbf{V}_1\| \|\mathbf{V}_2\| \cos\theta$$

où θ est l'angle que fait \mathbf{V}_1 avec \mathbf{V}_2 .

Soient trois vecteurs $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ et deux nombres réels α, β . On démontre les propriétés suivantes :

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3$$

$$\alpha (\beta \mathbf{V}_1) = \beta (\alpha \mathbf{V}_1) = (\alpha \beta) \mathbf{V}_1$$

$$(\alpha + \beta) \mathbf{V}_1 = \alpha \mathbf{V}_1 + \beta \mathbf{V}_1$$

$$\alpha (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \alpha \mathbf{V}_1 + \alpha \mathbf{V}_2$$

I.2.3 Composantes d'un vecteur

Soient trois vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ non nul et non coplanaires dans l'espace à trois dimensions. Ces vecteurs ne sont donc pas tous dans un plan. On démontre que tout vecteur \mathbf{V} donné dans l'espace est une combinaison linéaire unique des vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; c'est-à-dire :

$$\mathbf{V} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \text{ et on le note } \mathbf{V}(x, y, z)$$

où x, y et z sont des nombres réels appelés composantes de \mathbf{V} .

L'ensemble $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ forme une base de l'espace à trois dimensions. Cet ensemble est dit orthogonal si les angles entre les différents vecteurs sont égaux à 90° . Cette base est unitaire si les trois vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont unitaires. La base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ est dite orthonormée si elle est orthogonale et unitaire en même temps.

Pour deux vecteurs $\mathbf{V}_1(x_1, y_1, z_1), \mathbf{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ et α un nombre réel, on a :

$$\mathbf{V}_1 \pm \mathbf{V}_2 (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

$$\alpha \mathbf{V}_1 (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

I.2.4 Produit scalaire de deux vecteurs

Par définition, le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 (noté $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2$) est le nombre réel (scalaire) :

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \|\mathbf{V}_1\| \|\mathbf{V}_2\| \cos\theta$$

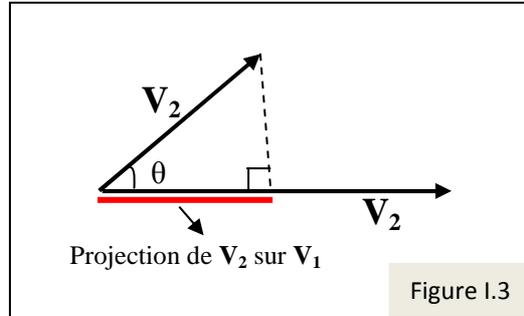
où θ est l'angle entre \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 .

Nous pouvons constater que :

- $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \|\mathbf{V}_1\|$ projection de \mathbf{V}_2 sur \mathbf{V}_1 (figure I.3).
- Si \mathbf{V}_1 est perpendiculaire à \mathbf{V}_2 ($\theta=90^\circ$) alors $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0$.
- $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 = \|\mathbf{V}_1\|^2$.

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

- $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_1$ (commutativité)
- $(\mathbf{V}_1 \pm \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3 \pm \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_3$ (distributivité par rapport à \pm)



Si (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont les composantes respectives des vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 dans une base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ on a :

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{donc}$$

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \cdot (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + x_1y_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + x_1z_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) + y_1x_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + y_1y_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + y_1z_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) + z_1x_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + z_1y_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + z_1z_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

On obtient ainsi la forme analytique du produit scalaire.

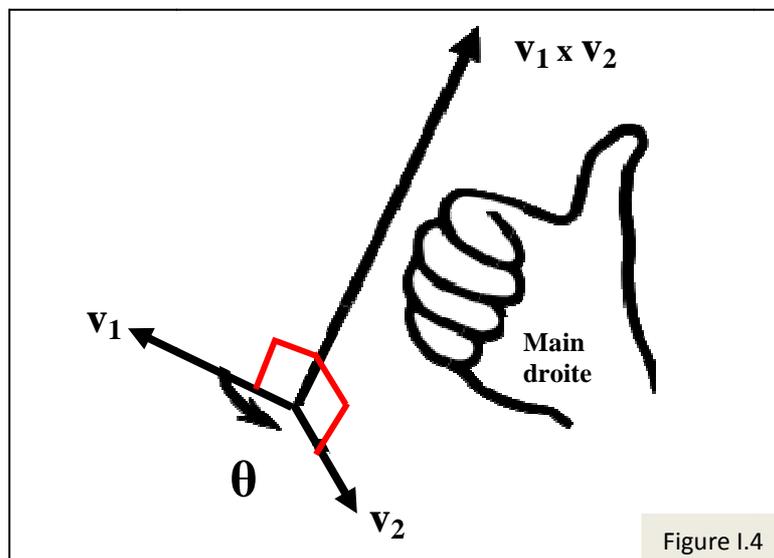
Si $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$ alors $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 = \|\mathbf{V}_1\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ et donc

$$\|\mathbf{V}_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

I.2.5 Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 (noté $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ ou bien $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$) est un vecteur \mathbf{V} de sorte que :

- $\|\mathbf{V}\| = \|\mathbf{V}_1\| \|\mathbf{V}_2\| \sin\theta$ où θ est l'angle entre \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$ et $\sin\theta \geq 0$).
- La direction de \mathbf{V} est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 ; c'est-à-dire \mathbf{V} est perpendiculaire en même temps à \mathbf{V}_1 et à \mathbf{V}_2 .
- Le sens de \mathbf{V} est donné par la règle du tourne-vis ou de la main droite (figure I.4).



Lorsque les deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 sont parallèles ($\theta = 0$ ou 180°), leur produit vectoriel est nul.

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = -\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1 \text{ (anticommutativité)}$$

$$\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \pm \mathbf{V}_3) = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \pm \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3 \text{ (distributivité par rapport à } \pm \text{)}$$

Une base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est dite directe si :

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \text{ et } \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Tout au long du présent cours, la base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ considérée est directe.

Soient deux vecteurs $\mathbf{V}_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\mathbf{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ de l'espace à 3 dimensions :

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + x_1y_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + x_1z_2(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + y_1x_2(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + y_1y_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + y_1z_2(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + z_1x_2(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + z_1y_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + z_1z_2(\mathbf{k} \times \mathbf{k})$$

Sachant que : $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ alors

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k}$$

$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ est aussi donné par le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Remarque 1

Le module du produit vectoriel $\|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2\|$ représente la valeur de la surface du parallélogramme construit sur les deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 (voir figure I.5).

$$\|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2\| = S = \|\mathbf{V}_1\| \|\mathbf{V}_2\| \sin\theta$$

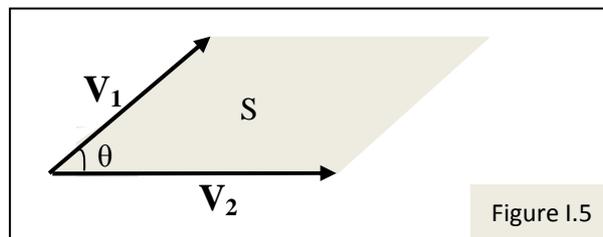


Figure I.5

Remarque 2

Le produit mixte de trois vecteurs $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ et \mathbf{V}_3 est donné par $\mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)$.

La valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs donne le volume V du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

$$V = |\mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)|$$

Sur la figure I.6 ci-dessous, le volume $V = S h$ où S est la surface de base engendrée par les vecteurs $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ ($S = \|\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3\|$) et h est la hauteur du parallélépipède. La hauteur h est perpendiculaire à la surface S et est donc portée sur la direction du produit vectoriel $\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3$.

$$h = \|\mathbf{V}_1\| \cos\beta \text{ où } \beta \text{ est l'angle entre } \mathbf{V}_1 \text{ et } \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3.$$

$$V = S h = \|\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3\| h = \|\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3\| \|\mathbf{V}_1\| |\cos\beta| = |\mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)|$$

Remarque 3

D'après le résultat de la remarque 2 ci-dessus, la valeur absolue du produit mixte reste inchangée si l'on change l'ordre des vecteurs. Les relations suivantes sont vérifiées dans le cas du respect de l'ordre cyclique des trois vecteurs :

$$\mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3) = \mathbf{V}_2 \cdot (\mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_1) = \mathbf{V}_3 \cdot (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \quad (\text{Noter l'ordre des indices})$$

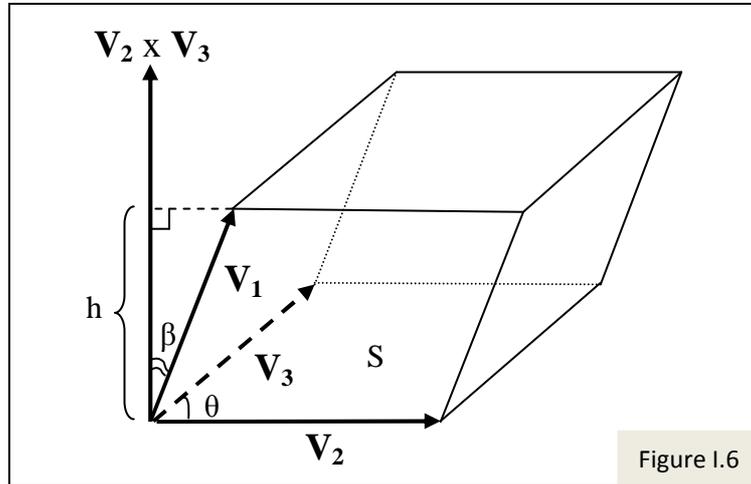


Figure I.6

Remarque 4

Le double produit vectoriel $\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)$ est un vecteur du plan engendré par les vecteurs \mathbf{V}_2 et \mathbf{V}_3 :

$$\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3) \mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) \mathbf{V}_3$$

I.3 La dérivée, la différentielle et la primitive

I.3.1 Cas d'une fonction scalaire

La dérivée d'une fonction $f(x)$ à une variable x est par définition :

$$f'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{df}{dx}$$

Exemple

$$f(x) = x^2 + e^{2x}$$

$$f'(x) = 2x + 2e^{2x}$$

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions à une variable x et α un nombre réel. Les règles de dérivation suivantes s'appliquent :

$$\frac{d(f \mp g)}{dx} = \frac{df}{dx} \mp \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d(\alpha f)}{dx} = \alpha \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d(fg)}{dx} = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Dans le cas d'une fonction $f(x, y, z)$ à trois variables (x, y, z) , la dérivée partielle de $f(x, y, z)$ par rapport à la variable x est :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\delta x}$$

(les autres variables (y, z) sont considérées comme constantes).

Exemple

$$f(x, y, z) = 2x^3 + 3xy + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 3y ; \frac{\partial f}{\partial y} = 3x ; \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

La différentielle totale df de la fonction $f(x, y, z)$ est par définition :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Exemple

$$f(x, y, z) = 2x^4 + 3xy + z^2 + e^{-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 + 3y - e^{-x} ; \frac{\partial f}{\partial y} = 3x ; \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$df = (8x^3 + 3y - e^{-x})dx + 3xdy + 2zdz$$

Les règles de différentiation sont identiques à celles de la dérivation. Soient f et g deux fonctions à plusieurs variables et α un nombre réel, on a :

$$d(f \mp g) = df \mp dg$$

$$d(\alpha f) = \alpha df$$

$$d(fg) = f dg + g df$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

La primitive d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est par définition la fonction $g(x)$ de sorte que :

$$\forall x \in [a, b] \text{ on a } g'(x) = f(x)$$

$g(x)$ est l'intégrale de $f(x)$ à une constante près.

$$\int f(x)dx = g(x) + \text{constante}$$

Exemple

$$\int \sin(2x)dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \text{constante}$$

I.3.2 Dérivée et intégrale d'une fonction vectorielle

Soit \mathbf{V} un vecteur qui dépend d'une variable réel t et qu'on écrit $\mathbf{V}(t)$. La dérivée de $\mathbf{V}(t)$ par rapport à t est par définition le vecteur :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(t + \delta t) - \mathbf{V}(t)}{\delta t}$$

Si le vecteur \mathbf{V} est constant, $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0$.

Soient deux fonctions vectorielles $\mathbf{V}_1(t)$ et $\mathbf{V}_2(t)$ dépendant de la variable t et soit $f(t)$ une fonction scalaire dépendant aussi de la variable t . On peut démontrer les propriétés suivantes :

$$\frac{d(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)}{dt} = \frac{d(\mathbf{V}_1)}{dt} \cdot \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \cdot \frac{d(\mathbf{V}_2)}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2)}{dt} = \frac{d(\mathbf{V}_1)}{dt} \times \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \times \frac{d(\mathbf{V}_2)}{dt} \quad (\text{Attention à l'ordre des vecteurs})$$

$$\frac{d(f \mathbf{V}_1)}{dt} = \frac{df}{dt} \mathbf{V}_1 + f \frac{d(\mathbf{V}_1)}{dt}$$

Si $V_x(t), V_y(t), V_z(t)$ sont les composantes du vecteur $\mathbf{V}(t)$ dans une base fixe :

$$\mathbf{V}(t) = V_x(t)\mathbf{i} + V_y(t)\mathbf{j} + V_z(t)\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dV_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dV_z(t)}{dt}\mathbf{k}$$

Les composantes de la dérivée sont donc les dérivées des composantes.

Soit une fonction vectorielle $\mathbf{V}(t)$ dépendant de la variable t . L'intégrale de $\mathbf{V}(t)$ par rapport à t est par définition :

$\int \mathbf{V}(t)dt = \mathbf{W}(t) + \mathbf{C}$, où \mathbf{C} est un vecteur constant et $\mathbf{W}(t)$ une fonction vectorielle dont la dérivée est $\mathbf{V}(t)$; c'est-à-dire :

$$\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t)$$

Si $V_x(t), V_y(t), V_z(t)$ sont les composantes du vecteur $\mathbf{V}(t)$ dans une base fixe :

$$\mathbf{V}(t) = V_x(t)\mathbf{i} + V_y(t)\mathbf{j} + V_z(t)\mathbf{k}$$

$$\int \mathbf{V}(t)dt = \int V_x(t)\mathbf{i} dt + \int V_y(t)\mathbf{j} dt + \int V_z(t)\mathbf{k} dt =$$

$$\left(\int V_x(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int V_y(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int V_z(t) dt \right) \mathbf{k}$$

Les composantes de l'intégrale sont donc les intégrales des composantes.

Exemple

$$\mathbf{V}(t) = (t^3 + \sin(-2t) + e^{-3t})\mathbf{i} + \cos(3t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = [3t^2 - 2\cos(-2t) - 3e^{-3t}]\mathbf{i} - 3\sin(3t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\int \mathbf{V}(t)dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{1}{2}\cos(-2t) - \frac{1}{3}e^{-3t} + C_1 \right] \mathbf{i} + \left[-\frac{1}{3}\sin(3t) + C_2 \right] \mathbf{j} + \left[\frac{t^2}{2} + C_3 \right] \mathbf{k}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes réelles.

I.4 Système d'unités, unités dérivées et équations aux dimensions

En physique, les lois sont des relations mathématiques faisant intervenir des grandeurs physiques. Chaque grandeur est caractérisée par sa dimension et son unité. En mécanique, on admet par convention trois grandeurs fondamentales : la longueur, la masse et le temps. Toutes les autres grandeurs mécaniques (vitesse, force, énergie, etc..) s'expriment à l'aide d'équations mathématiques en fonction des grandeurs fondamentales. Elles sont appelées grandeurs dérivées.

Exemple

La vitesse = longueur / temps.

Les unités des grandeurs fondamentales sont : le mètre (m), le kilogramme (kg) et la seconde (s). L'unité de la vitesse est donc le m/s.

En électricité, on utilise en plus une grandeur fondamentale appelée intensité du courant (I). C'est, par définition, la charge électrique transportée par unité de temps. Son unité est l'Ampère (A).

CHAPITRE I : RAPPELS ET COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

Les quatre unités fondamentales (m, kg, s, A) choisies ci-dessus définissent le système d'unités MKSA dont les initiales signifient respectivement mètre, kilogramme, seconde et Ampère. Le mètre est la longueur du segment de droite parcouru par un signal lumineux dans le vide durant $1/299792458$ secondes. Un mètre étalon est déposé au Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres près de Paris (France). L'unité de la masse est le kilogramme (kg). C'est la masse d'un cylindre étalon en platine irridié déposé au Bureau International des Poids et Mesures. A compter du mois de mai 2019, une définition du kg pourrait être adoptée à partir de la physique quantique (constante de Planck). En pratique, on peut considérer avec une bonne approximation que le kg est la masse de 10^{-3} m^3 d'eau à $4 \text{ }^\circ\text{C}$. La seconde est la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 au repos et au zéro absolu (température de $-273 \text{ }^\circ\text{C}$).

Aujourd'hui, le système d'unités le plus utilisé en physique est le système international (SI). Il est constitué du système MKSA complété par trois autres unités fondamentales :

- la candela (cd) qui est l'unité de l'intensité lumineuse.
- le Kelvin (K) qui est l'unité de la température absolue.
- la mole (mol) qui est l'unité de la quantité de substance.

En pratique, il est parfois commode d'utiliser des multiples ou sous-multiples de ces unités. Le tableau ci-dessous donne les multiples et les sous-multiples des unités de mesure en physique.

Préfixe	Symbole	Facteur
atto	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
pico	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
micro	μ	10^{-6}
milli	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
déci	d	10^{-1}
déca	da	10
hecto	h	10^2
kilo	k	10^3
méga	M	10^6
giga	G	10^9
téra	T	10^{12}

Les unités correspondant aux grandeurs dérivées sont appelées unités dérivées. Elles sont exprimées en fonction des unités fondamentales. Pour cela, on utilise les équations aux dimensions. Une équation aux dimensions est une relation mathématique qui exprime la dimension d'une grandeur X (notée $[X]$) en fonction des dimensions des grandeurs fondamentales masse, longueur et temps qui sont respectivement notées $[M]$, $[L]$ et $[T]$.

L'équation aux dimensions de la grandeur X s'écrit :

$$[X] = [M]^\alpha [L]^\beta [T]^\gamma$$

Si X est la vitesse v par exemple, nous écrivons :

$$[v] = [L] [T]^{-1} \text{ et l'unité de la vitesse est le } \text{m s}^{-1}.$$

De même, comme l'accélération a mesure la variation de la vitesse dans le temps ($a = v / t$) son équation aux dimensions s'écrit :

$$[a] = [v][t]^{-1} = [L][T]^{-1}[T]^{-1} = [L][T]^{-2}$$

L'unité de l'accélération est donc le m s^{-2} .

La force F qui agit sur un corps est le produit de sa masse m et de son accélération (a),

$F = m a$. L'équation aux dimensions de F s'écrit :
 $[F] = [m][a] = [M][L][T]^{-2}$
 L'unité de F est le kg m s^{-2} qui est le Newton (N).

Remarque 1

En physique, les équations doivent être homogènes. Les dimensions des termes à gauche et à droite de la relation doivent être les mêmes. Aussi, l'addition (ou la soustraction) de deux grandeurs physiques n'est possible que si ces grandeurs ont les mêmes dimensions.

Remarque 2

Une grandeur sans dimension garde la même valeur quel que soit le système d'unités choisi.
 Exemple : l'angle θ en radians (attention le radian n'est pas une unité).

$\theta = \text{longueur de l'arc/rayon}$

Les principales unités dérivées utilisées en mécanique sont résumées dans le tableau suivant.

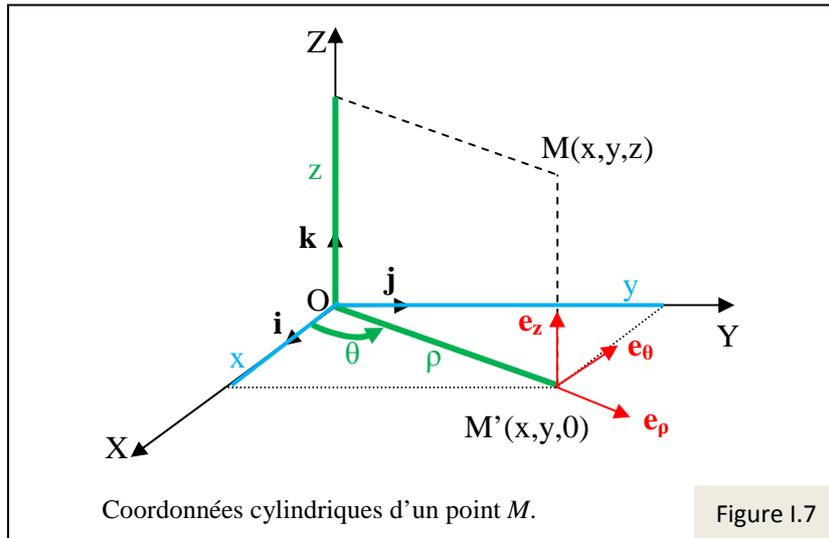
Grandeurs	Unités	Dimensions
Surface	m^2	$[L]^2$
Volume	m^3	$[L]^3$
Angle	(rd)	Sans dimension
Vitesse	m.s^{-1}	$[L][T]^{-1}$
Accélération	m.s^{-2}	$[L][T]^{-2}$
Vitesse angulaire	rd.s^{-1}	$[T]^{-1}$
Accélération angulaire	rd.s^{-2}	$[T]^{-2}$
Fréquence	$\text{s}^{-1} = \text{Hertz (Hz)}$	$[T]^{-1}$
Quantité de mouvement	kg.m.s^{-1}	$[M][L][T]^{-1}$
Force	$\text{kg.m.s}^{-2} = \text{Newton (N)}$	$[M][L][T]^{-2}$
Energie, travail, chaleur	$\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2} = \text{Joule (J)}$	$[M][L]^2[T]^{-2}$
Puissance	$\text{kg.m}^2.\text{s}^{-3} = \text{Watt (W)}$	$[M][L][T]^{-3}$
Pression	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2} = \text{Pascal (Pa)}$	$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$

I.5 Systèmes de coordonnées particuliers

En plus du système de coordonnées cartésiennes, on a trois autres systèmes de coordonnées : cylindriques, polaires et sphériques. Le choix du système de coordonnées dépend de la symétrie du problème à traiter.

I.5.1 Les coordonnées cylindriques

Soit un point M dont les coordonnées cartésiennes sont (x, y, z) dans un repère (O, X, Y, Z) muni d'une base orthonormée directe $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Les coordonnées cylindriques de M sont par définition (ρ, θ, z) telles que (figure I.7) :



$\rho = ||\overrightarrow{OM'}||$ où M' est la projection de M dans le plan (XY) .

$\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM'}) =$ l'angle que fait OM' avec l'axe OX .

$z = z =$ composante cartésienne de M sur l'axe OZ .

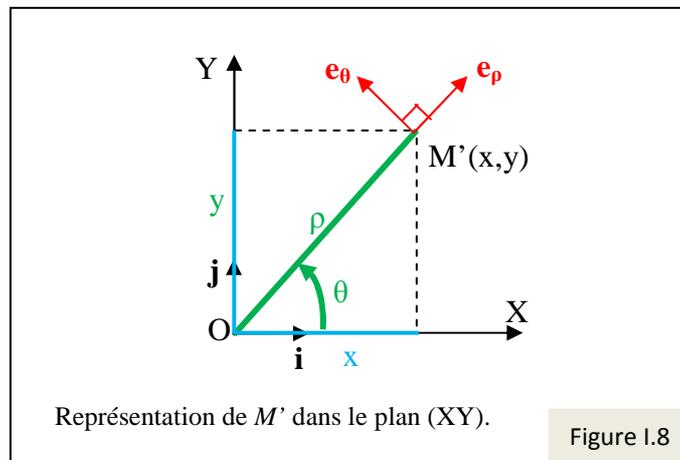
En général, ρ varie de 0 à $+\infty$, θ de 0 à 2π et z de $-\infty$ à $+\infty$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques se fait en utilisant les relations (voir figure I.8):

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$



En considérant x et y comme deux fonctions à deux variables ρ et θ , nous pouvons écrire les différentielles de x , y et z sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} dx &= \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta \\ dy &= \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta \\ dz &= dz \end{aligned} \right\} (*)$$

Les relations inverses permettant de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Pour le calcul de l'angle θ , il faut être prudent. Les signes de x et y permettent de situer le cadran dans lequel se trouve l'angle θ .

L'utilisation du système des coordonnées cylindriques est commode dans le cas d'un problème ayant une symétrie de révolution (cylindrique). L'axe (OZ) coïncide dans ce cas avec l'axe de révolution.

Pour trouver les vecteurs unitaires de la base locale associée aux coordonnées cylindriques, on prend la différentielle du vecteur position \mathbf{OM} :

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$d\mathbf{OM} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ et en utilisant les relations (*) ci-dessus on obtient :

$$d\mathbf{OM} = (\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta)\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \\ = (\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j})d\rho + (-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\rho d\theta + dz\mathbf{e}_z$$

Puisque le déplacement infinitésimal de M s'écrit (en coordonnées cylindriques),

$$d\mathbf{OM} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z$$

Nous obtenons donc les formules de passage des vecteurs unitaires $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ aux vecteurs de la base locale $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

On peut vérifier que la base locale $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ est orthonormée et directe.

D'après la relation de Chasles, le vecteur position \mathbf{OM} s'écrit :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}' + \mathbf{M}'\mathbf{M}$$

Avec $\mathbf{OM}' = \rho\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{M}'\mathbf{M} = z\mathbf{e}_z$ on obtient :

$$\mathbf{OM} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$$

Inversement, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{i} = \cos\theta\mathbf{e}_\rho - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{j} = \sin\theta\mathbf{e}_\rho + \cos\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$

D'autre part, on peut vérifier que :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j} = -\mathbf{e}_\rho$$

Nous pouvons donc retenir que la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à θ est un vecteur unitaire qui tourne de 90° dans le sens positif d'augmentation de θ . Lorsque l'angle θ dépend d'une autre variable t , par exemple, nous avons :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\rho$$

Remarque

La base locale $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ est liée au point M . Contrairement à la base fixe $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, cette base locale change avec la position du point M . Dans le cas des coordonnées cylindriques, les deux premiers vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ changent dans le temps (avec la position de point M) tandis que le troisième vecteur unitaire $(\mathbf{e}_z = \mathbf{k})$ reste constant.

I.5.2 Les coordonnées polaires

Les coordonnées polaires (ρ, θ) d'un point M dans le plan (XY) sont par définition :

$$\rho = \|\mathbf{OM}\|$$

$$\theta = (\widehat{OX, \mathbf{OM}}) = \text{l'angle que fait } \mathbf{OM} \text{ avec l'axe } OX.$$

C'est un cas particulier des coordonnées cylindriques où on ignore la troisième variable z ($z = 0$). Toutes les relations vues précédemment (coordonnées cylindriques) dans le plan (XY) sont alors valables pour les coordonnées polaires.

I.5.3 Les coordonnées sphériques

Soit un point M dont les coordonnées cartésiennes sont (x, y, z) . Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de M sont par définition (figure I.9) :

$$r = ||\mathbf{OM}'||$$

$$\theta = (\widehat{OZ, \mathbf{OM}})$$

$$\varphi = (\widehat{OX, \mathbf{OM}'}) \text{ où } M' \text{ est la projection de } M \text{ dans le plan (XY).}$$

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M s'écrivent alors :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

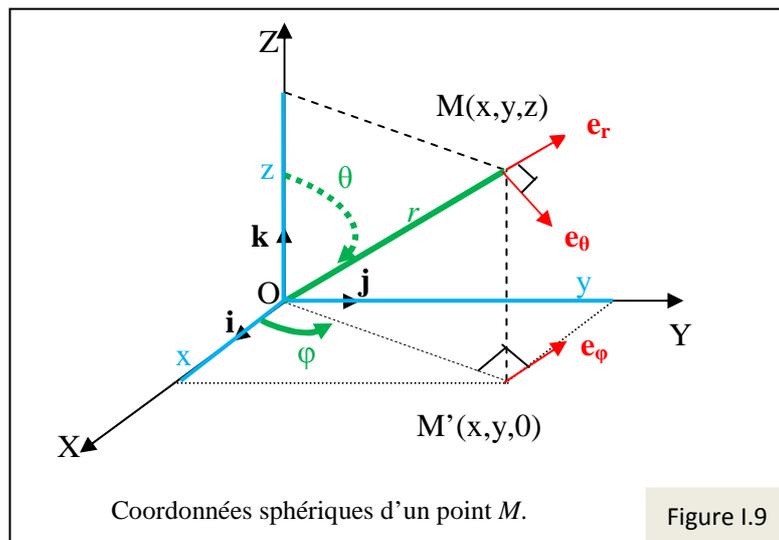
Et inversement, nous pouvons écrire :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

Pour le calcul de φ à partir de cette dernière équation, il faut être prudent. Les signes de x et y permettent de situer le cadran dans lequel se trouve l'angle φ .



En considérant x, y et z comme des fonctions de r, θ et φ , les différentielles de (x, y, z) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ dy &= \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} (**)$$

La différentielle du vecteur position \mathbf{OM} s'écrit :

$$d\mathbf{OM} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

où $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ sont les vecteurs unitaires de la base locale associée aux coordonnées sphériques. En remplaçant dx, dy et dz (relations (**)) ci-dessus) dans l'expression de $d\mathbf{OM}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} \end{aligned}$$

On peut vérifier que la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ est orthonormée et directe.

L'utilisation des coordonnées sphériques trouve son utilité dans le cas où le problème à traiter présente une symétrie sphérique.

Remarque

L'angle θ des coordonnées sphériques ne doit pas être confondu avec celui des coordonnées cylindriques. Dans le cas des coordonnées sphériques, θ est l'angle entre le vecteur position \mathbf{OM} et l'axe (OZ). Pour les coordonnées cylindriques, cet angle désigne l'angle entre la projection dans le plan (OXY) du vecteur position \mathbf{OM} et l'axe (OX).

I.6 Champs scalaires et vectoriels

On appelle champ scalaire une fonction scalaire U dépendant des coordonnées (x, y, z) du point M de l'espace. On l'écrit $U(x, y, z)$ ou $U(M)$.

De la même façon, on définit un champ vectoriel comme étant une fonction vectorielle \mathbf{V} dépendant des coordonnées des points de l'espace. Il s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z) = \mathbf{V}(M) \text{ où } V_x, V_y \text{ et } V_z \text{ dépendent des coordonnées } (x, y, z) \text{ de } M.$$

Ce champ vectoriel est aussi appelé 'champ de forces'.

Les champs scalaires et vectoriels peuvent aussi dépendre du temps mais dans notre cours nous considérerons uniquement les champs indépendants du temps.

I.6.1 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient d'un champ scalaire $U(x, y, z)$ est par définition :

$$\mathbf{grad}U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$$

∇ est appelé 'opérateur nabla'.

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Le gradient d'une fonction scalaire est donc un vecteur.

Exemple

$$U(x, y, z) = x^2 - y + 2z$$

$$\mathbf{grad}U = \nabla U = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Soit $U(x, y, z) = U(M)$ un champ scalaire et $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ le vecteur position de M . La différentielle de U s'écrit :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$d\mathbf{OM} = d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

On peut constater que :

$$\mathbf{grad}U \cdot d\mathbf{r} = dU$$

En coordonnées cylindriques et sphériques, le gradient s'exprime respectivement par :

$$\mathbf{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

I.6.2 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence d'un champ vectoriel $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$ est par définition :

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est donc un scalaire.

Exemple

$$\mathbf{V} = x^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + (x^2 - z) \mathbf{k}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 2x - 1$$

I.6.3 Rotationnel d'un champ vectoriel

On appelle rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$ le vecteur :

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & -\mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

I.6.4 Propriétés des champs scalaires et vectoriels

Soient U un champ scalaire et \mathbf{V} un champ vectoriel. On démontre que :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}U) = \mathbf{0}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{V}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U \quad (\text{L'opérateur } \Delta \text{ est appelé Laplacien}).$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{V}) - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} \right)$$

où

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \mathbf{k}$$

EXERCICES CORRIGÉS

Exercice I-1

Dans l'espace muni d'une base orthonormée (O, i, j, k) , on considère trois points A, B et C de coordonnées respectives A(1,2,0), B(3,0,4) et C(0,3,2). Soient u, v et w les vecteurs définis par : $u = AB, v = BC$ et $w = CA$.

1) Calculer :

a) les modules des vecteurs u, v et w .

b) $u + v + w$.

c) le produit scalaire $u \cdot v$, le produit vectoriel $u \times v$ et le produit mixte $(u \times v) \cdot w$

d) l'angle α entre les vecteurs u et v .

e) la surface du triangle ABC et le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v et w .

2) Montrer que :

a) les points A, B et C forment un plan (P).

b) le point D(0,3,5) appartient au plan (P) engendré par les points A, B et C.

c) le vecteur AP , tel que P(2,3,0) est perpendiculaire au plan (P).

Solution

1) a) Les vecteurs AB, BC et CA s'écrivent :

$$AB = OB - OA, BC = OC - OB, CA = OA - OC$$

Les composantes de u, v et w sont donc :

$$u(2, -2, 4), v(-3, 3, -2), w(1, -1, -2)$$

$$||u|| = 24, ||v|| = 22, ||w|| = 6$$

$$b) u + v + w = (AB + BC) + CA = AC + CA = 0$$

Ceci peut être vérifié en effectuant les sommes des différentes composantes de ces trois vecteurs.

$$c) u \cdot v = -6 - 6 - 8 = -20$$

$$u \times v = -8i - 8j = (-8, -8, 0)$$

$$(u \times v) \cdot w = (-8)1 + (-8)(-1) + 0(-2) = 0$$

d) Si α est l'angle entre les vecteurs u et v , on peut écrire :

$$u \cdot v = ||u|| ||v|| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{u \cdot v}{||u|| ||v||} = \frac{-20}{(24)(22)} = -0,038 \Rightarrow \alpha = 92,2^\circ$$

e) La surface S du triangle ABC est la moitié de la surface du parallélogramme engendré par les vecteurs BA et BC ; c'est-à-dire la moitié du module du produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$S = \frac{1}{2} ||BA \times BC|| = \frac{1}{2} ||(-u) \times v|| = \frac{1}{2} ||u \times v|| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

Le volume V du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v et w est la valeur absolue du produit mixte de ces trois vecteurs :

$$V = |(u \times v) \cdot w| = 0 \text{ (les trois vecteurs } u, v \text{ et } w \text{ appartiennent donc à un plan)}$$

2) a) Le produit vectoriel des vecteurs AB et BC n'est pas nul (voir 1-c). Ceci montre que le vecteur AB n'est pas parallèle à BC . Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un plan (P).

b) Le point D(0,3,5) appartient au plan (P) engendré par les points A, B et C si le produit mixte de trois vecteurs construits à partir de ces points est nul. On peut par exemple montrer que le produit mixte des trois vecteurs BD, BA et BC est nul. Une deuxième méthode consiste

à montrer que le vecteur \mathbf{BD} est une combinaison linéaire des vecteurs \mathbf{BA} et \mathbf{BC} , c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels β_1 et β_2 tels que $\mathbf{BD} = \beta_1 \mathbf{BA} + \beta_2 \mathbf{BC}$.

Les composantes du vecteur \mathbf{BD} sont $(-3, 3, 1)$.

$$\mathbf{BD} \cdot (\mathbf{BA} \times \mathbf{BC}) = \mathbf{BD} \cdot [(-\mathbf{u}) \times \mathbf{v}] = -\mathbf{BD} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -[(-3)(-8) + 3(-8) + 1(0)] = 0$$

On peut démontrer aussi que $\mathbf{BD} = \frac{-9}{8} \mathbf{BA} + \frac{7}{4} \mathbf{BC}$

c) Le vecteur \mathbf{AP} est perpendiculaire au plan (P) formé par les points A, B et C si ce vecteur est parallèle au produit vectoriel de deux vecteurs non colinéaires du plan (P) ; par exemple, \mathbf{AB} et \mathbf{BC} .

Les composantes du vecteur \mathbf{AP} sont $(1, 1, 0)$.

$$\text{D'après 1-c, } \mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} = (-8, -8, 0)$$

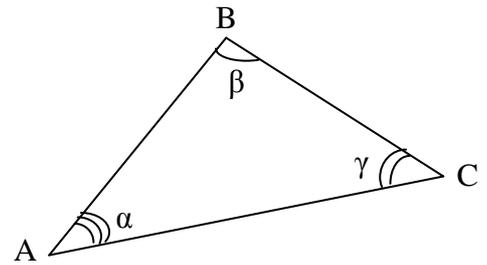
On peut alors remarquer que \mathbf{AP} est parallèle à $\mathbf{AB} \times \mathbf{BC}$ puisque $\mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = -8 \mathbf{AP}$

Exercice I-2

Soit ABC un triangle quelconque avec ses trois angles α , β et γ comme indiqué sur la figure ci-contre.

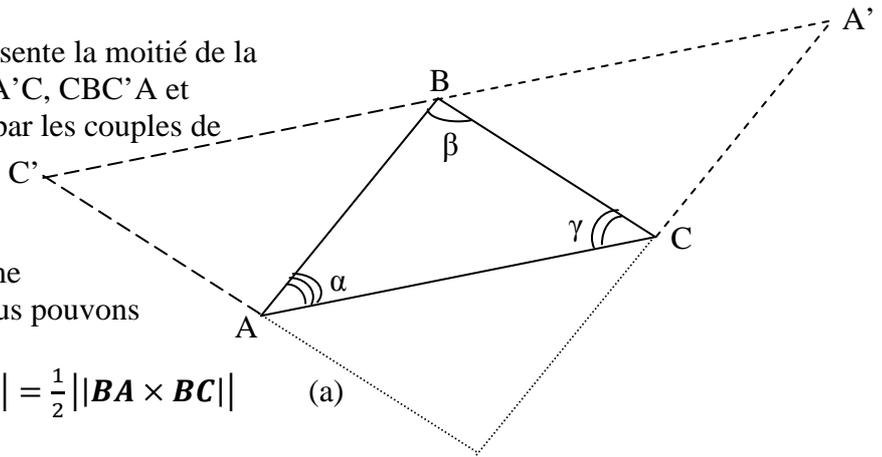
Démontrer la loi (des sinus) suivante :

$$\frac{\sin \alpha}{BC} = \frac{\sin \beta}{AC} = \frac{\sin \gamma}{AB}$$



Solution

La surface S du triangle ABC représente la moitié de la surface des parallélogrammes ABA'C, CBC'A et ABCB' engendrés respectivement par les couples de vecteurs $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})$, $(\mathbf{CA}, \mathbf{CB})$ et $(\mathbf{BA}, \mathbf{BC})$. Comme le module du produit vectoriel de deux vecteurs donne la surface du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs, nous pouvons écrire :



$$S = \frac{1}{2} \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{CA} \times \mathbf{CB}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{BA} \times \mathbf{BC}\| \quad (a)$$

et donc :

$$S = \frac{1}{2} (AB \ AC \ \sin \alpha) = \frac{1}{2} (AC \ BC \ \sin \gamma) = \frac{1}{2} (AB \ BC \ \sin \beta) \quad (b)$$

En divisant les trois derniers membres de la relation (b) par $\frac{1}{2} (AB \ AC \ BC)$, on obtient la loi des sinus :

$$\frac{\sin \alpha}{BC} = \frac{\sin \gamma}{AB} = \frac{\sin \beta}{AC}$$

Exercice I-3

1) Pour les fonctions réelles d'une seule variable réelle x suivantes, donner la dérivée puis la différentielle de f(x) :

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = \frac{x}{x^3+2}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $f(x) = \sin(2\pi x - \frac{\pi}{3})$

2) Pour les fonctions f à plusieurs variables suivantes, donner les dérivées partielles et la différentielle totale df de f :

a) $f(x, y, z) = 2xy - 3z^2 + 4y^2$

b) $f(x, y) = \frac{y}{x^2+2}$

c) $f(x, t) = \sin(2\pi x - \frac{t}{2})$

Solution

1) Pour une fonction à une seule variable x , la dérivée et la différentielle de f sont liées par :

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

a) $(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2, \frac{df}{dx} = 9x^2 - 4x - 1, df = (9x^2 - 4x - 1)dx$

b) $f(x) = \frac{x}{x^3+2}, \frac{df}{dx} = -\frac{x^3}{(x^3+2)^2}, df = -\frac{x^3}{(x^3+2)^2} dx$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \frac{df}{dx} = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, df = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} dx$

d) $(x) = \sin(2\pi x - \frac{\pi}{3}), \frac{df}{dx} = 2\pi \cos(2\pi x - \frac{\pi}{3}), df = \left[2\pi \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right)\right] dx$

2) a) $f(x, y, z) = 2xy - 3z^2 + 4y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8y, \frac{\partial f}{\partial z} = -6z$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz = 2y dx + (2x + 8y) dy - 6z dz$$

b) $f(x, y) = \frac{y}{x^2+2}, \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+2}$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = -\frac{2xy}{(x^2+2)^2} dx + \frac{1}{x^2+2} dy$$

c) $(x, t) = \sin(2\pi x - \frac{t}{2}), \frac{\partial f}{\partial x} = 2\pi \cos(2\pi x - \frac{t}{2}), \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cos(2\pi x - \frac{t}{2})$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) dt = \left[2\pi \cos\left(2\pi x - \frac{t}{2}\right)\right] dx - \left[\frac{1}{2} \cos\left(2\pi x - \frac{t}{2}\right)\right] dt$$

Exercice I-4

1) Déterminer les coordonnées polaires des points A et B dont les coordonnées cartésiennes à deux dimensions sont : A(2,1), B(-3,4).

2) Déterminer les coordonnées cylindriques et sphériques des points de coordonnées cartésiennes à trois dimensions : C(3,4,5), D(2,-3,1).

Solution

1) Les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées polaires (ρ, θ) sont : $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pour le point A : $x = 2, y = 1, \rho = \sqrt{5}, \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894 \Rightarrow \theta = 26,6^\circ$

Les coordonnées polaires de A sont donc $(\sqrt{5}; 26,6^\circ)$.

Pour le point B : $x = -3, y = 4, \rho = 5, \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{-3}{5} = -0,6 \Rightarrow \theta = 126,9^\circ$

Les coordonnées polaires de B sont donc $(5; 126,9^\circ)$.

2) Les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) sont : $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta, z = z$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pour le point C : $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $\rho = 5$, $\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \theta = 53,1^\circ$

Les coordonnées cylindriques de C sont donc $(5; 53,1^\circ; 5)$.

Pour le point D : $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$, $\rho = \sqrt{13}$, $\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,555 \Rightarrow \theta = 56,3^\circ$

Les coordonnées cylindriques de D sont donc $(\sqrt{13}; 56,3^\circ; 1)$.

Dans le cas du passage des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées sphériques (r, θ, φ) , on a : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $z = r \cos\theta$, $x = \rho \cos\varphi$, avec $\rho = r \sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$

Pour le point C : $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $r = 5\sqrt{2}$, $\rho = 5$, $\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \varphi = 53,1^\circ$.

Le point C a donc les coordonnées sphériques suivantes : $(5\sqrt{2}; 45^\circ; 53,1^\circ)$.

Dans le cas du point D, on a : $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$, $r = \sqrt{14}$, $\rho = \sqrt{13}$, $\cos\theta = \frac{z}{r} =$

$\frac{1}{\sqrt{14}} = 0,267 \Rightarrow \theta = 74,5^\circ$

$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,555 \Rightarrow \varphi = 56,3^\circ$

Les coordonnées sphériques du point D sont donc $(\sqrt{14}; 74,5^\circ; 56,3^\circ)$.

Exercice I-5

Ecrire les équations aux dimensions puis donner les unités dans le système MKSA des grandeurs y_0 , a , b et c qui vérifient l'équation suivante :

$$y = bx^2 + ax + y_0\sqrt{2 + ax/c}$$

Où $[x] = [L]$ et $[y] = [L][T]^{-1}$.

Solution

L'équation donnée est homogène ; c'est-à-dire que les membres à gauche et à droite de l'égalité doivent avoir les mêmes dimensions. D'autre part, les trois termes additionnés du membre à droite doivent avoir les mêmes dimensions. De plus, dû à la présence de 2 dans la racine carrée, la quantité ax/c additionnée à 2 est sans dimensions. On peut donc écrire :

$$[y] = \left[bx^2 + ax + y_0\sqrt{2 + \frac{ax}{c}} \right]$$

$$[y] = [bx^2]$$

$$[y] = [ax]$$

$$[y] = \left[y_0\sqrt{2 + \frac{ax}{c}} \right] \Rightarrow [y_0] = [y]$$

Le terme ax/c est sans dimensions donc $[y_0] = [y] = [L][T]^{-1}$ et l'unité de y_0 est le $m.s^{-1}$.

$$[y] = [ax] \Rightarrow [a] = \frac{[y]}{[x]} = \frac{[L][T]^{-1}}{[L]} = [T]^{-1}$$

L'unité de a est donc le s^{-1} .

$$[y] = [bx^2] \Rightarrow [b] = \frac{[y]}{[x^2]} = \frac{[L][T]^{-1}}{[L]^2} = [L]^{-1}[T]^{-1}$$

L'unité de mesure de b est donc le $m^{-1}.s^{-1}$.

Le terme ax/c est sans dimensions donc $[c] = [ax] = [y] = [L][T]^{-1}$

L'unité de c est le $m.s^{-1}$.

CHAPITRE II

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

II.1 Introduction

L'objectif de la cinématique du point matériel est l'étude du mouvement d'un objet dont :

- les dimensions sont négligées, l'objet est donc considéré comme un 'point'.
- le mouvement est particulier (de translation) de sorte que tous les points de l'objet effectuent le même mouvement.

II.2 Le mouvement, le référentiel et la trajectoire

Le mouvement est une notion relative. Un objet est en mouvement par rapport à un autre si sa position, mesurée par rapport au deuxième objet, change en fonction du temps. Pour décrire un mouvement, nous devons donc définir un système de référence par rapport auquel on analyse le mouvement. Un observateur muni d'une horloge est lié à un système de coordonnées pour constituer ce que l'on appelle un 'référentiel' (figure II.1).

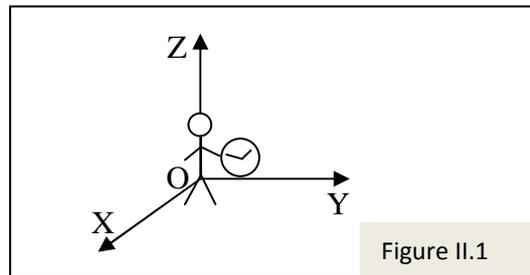


Figure II.1

Un point matériel M est en mouvement par rapport à un observateur situé en un point O si sa position M par rapport à O change en fonction du temps (figure II.2). Cette position est donnée par le vecteur \mathbf{OM} . Par exemple, à $t_0 = 0$ s le point M est en M_0 ; à $t_1 = 1$ s le point est en M_1 etc... L'observateur mesure donc des temps (t_0, t_1, t_2, \dots) et des vecteurs $\mathbf{OM}_0, \mathbf{OM}_1, \mathbf{OM}_2, \dots$

Le lieu géométrique de l'ensemble des positions successives de M est la trajectoire de M .

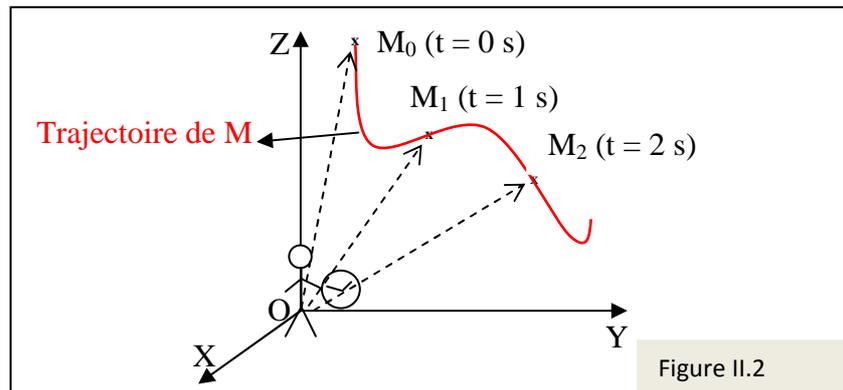


Figure II.2

II.3 Vecteurs position, vitesse et accélération

Lorsqu'un point M est en mouvement par rapport à un point de référence O , son vecteur position \mathbf{OM} change en fonction du temps t . Le vecteur position est aussi appelé rayon vecteur de M noté dans ce cas $\mathbf{r}(t)$.

La vitesse moyenne entre deux instants $t_1 = t$ et $t_2 = t + \Delta t$ est :

$$\mathbf{v}_{moy} = \frac{\mathbf{OM}_2 - \mathbf{OM}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{\Delta t} \quad (\text{II-1})$$

Le vecteur vitesse instantanée $\mathbf{v}(t)$ s'obtient à un instant t par :

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\text{II-2})$$

De la même façon, l'accélération moyenne dans un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ est :

$$\mathbf{a}_{moy} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (\text{II-3})$$

L'accélération instantanée est :

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad (\text{II-4})$$

Remarque

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow \mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt \quad (\text{II-5})$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt \quad (\text{II-6})$$

II.4 Le mouvement rectiligne

Un mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire est une ligne droite.

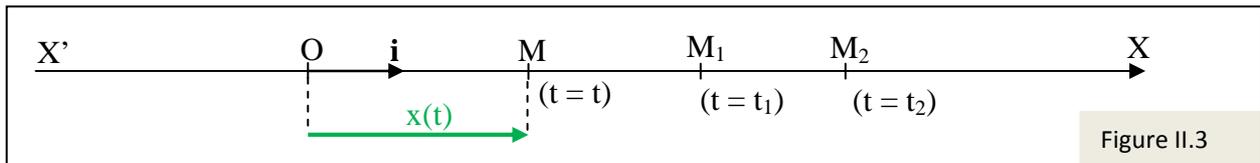


Figure II.3

$x(t) = \overline{OM}$ (en valeur algébrique) est l'abscisse du point M à l'instant t (figure II.3).

$$\mathbf{OM} = \overline{OM} \mathbf{i} = x(t) \mathbf{i} \quad (\text{II-7})$$

Le vecteur déplacement entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$\Delta \overline{OM} = \overline{OM}_2 - \overline{OM}_1 = \overline{M_1 M_2} = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1 \quad (\text{II-8})$$

Le déplacement $\overline{M_1 M_2}$ est indépendant du choix de l'origine O .

La vitesse moyenne entre t_1 et t_2 est :

$$v_{moy} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{II-9})$$

A $t = t_0$, la vitesse instantanée est :

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \quad (\text{II-10})$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt, \text{ où } x_0 = x(t_0) \quad (\text{II-11})$$

Les accélérations moyenne (entre t_1 et t_2) et instantanée (à t) sont :

$$a_{moy} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{II-12})$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad (\text{II-13})$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt, \text{ où } v_0 = v(t_0) \quad (\text{II-14})$$

Exemples de mouvements rectilignes

a) Mouvement rectiligne uniforme : Le vecteur vitesse est constant.

$$v(t) = \text{constante} = v_0 \Rightarrow a(t) = 0$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0), \quad x_0 = x(t = t_0) \tag{II-15}$$

b) Mouvement uniformément varié :

Dans ce cas, le vecteur accélération est constant.

$$a(t) = \text{constante} = a_0$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) \tag{II-16}$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2, \quad x_0 = x(t = t_0) \tag{II-17}$$

On peut vérifier aussi que :

$$v^2(t) - v_0^2 = 2 a_0 [x(t) - x_0] \tag{II-18}$$

Un mouvement est dit accéléré si le module de la vitesse augmente avec le temps. Le produit algébrique de la vitesse v par l'accélération a est dans ce cas positif : $v a > 0$.

De même, un mouvement est retardé si le module de la vitesse diminue avec le temps. On a dans ce cas : $v a < 0$.

La chute libre est un exemple de mouvement rectiligne uniformément varié avec $\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

Dans ce cas, si l'axe vertical (OX) est orienté vers le bas et si le mobile se trouve en O à $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 (orientée vers le bas) les expressions de la vitesse et de la position sont (voir figure II.4):

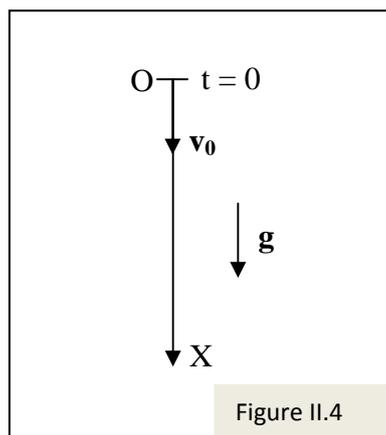
$$v(t) = v_0 + gt, \quad v_0 = v(t = 0) \tag{II-19}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t, \quad x_0 = x(t = 0) = 0 \tag{II-20}$$

Si $v_0 = 0$ (chute libre sans vitesse initiale) :

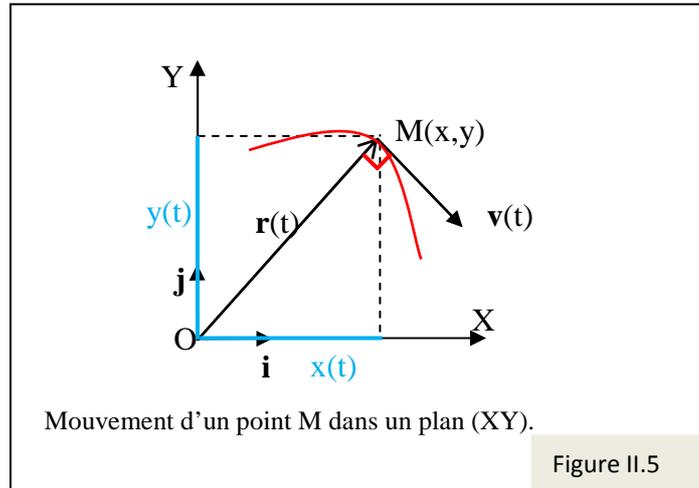
$$v(t) = gt \tag{II-21}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \tag{II-22}$$



II.5 Mouvement dans un plan

Le point matériel se déplace dans un plan (XY) à deux dimensions (figure II.5). Son vecteur position est donné par $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$. Le vecteur vitesse $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ est tangent à la trajectoire.



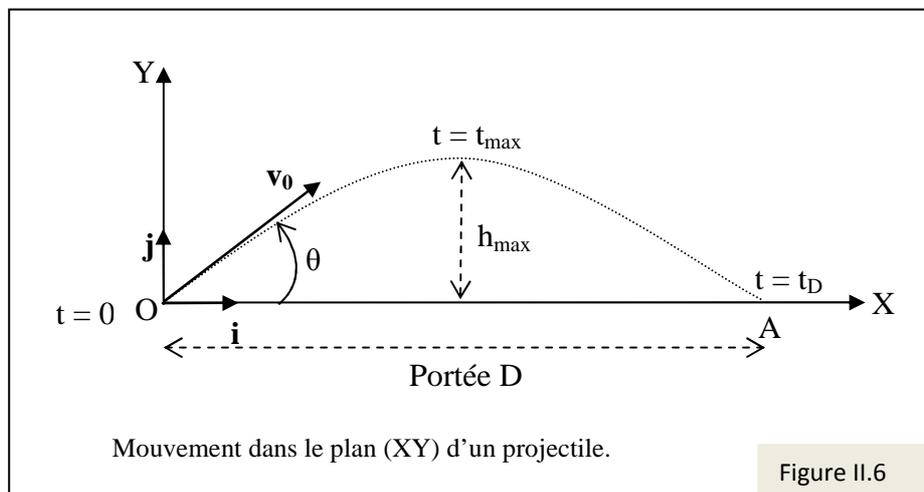
Dans un repère (O,X,Y) munie d'une base orthonormée (\mathbf{i}, \mathbf{j}), la position, la vitesse et l'accélération s'écrivent :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (\text{II-23})$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} \quad (\text{II-24})$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{dv_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\mathbf{j} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} \quad (\text{II-25})$$

Le mouvement d'un projectile est un exemple de mouvement à deux dimensions. L'objet est lancé en O à $t = 0$ avec une vitesse \mathbf{v}_0 faisant un angle θ avec l'horizontale (axe OX) comme indiqué sur la figure II.6.



$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} = v_0 \cos\theta \mathbf{i} + v_0 \sin\theta \mathbf{j} \quad (\text{II-26})$$

L'accélération de l'objet est celle de la pesanteur $\mathbf{a} = \mathbf{g}$:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = -g\mathbf{j} \quad (\text{Puisque l'axe vertical OY est orienté vers le haut}).$$

Nous avons donc :

$$a_x = 0 \quad \text{et} \quad a_y = -g \quad (\text{II-27})$$

Le mouvement peut ainsi être considéré comme une composition d'un mouvement uniforme (avec une accélération nulle) sur l'axe (OX) et d'un mouvement uniformément varié (accélération constante) sur l'axe (OY).

Sur l'axe (OX) :

$$\text{à } t = 0, v_{0x} = v_0 \cos \theta \text{ et } x(0) = x_0 = 0 \quad (\text{II-28})$$

$$a_x = 0 \Rightarrow v_x = \int a_x dt = \text{constante} = v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (\text{II-29})$$

$$x = \int v_x dt = \int v_0 \cos \theta dt = v_0 \cos \theta t + x_0 = v_0 \cos \theta t \quad (\text{II-30})$$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t \quad (\text{II-31})$$

Sur l'axe (OY) :

$$\text{à } t = 0, v_{0y} = v_0 \sin \theta \text{ et } y(0) = y_0 = 0 \quad (\text{II-32})$$

$$a_y = -g \Rightarrow v_y = \int -g dt = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \theta \quad (\text{II-33})$$

$$y = \int v_y dt = \int (-gt + v_0 \sin \theta) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0 \quad (\text{II-34})$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t \quad (\text{II-35})$$

L'équation (II-31) ci-dessus donne $t = x(t)/(v_0 \cos \theta)$ et en remplaçant cette dernière expression de t dans l'équation (II-35) nous obtenons l'équation de la trajectoire du projectile :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 + v_0 \sin \theta \frac{x}{v_0 \cos \theta} \text{ Soit}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + tg \theta x \quad (\text{II-36})$$

Cette expression est de la forme : $y(x) = \alpha x^2 + \beta x$ qui est l'équation d'une parabole.

Pour trouver la hauteur maximale h_{max} atteinte par le projectile, il suffit de constater qu'à cette position le vecteur vitesse est horizontal ($v_y = 0$).

$$-gt + v_0 \sin \theta = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} = t_{max}$$

$$h_{max} = y(t = t_{max}) = -\frac{1}{2}gt_{max}^2 + v_0 \sin \theta t_{max} = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 + v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} \quad (\text{II-37})$$

La portée D sur l'axe (OX) est par définition la distance entre le point de lancement O du projectile et son point de chute A (voir figure II.6).

Pour trouver la portée D , nous pouvons remarquer qu'à $t = t_D$ (temps de chute), on a :

$$y = 0 \text{ et } x = D$$

L'équation (II-35) donne alors :

$$-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin \theta = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = t_D \quad (\text{II-38})$$

En remplaçant cette valeur de t_D dans l'équation (II-31), on obtient :

$$D = x(t = t_D) = v_0 \cos \theta \left(\frac{2v_0 \sin \theta}{g} \right) = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin (2\theta)}{g} \quad (\text{II-39})$$

II.6 Mouvement curviligne dans l'espace à trois dimensions

Le mobile suit une trajectoire (C) à 3 dimensions. Son rayon vecteur s'écrit :

$$\mathbf{r} = \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{II-40})$$

où x, y, z dépendent du temps t .

Le vecteur déplacement entre t_1 et t_2 est :

$$\Delta \mathbf{OM} = \mathbf{OM}_2 - \mathbf{OM}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (\text{II-41})$$

Le vecteur vitesse $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ est tangent à la trajectoire :

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \text{ avec } : v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \text{ et}$$

$$x = \int v_x dt, y = \int v_y dt, z = \int v_z dt \quad (\text{II-42})$$

Le module de la vitesse v est :

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (\text{II-43})$$

Pour mesurer les longueurs et les déplacements le long de la courbe, on introduit l'abscisse curviligne $s(t)$. On choisit arbitrairement un point de référence M_0 , une unité de longueur et un sens positif sur la trajectoire (figure II.7).

$s(t) = \widehat{M_0 M} =$ longueur de l'arc $M_0 M$.

Lorsque le point M passe de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$, le déplacement curviligne s'écrit :

$$\Delta s = s_2 - s_1 = s(t_2) - s(t_1) = \widehat{M_0 M_2} - \widehat{M_0 M_1} = \widehat{M_1 M_2} \quad (\text{II-44})$$

La vitesse instantanée est par définition :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (\text{II-45})$$

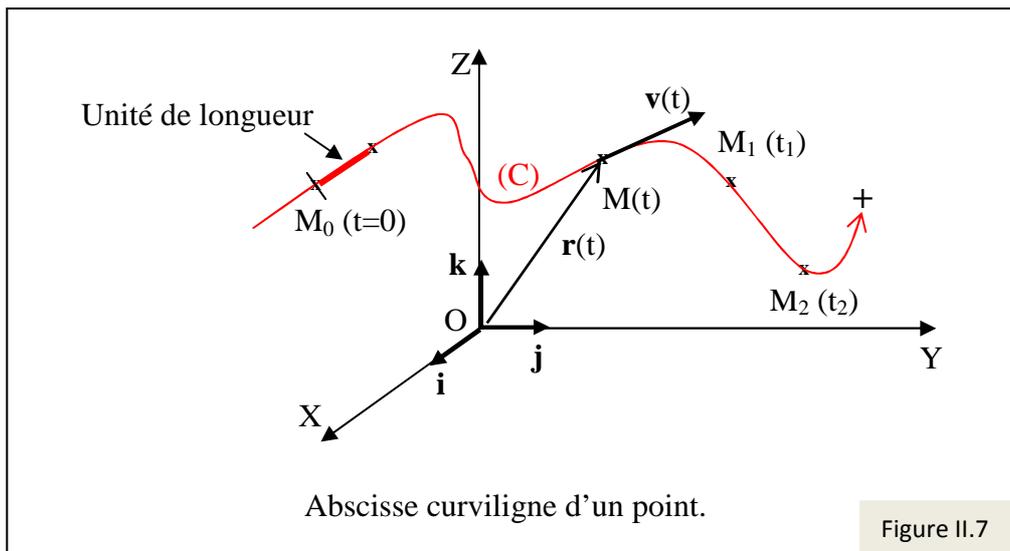


Figure II.7

$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{u}_t$ qui est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \text{ où } |v| = |\mathbf{v}|$$

On a donc :

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_t \quad (\text{II-46})$$

et

$$|\mathbf{v}| = + \frac{ds}{dt} \text{ si } \frac{ds}{dt} > 0 ; \text{ (la trajectoire est orientée dans le sens du mouvement).}$$

$$|\mathbf{v}| = - \frac{ds}{dt} \text{ si } \frac{ds}{dt} < 0 ; \text{ (la trajectoire est orientée dans le sens opposé à celui du mouvement).}$$

Dans ce qui suit, la trajectoire sera orientée dans le sens du mouvement et donc

$$\frac{ds}{dt} = v$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est alors donnée par la relation :

$$s(t) = \int v dt + \text{constante} = s_0 + \int_{t_0}^t v dt \quad \text{où } s(t_0) = s_0$$

D'autre part, l'accélération instantanée \mathbf{a} est par définition :

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Si la trajectoire est orientée dans le sens du mouvement, nous pouvons écrire :

$$\frac{ds}{dt} = v > 0 \quad \text{et } v = \|\mathbf{v}\| \Rightarrow \mathbf{v} = v \mathbf{u}_t \quad \text{et}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad (\text{II-47})$$

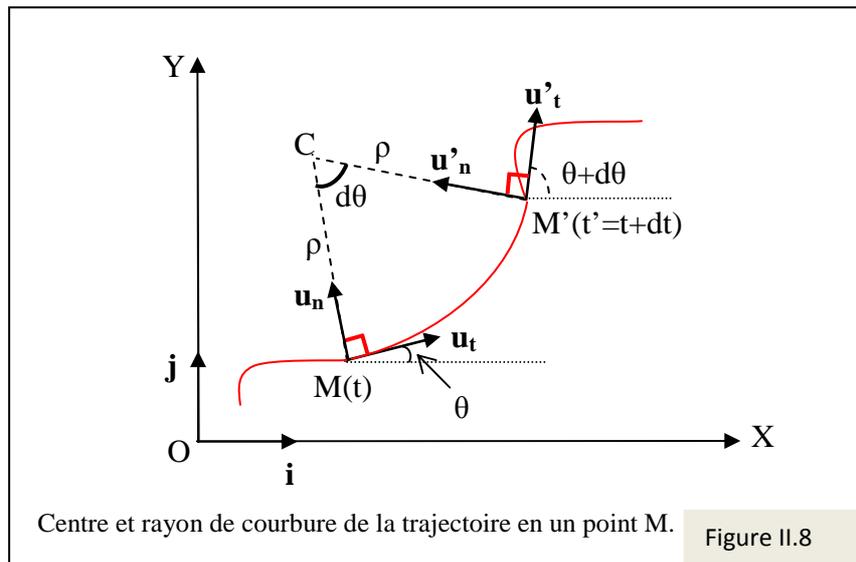
Dans cette dernière équation, le premier terme \mathbf{a}_t (parallèle à \mathbf{u}_t) est un vecteur tangent à la trajectoire. C'est l'accélération tangentielle. Elle mesure la variation du module de la vitesse au cours du temps. Lorsque le module de la vitesse est constant, ce terme s'annule.

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{u}_t \quad (\text{II-48})$$

où s est l'abscisse curviligne du mobile.

Le deuxième terme de l'équation (II-47) $\mathbf{a}_n = v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$ détermine la variation de la direction du vecteur vitesse au cours du temps. C'est l'accélération normale.

Considérons une trajectoire quelconque dans le plan (XY). Soient $M(t)$ et $M(t+dt)$ les positions du mobile aux instants t et $t+dt$. L'écart de temps dt est suffisamment petit pour que l'arc $\widehat{MM'}$ soit un cercle de centre C et de rayon ρ . ρ est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point M (figure II.8).



Soient θ et θ' les angles que font les vecteurs vitesses avec l'axe (OX) aux instants t et t' :

$$\theta = (\widehat{OX, \mathbf{u}_t})$$

$$\theta' = \theta + d\theta = (\widehat{OX, \mathbf{u}'_t})$$

$$\mathbf{u}_t = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_n \quad (\text{II-49})$$

où $\mathbf{u}_n = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à \mathbf{u}_t et se dirige vers C.

$$\widehat{MCM'} = d\theta = \theta' - \theta$$

La variation de l'abscisse curviligne entre t et $t'=t+dt$ s'écrit :

$$ds = \widehat{MM'} = s' - s = s(t + dt) - s(t) = \rho d\theta \Rightarrow \rho = \frac{ds}{d\theta}$$

D'autre part, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} = \dot{\theta}$

Nous obtenons finalement :

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{u}_n \tag{II-50}$$

Le vecteur accélération s'écrit alors :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{u}_n \text{ qui peut aussi s'écrire sous la forme :}$$

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n \tag{II-51}$$

où

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d||v||}{dt} \tag{II-52}$$

$$\text{et } a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{II-53}$$

$$\mathbf{a}_t \perp \mathbf{a}_n \Rightarrow a^2 = ||\mathbf{a}||^2 = a_n^2 + a_t^2 = \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \tag{II-54}$$

La base $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_n)$ est appelée base intrinsèque de Frenet.

Remarque

Les directions des vecteurs unitaires de la base polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ sont en général différentes de celles de la base de Frenet $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_n)$. L'ensemble $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ dépend de la nature de la trajectoire et de l'origine O choisie alors que $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_n)$ dépend uniquement du type de la trajectoire. On peut citer le cas particulier d'une trajectoire circulaire centrée en O où les directions de \mathbf{u}_t et \mathbf{u}_n coïncident respectivement avec celles de \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_ρ .

Cas particuliers

a) Mouvement rectiligne : la direction du vecteur vitesse est constante. L'accélération normale est donc constante et le rayon de courbure ρ de la trajectoire est infini.

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{0}, \quad \rho \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t \tag{II-55}$$

b) Mouvement circulaire : Le rayon de courbure ρ est constant et égal à R .

$$s(t) = R\theta(t), \quad \mathbf{v} = v\mathbf{u}_t = \frac{ds(t)}{dt} \mathbf{u}_t = R \frac{d\theta(t)}{dt} \mathbf{u}_t = R\dot{\theta}(t) \mathbf{u}_t$$

$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ est la vitesse angulaire mesurée en radians par seconde (rd/s).

$$v = ||\mathbf{v}|| = R\dot{\theta}(t) = R\omega(t) \text{ (si la trajectoire est orientée dans le sens du mouvement)}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_n = R\ddot{\theta}(t) \mathbf{u}_t + R(\dot{\theta}(t))^2 \mathbf{u}_n = R\ddot{\theta}(t) \mathbf{u}_t + R\omega^2(t) \mathbf{u}_n \text{ où}$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \frac{d\omega(t)}{dt} \text{ est l'accélération angulaire en rd/s}^2.$$

Pour un mouvement circulaire uniforme, le module de la vitesse et la vitesse angulaire sont constants ; l'accélération tangentielle est donc nulle :

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_n = R\omega^2 \mathbf{u}_n \tag{II-56}$$

II.7 Mouvement dans les systèmes de coordonnées particuliers

Dans ce qui suit, nous donnerons les expressions de la vitesse et de l'accélération dans les systèmes de coordonnées cylindriques, polaires et sphériques.

II.7.1 Coordonnées cylindriques $\rho(t), \theta(t), z(t)$

Le vecteur position s'écrit (paragraphe I.5) :

$$\mathbf{OM} = \rho(t)\mathbf{e}_\rho + z(t)\mathbf{e}_z \quad (\text{II-57})$$

Le vecteur vitesse \mathbf{v} est donné par :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt}\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{e}_z \quad (\text{II-58})$$

$$\text{Comme } \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt}\mathbf{e}_\theta = \dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta \text{ et } \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt}\mathbf{e}_\rho = -\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt}\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{e}_z = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z \quad (\text{II-59})$$

L'accélération instantanée est la dérivée par rapport au temps de la vitesse :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}(t)\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + \rho(t)\dot{\theta}(t)\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z = \\ &= \ddot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + \dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)\mathbf{e}_\rho + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{II-60})$$

Nous obtenons finalement :

$$\mathbf{a}(t) = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)]\mathbf{e}_\rho + [2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)]\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z \quad (\text{II-61})$$

Remarque

En coordonnées polaires $\rho(t), \theta(t)$ les expressions du vecteur position, de la vitesse et de l'accélération sont les mêmes avec la suppression de la troisième coordonnée $z(t)$ (et \mathbf{e}_z).

II.7.2 Coordonnées sphériques $r(t), \theta(t), \varphi(t)$

Le vecteur position s'écrit dans ce cas (paragraphe I.5) :

$$\mathbf{OM} = r(t)\mathbf{e}_r \quad (\text{II-62})$$

Les expressions des vecteurs de la base locale sphérique sont données au paragraphe I.5.

Leurs dérivées par rapport au temps sont :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}(t)\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}(t)\cos\theta\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(t)[\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta]$$

L'expression du vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\mathbf{e}_r + r(t)\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r}(t)\mathbf{e}_r + r(t)[\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}(t)\sin\theta\mathbf{e}_\varphi] = \dot{r}(t)\mathbf{e}_r + \\ &+ r(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + r(t)\dot{\varphi}(t)\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{II-63})$$

En dérivant par rapport au temps cette dernière expression, nous obtenons le vecteur accélération exprimé dans la base locale sphérique :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{r}(t)\mathbf{e}_r + \dot{r}(t)\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + r(t)\ddot{\theta}(t)\mathbf{e}_\theta + r(t)\dot{\theta}(t)\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \\ &\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)\sin\theta\mathbf{e}_\varphi + r(t)\ddot{\varphi}(t)\sin\theta\mathbf{e}_\varphi + r(t)\dot{\theta}(t)\dot{\varphi}(t)\cos\theta\mathbf{e}_\varphi + r(t)\dot{\varphi}(t)\sin\theta\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \\ &[\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t) - r(t)\dot{\varphi}^2(t)\sin^2\theta]\mathbf{e}_r + [2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) - r(t)\dot{\varphi}^2(t)\sin\theta\cos\theta + \\ &r(t)\ddot{\theta}(t)]\mathbf{e}_\theta + [2\dot{r}(t)\dot{\varphi}\sin\theta + r(t)\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r(t)\dot{\theta}(t)\dot{\varphi}(t)\cos\theta]\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{II-64})$$

II.8 Vecteur vitesse de rotation

Une rotation est représentée par son vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ qui est par définition :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{n} = \omega \mathbf{n} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n} \quad (\text{II-65})$$

où $|\mathbf{n}| = 1$ et θ est l'angle de rotation.

La direction de \mathbf{n} est celle de l'axe de rotation. Le sens de \mathbf{n} est donné par la règle de la vis ou de la main droite (figure II.9).

Si O est un point quelconque appartenant à l'axe de rotation (figure II.10), on a :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM} \quad (\text{II-66})$$

Pour démontrer cette dernière expression, il suffit d'exprimer le vecteur \mathbf{OM} dans la base locale des coordonnées cylindriques. L'axe (Z) coïncide dans ce cas avec l'axe de rotation ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$) :

$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_0 + \mathbf{M}_0\mathbf{M} = \mathbf{OM}_0 + \rho\mathbf{e}_\rho$ où ρ est une constante et le vecteur \mathbf{OM}_0 est aussi constant.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{OM}}{dt} &= \frac{d\mathbf{OM}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{M}_0\mathbf{M}}{dt} = \frac{d\mathbf{M}_0\mathbf{M}}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\rho) = \left(\frac{d\theta}{dt} \mathbf{n}\right) \times (\rho\mathbf{e}_\rho) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_0\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{OM} - \mathbf{OM}_0) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM}_0 = \mathbf{0}$ car ces deux vecteurs sont parallèles.

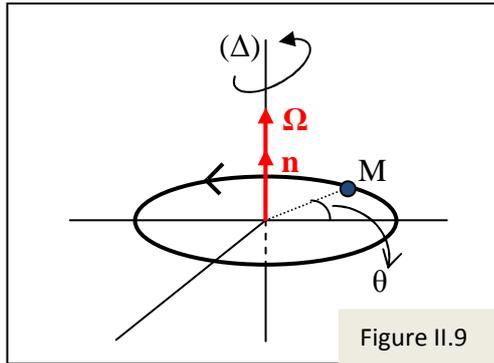


Figure II.9

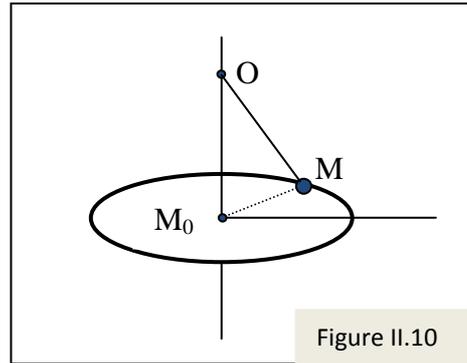


Figure II.10

En général, pour deux points A et B n'appartenant pas à l'axe de rotation, nous avons la relation :

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AB} \quad (\text{II-67})$$

Pour démontrer cette dernière équation à partir de l'équation (II-66), il suffit d'écrire :

$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$ où O est un point appartenant à l'axe de rotation.

II.9 Le mouvement relatif

Soient deux référentiels $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et $R'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$. Le référentiel (R) est considéré comme étant absolu (figure II.11). On supposera que le mouvement de (R') par rapport à (R) est connu et quelconque. Aussi, les coordonnées (x', y', z') du mobile M sont connues dans (R') . On cherchera alors la position, la vitesse et l'accélération dans le référentiel absolu (R) .

a) Relation entre les positions :

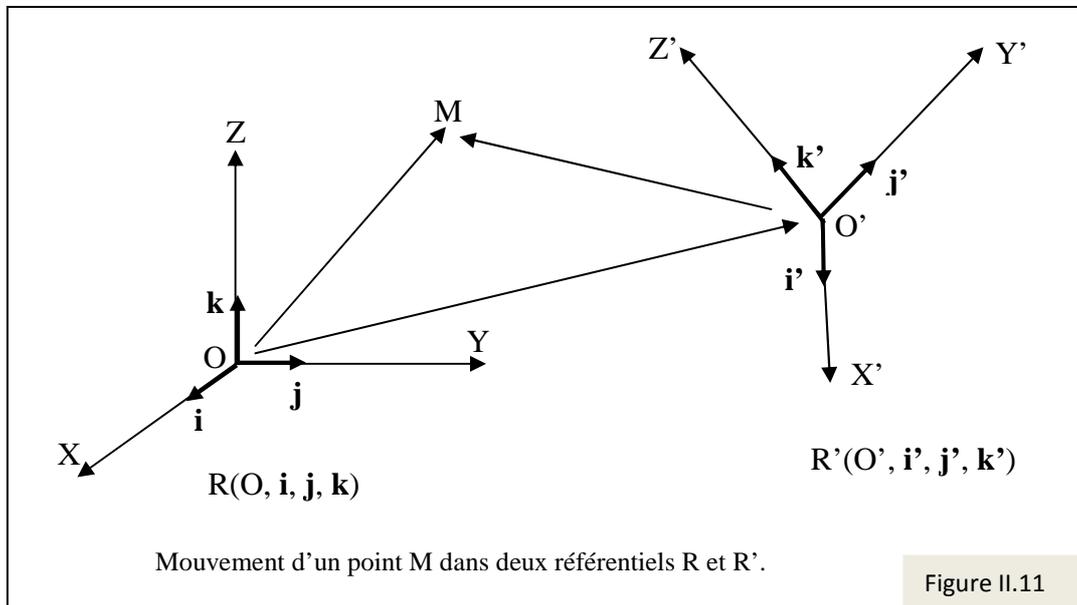
La position de M dans (R) est : $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Dans (R') , la position de M est : $\mathbf{O'M} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$

La relation entre ces deux vecteurs s'écrit :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M} \quad (\text{II-68})$$

Le vecteur $\mathbf{OO'}$ donne la position de O' par rapport à O .



b) Composition des vitesses :

En dérivant l'expression (II-68) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{d\mathbf{OO'}}{dt} + \frac{d\mathbf{O'M}}{dt} = \frac{d\mathbf{OO'}}{dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' = \left[\frac{d\mathbf{OO'}}{dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right] + \left[\frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \right] \quad (\text{II-69})$$

Dans cette dernière relation, le premier terme entre crochets représente la vitesse \mathbf{v}_e d'entraînement de (R') par rapport à (R) due à la translation du point O' par rapport à O et à la rotation des axes de (R') par rapport à ceux de (R) . Le second terme entre crochets donne la vitesse \mathbf{v}_r de M dans (R') ; c'est-à-dire la vitesse relative de M .

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{OO'}}{dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \quad (\text{II-70})$$

$$\mathbf{v}_r = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \quad (\text{II-71})$$

La vitesse absolue de M dans (R) s'écrit donc :

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (\text{II-72})$$

Cette relation représente la transformation des vitesses de Galilée.

Si les axes de (R') tournent à une vitesse $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport à ceux de (R), nous avons :

$$\frac{di'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{dj'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{dk'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}' \quad (\text{II-73})$$

En portant ces relations dans l'expression de \mathbf{v}_e , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} + x'(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}') = \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times [x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'] \\ &= \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{O}'M \end{aligned}$$

On retient donc que :

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{O}'M \quad (\text{II-74})$$

Remarque

$\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse (angulaire) de rotation des axes $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ de (R') par rapport à ceux de (R). Elle est différente de la vitesse de rotation du point O'. On peut, par exemple, citer le cas particulier où le point O' décrit un cercle autour de O mais les vecteurs unitaires $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ restent fixes.

c) Composition des accélérations :

En dérivant (par rapport au temps) l'expression (II-69), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} &= \frac{d^2\mathbf{OO}'}{dt^2} + x' \frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d^2\mathbf{j}'}{dt^2} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d^2\mathbf{k}'}{dt^2} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \\ \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}' + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} &= \left[\frac{d^2\mathbf{OO}'}{dt^2} + x' \frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\mathbf{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2\mathbf{k}'}{dt^2} \right] + 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \right. \\ \left. \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right] + \left[\frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}' \right] &= \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (\text{II-75})$$

où :

$$\mathbf{a}_e = \frac{d^2\mathbf{OO}'}{dt^2} + x' \frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\mathbf{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2\mathbf{k}'}{dt^2} \text{ est l'accélération d'entraînement,}$$

$$\mathbf{a}_c = 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right] \text{ est l'accélération de Coriolis et}$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}' \text{ est l'accélération relative.}$$

Si les axes de (R') tournent à une vitesse $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport à ceux de (R), nous avons en plus des relations (II-73) :

$$\frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}') = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{i}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathbf{j}'}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{j}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{j}'}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathbf{k}'}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{k}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

L'accélération d'entraînement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \frac{d^2 \mathbf{00}'}{dt^2} + x' \frac{d^2 \mathbf{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \mathbf{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \mathbf{k}'}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{00}'}{dt^2} + x' \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{i}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right] + y' \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{j}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \right] + z' \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{k}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right] \\ &= \frac{d^2 \mathbf{00}'}{dt^2} + x' \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{i}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}') \right] + y' \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{j}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}') \right] + z' \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{k}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}') \right] \\ &= \frac{d^2 \mathbf{00}'}{dt^2} + \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times (x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}') + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}')) \right] \\ &= \frac{d^2 \mathbf{00}'}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{O'M}) \end{aligned} \quad (\text{II-76})$$

L'accélération de Coriolis s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_c &= 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right] = 2 \left[\frac{dx'}{dt} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}' \right] = 2 \left[\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \right) \right] \\ &= 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r \end{aligned} \quad (\text{II-77})$$

Exemple

Un jour sans vent, la pluie vue du wagon d'un train roulant à $v_e = 72 \text{ km/h}$ paraît inclinée d'un angle $\theta = 50^\circ$ par rapport à la verticale.

- 1) a) Faire un schéma des vitesses.
- b) Déterminer la vitesse de chute des gouttes de pluie v_a par rapport au sol.
- c) En déduire la vitesse de chute des gouttes de pluie v_r par rapport au wagon.
- 2) Que devient la vitesse des gouttes de pluie par rapport au wagon lorsque le train double sa vitesse ?

Solution

La figure II.12 donne les directions et sens des différentes vitesses. D'après ce schéma,

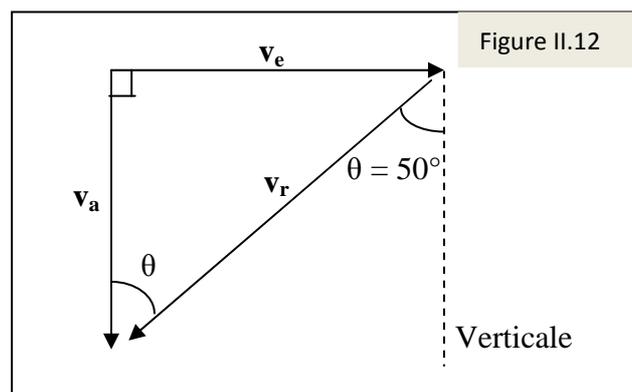
$$\tan \theta = \frac{v_e}{v_a} \Rightarrow v_a = \frac{v_e}{\tan \theta} = \frac{72}{\tan 50^\circ} = 60,4 \text{ km/h}$$

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2} = 94 \text{ km/h}$$

$$v'_e = 2v_e = 144 \text{ km/h}$$

$$v'_r = \sqrt{v_a^2 + v'_e{}^2} = 156,1 \text{ km/h}$$

$$\sin \theta' = \frac{v'_e}{v'_r} = \frac{144}{156,1} = 0,922 \quad , \quad \theta' = 67,2^\circ$$



II.10 Mouvement d'un satellite artificiel autour de la terre

On considère un satellite effectuant un mouvement circulaire uniforme autour de la terre à une altitude h (hauteur par rapport au sol). Son orbite de rayon $r = h + R$ est située dans un plan perpendiculaire au plan équatorial (figure II.13). Une telle orbite s'appelle 'orbite polaire'. La terre est supposée être une sphère de rayon R .

Nous définissons deux référentiels ayant comme origine commune le centre O de la terre: Le référentiel géocentrique $G(O, X, Y, Z)$ considéré comme 'absolu' avec des axes dirigés vers des étoiles lointaines et le référentiel terrestre $T(O, X', Y', Z')$ considéré comme 'relatif' (figure II.14). Les axes OX' et OY' sont liés à la terre et tournent donc comme la terre (de l'ouest vers l'est) autour de l'axe OZ (identique à OZ' orienté dans le sens sud-nord).

Dans le référentiel terrestre (T), la position d'un point M sur la surface de la terre (ou sur une autre sphère centrée en O) est repérée par sa longitude λ' et sa latitude β' (figure II.15). La longitude est par définition l'angle entre la projection de M dans le plan $(X'Y')$ et l'axe OX' . L'angle entre le vecteur OM et sa projection dans le plan $(X'Y')$ représente la latitude de M . L'axe OX' passe par le point P qui résulte de l'intersection du méridien de Greenwich ($\lambda' = 0$) et de l'équateur ($\beta' = 0$). La longitude et la latitude de P sont nulles. Sur la surface de la terre, le point P est situé dans l'océan atlantique au sud des côtes du Ghana. De même, l'axe OY' passe par le point Q de longitude égale à $\pi/2$ et de latitude nulle. Sur la surface de la terre, le point Q est situé dans l'océan indien à l'ouest des côtes de la Malaisie.

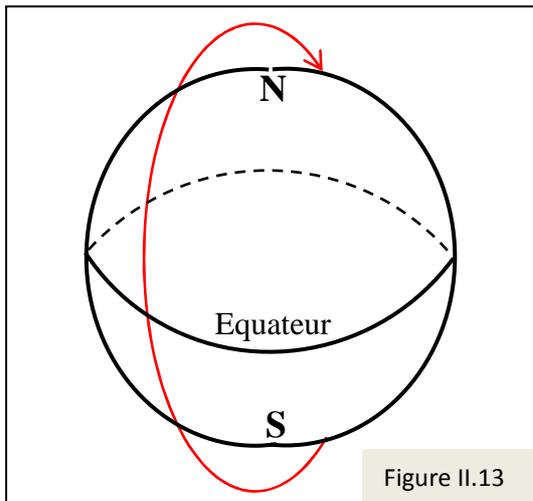


Figure II.13

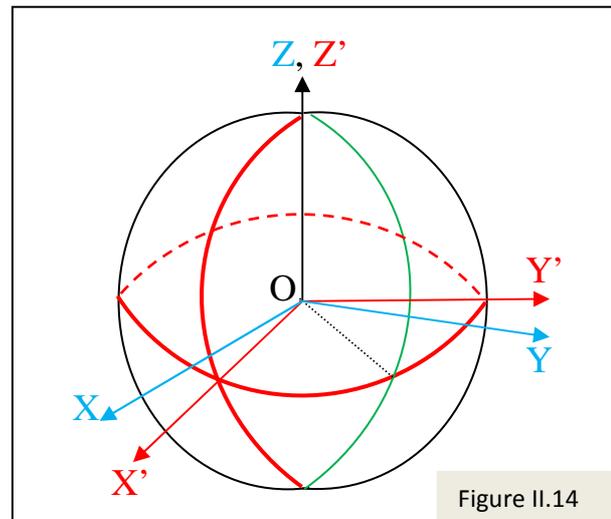


Figure II.14

Dans le référentiel géocentrique (G), la longitude et la latitude de M sont respectivement données par λ et β . Si à l'instant initial $t = 0$, les axes de (G) coïncident avec ceux de (T) nous pouvons écrire à un instant t quelconque :

$$\lambda = \lambda' + \Omega t \tag{II-78}$$

$$\beta = \beta' \tag{II-79}$$

Où λ' et β' sont la longitude et la latitude de M dans le référentiel (T) et Ω est la vitesse angulaire de rotation de la terre dans le référentiel (G).

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{k} \tag{II-80}$$

où \mathbf{k} est le vecteur unitaire porté par l'axe OZ .

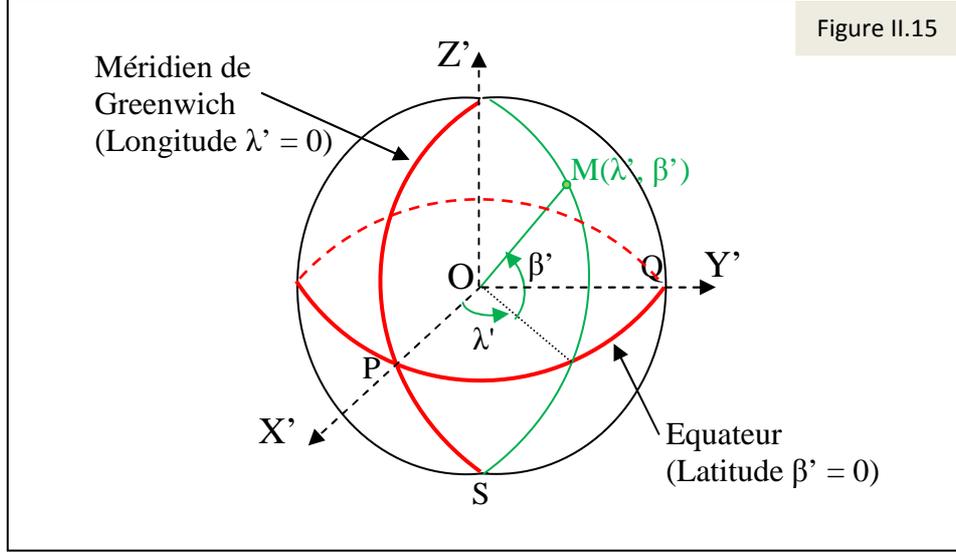


Figure II.15

Revenons maintenant au mouvement du satellite. Dans le référentiel géocentrique (G), le mouvement du satellite est circulaire. La trajectoire est donc un cercle de rayon $R + h$. Ce cercle est situé dans le plan (XZ). Si à l'instant initial $t = 0$, le satellite passe (dans le sens sud-nord) au dessus du point P défini précédemment, nous pouvons écrire la longitude et la latitude du satellite à un instant quelconque t dans le référentiel (G):

$$\lambda = 0 \quad (\text{II-81})$$

$$\beta = \omega t \quad (\text{II-82})$$

Où ω est la vitesse angulaire de rotation du satellite dans le référentiel (G).

Avec le sens de rotation indiqué sur la figure II.13, le vecteur de rotation du satellite s'écrit :

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{j} \quad (\text{II-83})$$

où \mathbf{j} est le vecteur unitaire porté par l'axe OY.

La position 'absolue' \mathbf{OM} du satellite s'écrit :

$$\mathbf{OM} = (R + h)[\cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\omega t) \mathbf{k}] \quad (\text{II-84})$$

Le vecteur vitesse 'absolu' du satellite (perpendiculaire à la trajectoire) est :

$$\mathbf{v} = \omega(R + h)[- \sin(\omega t) \mathbf{i} + \cos(\omega t) \mathbf{k}] \quad (\text{II-85})$$

Dans le référentiel terrestre (T), la position 'relative' du satellite s'écrit :

$$\mathbf{OM} = (R + h)[\cos\beta' \cos\lambda' \mathbf{i}' + \cos\beta' \sin\lambda' \mathbf{j}' + \sin\beta' \mathbf{k}'] = (R + h)[\cos(\omega t) \cos(-\Omega t) \mathbf{i}' + \cos(\omega t) \sin(-\Omega t) \mathbf{j}' + \sin(\omega t) \mathbf{k}'] = x'(t) \mathbf{i}' + y'(t) \mathbf{j}' + z'(t) \mathbf{k}' \quad (\text{II-86})$$

Où $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes OX', OY', OZ' et :

$$x'(t) = (R + h) \cos(\omega t) \cos(\Omega t) \quad (\text{II-87})$$

$$y'(t) = -(R + h) \cos(\omega t) \sin(\Omega t) \quad (\text{II-88})$$

$$z'(t) = (R + h) \sin(\omega t) \quad (\text{II-89})$$

D'après la relation (II-71), la vitesse relative du satellite est :

$$\mathbf{v}_r = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' = (R + h)[(-\omega \sin(\omega t) \cos(\Omega t) - \Omega \cos(\omega t) \sin(\Omega t)) \mathbf{i}' + (\omega \sin(\omega t) \sin(\Omega t) - \Omega \cos(\omega t) \cos(\Omega t)) \mathbf{j}' + \omega \cos(\omega t) \mathbf{k}'] \quad (\text{II-90})$$

La vitesse d'entraînement qui représente la vitesse du référentiel (T) par rapport à (G) est d'après la relation (II-74) :

$$\mathbf{v}_e = x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt} = \Omega(R + h)[\cos(\omega t)\cos(\Omega t)\mathbf{j}' + \cos(\omega t)\sin(\Omega t)\mathbf{i}'] \quad (\text{II-91})$$

En pratique, pour un satellite d'observation, ce qui nous intéresse le plus est la projection de la position du satellite sur la surface de la terre ; c'est-à-dire sa longitude et sa latitude dans le référentiel terrestre. On peut par exemple se poser les questions suivantes : quels sont les lieux géométriques de la projection du satellite sur le globe terrestre ? A quel(s) instant(s) le satellite passe juste au dessus de notre ville et à quand le prochain passage ? Notons d'abord qu'au moment de ce passage, la longitude et la latitude du satellite sont identiques à celles de notre ville.

Les équations (II-78), (II-79), (II-81) et (II-82) nous permettent d'écrire en fonction du temps t la longitude et la latitude du satellite dans le référentiel (T) :

$$\lambda' = -\Omega t \quad \text{et} \quad \beta' = \omega t \quad (\text{II-92})$$

L'équation de la trajectoire en 'coordonnées géographiques' (λ', β') s'obtient en éliminant t dans les équations (II-92) :

$$\lambda' = -\frac{\Omega}{\omega}\beta' \quad (\text{II-93})$$

Portée sur le globe terrestre, cette trajectoire est représentée sur la figure II.16 pour un tour du satellite autour de la terre à partir d'un point situé au dessus de notre pays. Notons que sur cette figure, la terre est projetée dans le plan et que les pôles sont en réalité des points.

Pour que le satellite soit juste au dessus d'un lieu de coordonnées géographiques $M_0(\lambda_0, \beta_0)$, il doit exister un (ou plusieurs) temps t_0 pour le(s)quel(s) les équations suivantes sont vérifiées (voir les équations (II-92)):

$$\beta_0 = \omega t_0 + 2n\pi \quad \text{ou bien} \quad \pi - \beta_0 = \omega t_0 + 2p\pi \quad \text{et} \quad \lambda_0 = -\Omega t_0 + m\pi \quad (\text{II-94})$$

Où n , p et m sont des entiers positifs ou négatifs et les coordonnées géographiques sont exprimées en radians.



Figure II.16
Impact approximatif sur le sol d'un satellite à défilement et à orbite polaire (figure adaptée d'une image libre de <https://pixabay.com/en/globe-world-map-earth-32299/>)

On se place dans le référentiel géocentrique (G). Comme illustré sur la figure II.17 et en raison de la rotation de la terre, un lieu géographique $M_0(\lambda_0, \beta_0)$ à sa surface décrit un cercle de rayon $R \cos\beta_0$ (R est le rayon de la terre). Ce cercle (en bleu) est situé dans un plan parallèle au plan (XY) et 'rencontre' la trajectoire du satellite (en rouge) qui se trouve dans le plan (XZ). Sur la figure (II.17), on peut distinguer deux cas de 'rencontre' du satellite avec le lieu géographique considéré. Dans le premier cas (1), le sens de passage du satellite est sud-nord

et la longitude du satellite est identique (à 2π près) à celle du lieu. Un deuxième passage (2) du satellite au dessus du lieu dans le sens nord-sud est possible lorsque la latitude du satellite est égale à $\pi - \beta_0$.

Ainsi, il suffit de chercher, par exemple, à l'aide d'un calcul numérique les temps t_0 pour lesquels les expressions suivantes sont des entiers positifs ou négatifs :

$$\frac{\beta_0 - \omega t_0}{2\pi} = n \text{ ou bien } \frac{\pi - \beta_0 - \omega t_0}{2\pi} = p \text{ et } (\lambda_0 + \Omega t_0)/\pi = m \quad (\text{II-95})$$

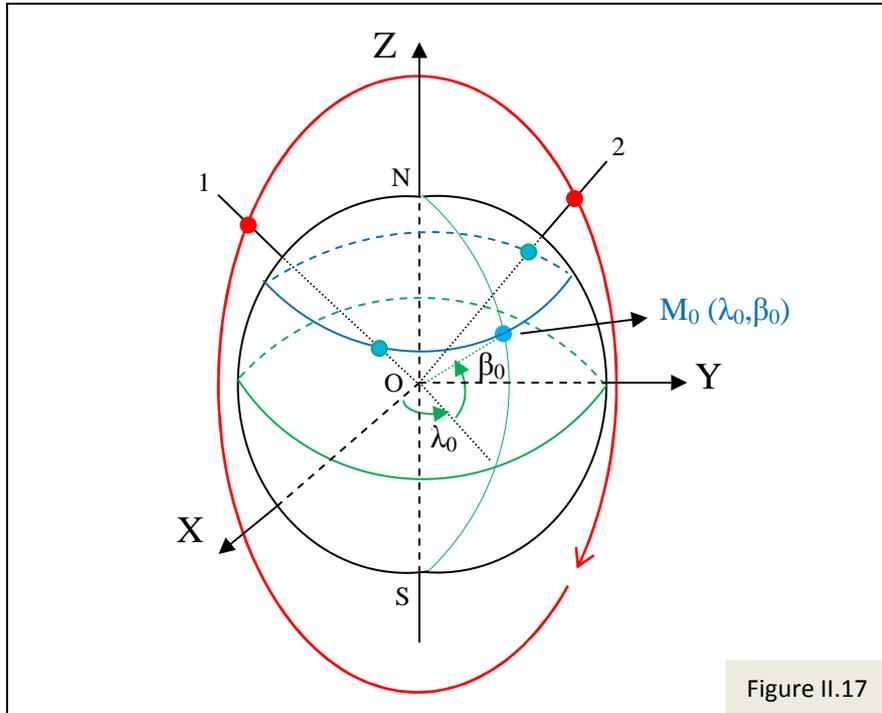


Figure II.17

Exemple d'application

Supposons que le mercredi 25 juillet 2018 à 13h 15min 30s un satellite 'obs1' est passé dans le sens sud-nord juste au dessus de la ville de Béjaia qui a comme coordonnées géographiques exprimées en radians (0,0887382, 0,641511). Le satellite 'obs1' décrit une orbite perpendiculaire au plan équatorial et effectue un tour complet autour de la terre en 5945s. Trouver la date et l'heure du prochain passage au dessus de la ville de Béjaia (ou de ses environs).

Solution

Nous prenons comme origine de temps ($t = 0$) le mercredi 25 juillet 2018 à 13h 15min 30s. De plus, à cet instant initial, l'axe OX coïncide avec l'axe OX' ayant comme longitude celle de la ville de Béjaia. Bien entendu, à l'instant $t = 0$, Béjaia et le satellite ont les mêmes coordonnées géographiques. Pour des raisons de commodité, nous exprimerons le temps en heures et les vitesses de rotation en radians par heure.

La vitesse angulaire de rotation de la terre autour d'elle-même est :

$$\Omega = \frac{2\pi}{24h} = 0,2618 \text{ rd/h} \quad (\text{II-96})$$

La vitesse angulaire de rotation du satellite autour de la terre est :

$$\omega = \frac{2\pi}{5945s} = 3,8048 \text{ rd/h} \quad (\text{II-97})$$

Nous pouvons remarquer (figure II.17) qu'avec la rotation de la terre, la ville de Béjaia coupe (à $t = t_0$) la trajectoire circulaire (dans le référentiel géocentrique) du satellite en deux points de latitudes β_B et $\pi - \beta_B$ où β_B est la latitude de Béjaia. Ces deux points correspondent respectivement à un nombre entier ou demi entier de tours effectués par la terre autour d'elle c'est-à-dire :

$$\Omega t_0 = \pi m \quad (\text{II-98})$$

Où m est un entier.

Pour que Béjaia 'rencontre' le satellite, il faut que ce dernier ait comme latitude β_B ou $\pi - \beta_B$ c'est-à-dire :

$$\omega t_0 = 2\pi n \text{ ou bien } \omega t_0 = \pi - \beta_B + 2\pi p \quad (\text{II-99})$$

Où n et p sont des entiers et β_B la latitude de Béjaia.

En portant les valeurs numériques des vitesses de rotation dans les équations (II-98) (II-99), on obtient respectivement:

$$t_0 = 11,999972 m$$

$$t_0 = 1,6513839 n \text{ ou bien } t_0 = 0,6570862 + 1,6513839 p$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs calculées de t_0 pour m , n et p allant de 0 à 40. Nous pouvons constater qu'en plus de l'instant initial (0), le satellite passe au dessus des environs de la ville de Béjaia après environ 48 heures (vert) et 60 heures (jaune).

Les valeurs t_0 de la terre sont proches (à 0,11 heures près) des t_0 du satellite. Comme la vitesse angulaire de rotation du satellite est nettement plus grande que celle de la terre (14,5 fois), nous prenons les valeurs de t_0 des colonnes de n ou p .

Ainsi, après 47,8901331 heures (vendredi 27 juillet 2018 à 13h 08min 55s) le satellite a effectué exactement 29 tours autour de la terre et aura donc exactement la latitude de la ville de Béjaia. Durant ce temps, la terre a effectué 'un peu moins' de deux tours autour d'elle-même. La longitude du satellite n'est donc pas égale à celle de Béjaia. La différence de longitude en radians est :

$$(47,999888 - 47,8901331).0,2618 = 0,0287338 \text{ rd}$$

Le satellite passe donc (dans le sens sud-nord comme à $t = 0$) à l'est de la ville de Béjaia puisque le sens de rotation de la terre est ouest-est. Les coordonnées géographiques exactes du lieu au dessus duquel le satellite passe sont (0,117472, 0,641511).

De la même façon, selon le même tableau le satellite aura une deuxième fois la même latitude que la ville de Béjaia après 36 tours et $143,3^\circ$ ($\pi - \beta_B$) autour de la terre avec une durée de 60,1069066 heures. Durant ce temps, la terre aura effectué 'un peu plus' que 2,5 tours (demi entier) autour d'elle-même. La longitude du satellite est donc cette fois-ci inférieure à celle de Béjaia. Un simple calcul effectué comme précédemment donne une différence de longitude de 0,0280246 rd. Le satellite passe donc cette fois-ci dans le sens nord-sud à l'ouest de la ville de Béjaia le samedi 28 juillet 2018 à 1h 21min 55s. Les coordonnées géographiques exactes du lieu au dessus duquel le satellite passe une seonde fois sont (0,0607136, 0,641511).

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

n	t ₀	p	t ₀	m	t ₀
0	0	0	0,6570862	0	0
1	1,6513839	1	2,3084701	1	11,999972
2	3,3027678	2	3,959854	2	23,999944
3	4,9541517	3	5,6112379	3	35,999916
4	6,6055356	4	7,2626218	4	47,999888
5	8,2569195	5	8,9140057	5	59,99986
6	9,9083034	6	10,5653896	6	71,999832
7	11,5596873	7	12,2167735	7	83,999804
8	13,2110712	8	13,8681574	8	95,999776
9	14,8624551	9	15,5195413	9	107,999748
10	16,513839	10	17,1709252	10	119,99972
11	18,1652229	11	18,8223091	11	131,999692
12	19,8166068	12	20,473693	12	143,999664
13	21,4679907	13	22,1250769	13	155,999636
14	23,1193746	14	23,7764608	14	167,999608
15	24,7707585	15	25,4278447	15	179,99958
16	26,4221424	16	27,0792286	16	191,999552
17	28,0735263	17	28,7306125	17	203,999524
18	29,7249102	18	30,3819964	18	215,999496
19	31,3762941	19	32,0333803	19	227,999468
20	33,027678	20	33,6847642	20	239,99944
21	34,6790619	21	35,3361481	21	251,999412
22	36,3304458	22	36,987532	22	263,999384
23	37,9818297	23	38,6389159	23	275,999356
24	39,6332136	24	40,2902998	24	287,999328
25	41,2845975	25	41,9416837	25	299,9993
26	42,9359814	26	43,5930676	26	311,999272
27	44,5873653	27	45,2444515	27	323,999244
28	46,2387492	28	46,8958354	28	335,999216
29	47,8901331	29	48,5472193	29	347,999188
30	49,541517	30	50,1986032	30	359,99916
31	51,1929009	31	51,8499871	31	371,999132
32	52,8442848	32	53,501371	32	383,999104
33	54,4956687	33	55,1527549	33	395,999076
34	56,1470526	34	56,8041388	34	407,999048
35	57,7984365	35	58,4555227	35	419,99902
36	59,4498204	36	60,1069066	36	431,998992
37	61,1012043	37	61,7582905	37	443,998964
38	62,7525882	38	63,4096744	38	455,998936
39	64,4039721	39	65,0610583	39	467,998908
40	66,055356	40	66,7124422	40	479,99888

Le lecteur intéressé est invité à faire les calculs pour n , p et m allant par exemple de 0 à 1000 et retrouver éventuellement des temps de passage du satellite juste au dessus de Béjaia. Il est conseillé d'utiliser un programme informatique pour les calculs et pour la recherche des t_0 identiques (ou très proches) dans les différentes colonnes du tableau obtenu.

Remarque importante

Dans la discussion ci-dessus, les opérations sont effectuées sur la base des valeurs numériques de t_0 qui sont données à sept chiffres après la virgule. Le nombre de chiffres significatifs dépend de la précision sur les vitesses angulaires Ω et ω . Ces dernières sont données à 0.0001 près. Le nombre de chiffres significatifs dans les valeurs de t_0 est au plus 4.

EXERCICES CORRIGÉS

Exercice II-1

Donner l'équation et la nature de la trajectoire correspondant aux lois horaires du mouvement (dans le plan XY) pour chacun des cas suivants :

1) En coordonnées cartésiennes :

a) $x(t) = t + 1$, $y(t) = -2t - 3$

b) $x(t) = t - 1$, $y(t) = t^2 + 1$

c) $x(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 1$, $y(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2$

d) $x(t) = 5 \cos(t)$, $y(t) = 3 \sin(t)$

2) En coordonnées polaires :

a) $(t) = at$, $\theta(t) = \omega t$ où a et ω sont des constantes positives.

b) $\rho(t) = 2 - e^{-t}$, $\theta(t) = -t + \pi/4$

Solution

1) L'équation de la trajectoire est la relation qui lie les coordonnées y et x .

a) $x(t) = t + 1 \Rightarrow t = x - 1$

En portant cette dernière expression de t dans l'expression de $y(t)$, on obtient :

$y = -2(x - 1) - 3 = -2x - 1$

$y = -2x - 1$ est l'équation d'une droite de pente -2 et qui passe par le point (0,-1).

b) En procédant de la même façon qu'en a), on obtient l'équation suivante :

$y = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$

La trajectoire est une parabole.

c) $x(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right) = (x + 1)/2$

$y(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \Rightarrow \cos\left(\frac{t}{2}\right) = (y - 2)/2$

Pour trouver la relation entre y et x , on utilise l'équation $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1$, soit :

$\left[\frac{(x+1)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(y-2)}{2}\right]^2 = 1$ qui s'écrit aussi sous la forme suivante :

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

La trajectoire est un cercle de centre C(-1,2) et de rayon 2.

d) On procède de la même façon qu'en c).

$x(t) = 5 \cos(t) \Rightarrow \cos(t) = x/5$

$y(t) = 3 \sin(t) \Rightarrow \sin(t) = y/3$

En utilisant la relation $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, on obtient l'équation suivante :

$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ qui est l'équation d'une ellipse de grand axe 5 (OX) et de petit axe 3 (OY).

2) En coordonnées polaires, l'équation de la trajectoire est la relation entre ρ et θ .

a) $(t) = at$, $\theta(t) = \omega t$

$\theta(t) = \omega t \Rightarrow t = \theta/\omega$

En remplaçant cette dernière expression de t dans l'expression de ρ , on obtient :

$\rho = a\theta/\omega$

La trajectoire est une spirale d'Archimède (ρ varie de 0 à l'infini) représentée sur la figure A.

b) $\rho(t) = 2 - e^{-t}$, $\theta(t) = -t + \pi/4$

En procédant de la même manière qu'en a), l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$\rho = 2 - e^{\theta - \pi/4}$$

La trajectoire est une spirale exponentielle (ρ entre 1 et 2) qui converge vers le cercle centré à l'origine et de rayon 2 (figure B).

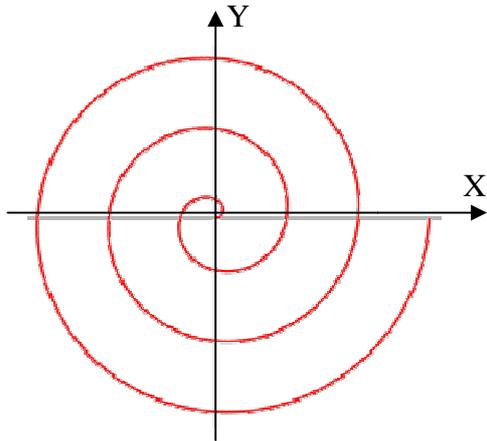


Figure A

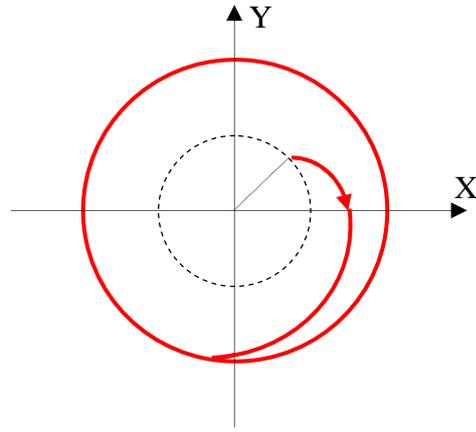


Figure B

Exercice II-2

Dans un plan muni d'un système d'axes OXY, les coordonnées d'un point sont données par les relations: $x(t) = b[\omega t - \sin(\omega t)]$, $y(t) = b[1 - \cos(\omega t)]$

où b et ω sont des constantes positives.

- 1) Déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
- 2) Déterminer les valeurs absolues des composantes tangentielle et normale de l'accélération et déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Solution

1) $x(t)$ et $y(t)$ sont les composantes du vecteur position.

Les composantes (v_x, v_y) du vecteur vitesse \mathbf{v} sont :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\omega - b\omega \cos(\omega t) = b\omega[1 - \cos(\omega t)]$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b\omega \sin(\omega t)$$

De même, les composantes (a_x, a_y) du vecteur accélération \mathbf{a} sont :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = b\omega^2 \sin(\omega t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = b\omega^2 \cos(\omega t)$$

2) Le module de la vitesse est :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| = v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b^2\omega^2[1 - \cos(\omega t)]^2 + b^2\omega^2\sin^2(\omega t)} = b\omega\sqrt{2[1 - \cos(\omega t)]} \\ &= 2b\omega\left|\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

La valeur absolue de l'accélération tangentielle est :

$$|a_T| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = b\omega^2\left|\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right|$$

De même, le module de l'accélération est :

$$\|\mathbf{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{b^2\omega^4\sin^2(\omega t) + b^2\omega^4\cos^2(\omega t)} = b\omega^2$$

L'accélération normale (en valeur absolue) est :

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{b^2\omega^4 - b^2\omega^4\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} = b\omega^2\left|\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right|$$

On peut déduire alors le rayon de courbure R de la trajectoire :

$$R = \frac{v^2}{a_N} = 4b\left|\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right|$$

Exercice II-3

Un point matériel M, se déplaçant dans un plan, est repéré par ses coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ telles que :

$$\rho(t) = r_0(1 + \cos(\omega t)), \quad \theta(t) = \omega t \quad \text{où } r_0 \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives.}$$

- 1) Trouver l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature ? Représenter cette trajectoire.
- 2) Donner, en coordonnées polaires, les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération.
- 3) Déterminer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire à $t = \pi/\omega$.

Solution

$$1) \theta(t) = \omega t \Rightarrow t = \theta/\omega$$

En remplaçant cette valeur de t dans l'expression de ρ , on obtient l'équation suivante :

$$\rho = r_0(1 + \cos \theta)$$

La trajectoire est une cardioïde (forme d'un cœur) dans le plan (XY). L'axe de symétrie de cette cardioïde est l'axe OX puisque $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$. Il suffit donc de tracer la partie supérieure (au dessus) de l'axe OX en prenant différentes valeur de θ entre 0 et π et de calculer les valeurs correspondantes de ρ . Ensuite, la partie inférieure (au dessous) de l'axe OX sera complétée par symétrie. Cette cardioïde est représentée sur la figure ci-dessous avec les coordonnées polaires de certains points particuliers.

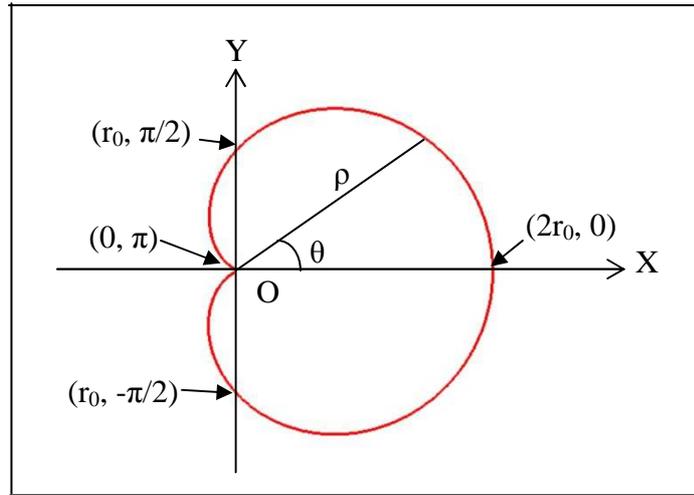
2) En coordonnées polaires, le vecteur position s'écrit :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{r} = \rho(t) \mathbf{e}_\rho = r_0(1 + \cos(\omega t))\mathbf{e}_\rho \quad (\text{a})$$

La dérivée par rapport à t de l'équation (a) permet de déterminer le vecteur vitesse :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{d\rho(t)}{dt}\right) \mathbf{e}_\rho + \rho(t) \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = r_0\omega[-\sin(\omega t) \mathbf{e}_\rho + (1 + \cos(\omega t)) \mathbf{e}_\theta] \quad (\text{b})$$

avec $\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta = \omega \mathbf{e}_\theta$.



Le vecteur accélération est donné par :

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = r_0\omega[-\omega \cos(\omega t) \mathbf{e}_\rho - \omega \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta - \omega \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta - \omega(1 + \cos(\omega t)) \mathbf{e}_\rho] = r_0\omega^2[-(1 + 2 \cos(\omega t)) \mathbf{e}_\rho - 2 \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta] \quad (c)$$

avec $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\rho = -\omega \mathbf{e}_\rho$

3) L'accélération tangentielle a_T est par définition :

$$a_T = \frac{d|v|}{dt} = dv/dt$$

D'après la relation (b), le module v de la vitesse est :

$$v = r_0\omega\sqrt{\sin^2(\omega t) + (1 + \cos(\omega t))^2} = r_0\omega\sqrt{2 + 2\cos(\omega t)} = 2r_0\omega|\cos(\frac{\omega t}{2})| \quad (d)$$

A $t = \pi/\omega$, la valeur du module de la vitesse est :

$$v(t = \frac{\pi}{\omega}) = 0 \quad (e)$$

Pour les valeurs de ωt allant de 0 à π ($\cos(\frac{\omega t}{2}) \geq 0$), l'accélération tangentielle est donnée par :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = -r_0\omega^2 \sin(\frac{\omega t}{2}) \quad (f)$$

où le signe - indique une décroissance du module de la vitesse avec le temps.

A $t = \pi/\omega$, l'accélération tangentielle vaut donc :

$$a_T(t = \frac{\pi}{\omega}) = -r_0\omega^2 \quad (g)$$

Le module de l'accélération totale est (d'après la relation (c)):

$$a = r_0\omega^2\sqrt{(1 + 2 \cos(\omega t))^2 + 4\sin^2(\omega t)} \quad (h)$$

A $t = \pi/\omega$, le module de l'accélération totale est :

$$a(t = \frac{\pi}{\omega}) = r_0\omega^2 \quad (i)$$

L'accélération normale est donnée par :

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \quad (j)$$

D'après les relations (g), (h) et (j) l'accélération normale à $t = \pi/\omega$ est nulle :

$$a_N(t = \frac{\pi}{\omega}) = 0 \quad (k)$$

Le rayon de courbure R de la trajectoire est par définition :

$$R = v^2/a_N \quad (l)$$

Les relations (e) et (k) montrent que l'utilisation de l'équation (l) pour calculer le rayon de courbure à $t = \pi/\omega$ mène à une valeur indéterminée (0/0). Pour lever cette indétermination, on établit l'expression du rayon de courbure (l) à un instant quelconque t puis on fait tendre t vers la valeur π/ω . Pour cela, on utilise les relations (d), (f), (h), (j) et (l).

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_T^2}} = \frac{[2r_0\omega \cos(\frac{\omega t}{2})]^2}{\sqrt{[r_0\omega^2 \sqrt{(1+2\cos(\omega t))^2 + 4\sin^2(\omega t)}]^2 - r_0^2\omega^4 \sin^2(\frac{\omega t}{2})}} = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) r_0 \frac{\cos^2(\frac{\omega t}{2})}{\sqrt{1+\cos(\omega t)}} = \frac{4}{3} r_0 \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \quad (m)$$

D'après cette dernière équation, le rayon de courbure est nul à $t = \pi/\omega$.

$$R(t = \frac{\pi}{\omega}) = 0.$$

CHAPITRE III

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

III.1 Introduction

La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent. Ces causes sont les interactions du corps avec les autres corps qui l'entourent. Les interactions sont décrites par une notion mathématique appelée 'force'. La dynamique est donc l'étude de la relation qui existe entre la force et les variations du mouvement d'un corps.

III.2 Les lois de Newton (1642 – 1727)

III.2.1 La 1^{ère} loi de Newton, ou le principe d'inertie et les référentiels galiléens

Un référentiel d'inertie (ou référentiel galiléen) est un référentiel dans lequel les objets libres sont soit au repos soit animés d'un mouvement rectiligne et uniforme.

On appelle particule (ou objet) libre toute particule qui ne subit aucune interaction avec l'extérieur. On dit que cette particule est isolée. C'est aussi le cas lorsque la résultante des interactions est nulle où la particule est dans ce cas 'pseudo-isolée'.

Le mouvement de la particule se fait par rapport à un observateur qui est lui-même un système libre. C'est un observateur d'inertie et le référentiel utilisé est un référentiel d'inertie (ou galiléen).

Un référentiel (R)', animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie (R), est aussi un référentiel d'inertie.

En effet, si la vitesse d'une particule libre dans (R) est $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a = \mathbf{Cste}$. Sa vitesse dans (R)' est : $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e$ où \mathbf{v}_e est la vitesse de (R)' par rapport à (R). Nous pouvons donc remarquer que si \mathbf{v}_e est constante alors \mathbf{v}_r sera également constante.

Le référentiel de Copernic est le meilleur exemple d'un référentiel galiléen. Son origine O est le centre de masse du système solaire et ses trois axes sont reliés à trois étoiles lointaines considérées comme étant fixes. Ce référentiel n'est cependant pas pratique pour des problèmes de mécanique au 'voisinage' de la terre et sur la terre. On utilise alors des référentiels galiléens approchés. Le meilleur exemple d'un référentiel galiléen approché est le référentiel géocentrique qui a comme origine le centre de la terre et les axes orientés vers des étoiles lointaines. Nous savons que le mouvement de la terre autour du soleil possède une accélération normale. Pour une durée suffisamment courte (par rapport à une année qui est la période de rotation de la terre autour du soleil), la trajectoire décrite par le centre de la terre peut être approximée à une ligne droite et le référentiel géocentrique peut être approximé à un référentiel galiléen. Nous allons voir, par la suite, que ce référentiel peut être utilisé pour étudier le mouvement d'un satellite artificiel ou naturel (lune) autour de la terre. Pour des problèmes de mécanique sur terre, le référentiel géocentrique n'est pas pratique et on définit donc un référentiel terrestre dont l'origine est un point à la surface de la terre et les axes sont orientés dans trois directions arbitraires de l'espace. Dû à la rotation de la terre autour d'elle-même, la trajectoire d'un point fixe à la surface de la terre est circulaire mais nous pouvons considérer que cette trajectoire est une ligne droite dans un intervalle de temps suffisamment court (par rapport à la période de rotation de la terre autour d'elle-même qui est de 24 heures). Nous allons revenir à la question de référentiel d'inertie dans un paragraphe ultérieur de ce chapitre (paragraphe III.4).

III.2.2 La 2^{ème} loi de Newton, ou le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Dans un référentiel d’inertie et si la masse d’un objet reste constante, la force **F** (ou la résultante des forces) que subit cet objet est égale au produit de sa masse **m** par son accélération **a**.

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \tag{III-1}$$

m est appelée masse d’inertie.

Dans cette dernière expression, **F** représente la force extérieure (ou la résultante des forces extérieures) exercée sur l’objet par les autres particules ou systèmes. La particule ne peut pas exercer de forces sur elle-même.

Nous pouvons constater que si **F = 0**, **a = 0**. Ceci ne veut en aucun cas dire que la 1^{ère} loi est un cas particulier de la 2^{ème} loi. La 1^{ère} loi donne la définition d’un référentiel d’inertie dans lequel on applique la 2^{ème} loi. Une loi physique est toujours associée à un référentiel dans lequel elle s’applique.

La deuxième loi de Newton est aussi appelée Principe Fondamental de la Dynamique (PFD).

III.2.3 La 3^{ème} loi de Newton, ou le principe de l’action et de la réaction

Lorsque deux corps A et B sont en interaction mutuelle, la force **F_{AB}** qu’exerce A sur B est égale et opposée à la force **F_{BA}** qu’exerce B sur A.

$$\mathbf{F}_{AB} = - \mathbf{F}_{BA} \tag{III-2}$$

Les deux forces **F_{AB}** et **F_{BA}** sont de même nature (contact, gravitationnelle, électrostatique, ..).

Exemple 1

Forces de contact dans le cas de deux masses **m** et **M** posées sur le sol comme indiqué sur la figure ci-contre.

- A_{m/M}** = force d’action de **m** sur **M**.
 - R_{M/m}** = force de réaction de **M** sur **m**.
 - A_{M/sol}** = force d’action de **M** sur le sol.
 - R_{sol/M}** = force de réaction du sol sur **M**.
- La 3^{ème} loi de Newton permet d’écrire :

$$\mathbf{A}_{m/M} = - \mathbf{R}_{M/m} \text{ et } \mathbf{A}_{M/sol} = - \mathbf{R}_{sol/M}$$

Si les masses **m** et **M** sont au repos par rapport au sol et si le référentiel lié à la terre est considéré comme étant galiléen, la 2^{ème} loi de Newton permet d’écrire :

$$\mathbf{A}_{m/M} = m\mathbf{g} \text{ et } \mathbf{A}_{M/sol} = (m + M)\mathbf{g}$$

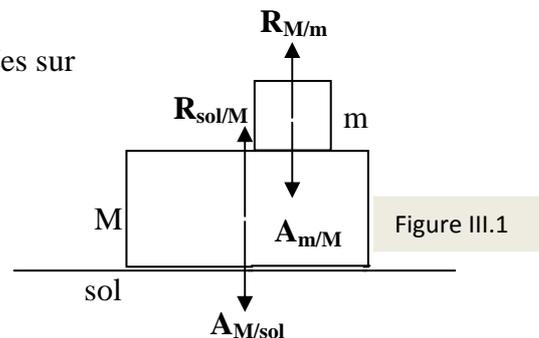


Figure III.1

Exemple 2

Forces de gravitation entre la terre et la lune (Figure III.2).

- F_{T/L}** = force de gravitation qu’exerce la terre sur la lune.
 - F_{L/T}** = force de gravitation qu’exerce la lune sur la terre.
- $$\mathbf{F}_{T/L} = - \mathbf{F}_{L/T}$$

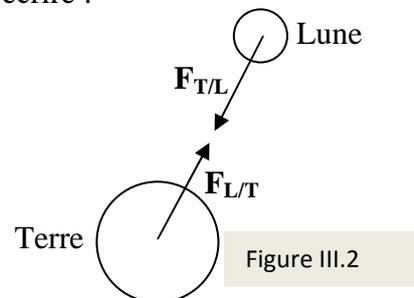


Figure III.2

III.3 Forces de frottement

Ces forces résultent des interactions entre les atomes ou molécules des surfaces en contact. Elles dépendent de plusieurs facteurs comme l'état et la nature des surfaces, la vitesse relative des objets en contact etc....

III.3.1 Frottement entre deux corps solides

La force de frottement solide s'oppose toujours au mouvement du corps et a donc un sens opposé à celui de la vitesse.

La force de frottement est en général proportionnelle à la force normale N qu'applique un corps sur un autre (action ou réaction normale).

$$F_{fr} = \mu N \quad (III-3)$$

La constante de proportionnalité μ s'appelle le coefficient de frottement. On distingue le frottement statique (au repos) et le frottement cinétique ou dynamique (en mouvement). Ces deux types de frottement sont respectivement caractérisés par les coefficients μ_s et μ_c (ou μ_d).

a) Frottement statique :

Soit une masse m au repos sur une surface horizontale (figure III.3). Une force horizontale F d'intensité variable est appliquée à m . Le coefficient de frottement statique μ_s est défini par :

$$(F_{frs})_{min} = \mu_s N \text{ où } N \text{ est la réaction de la surface sur la masse } m.$$

$(F_{frs})_{min}$ est la valeur minimale F nécessaire pour mettre en mouvement la masse m . En d'autres termes, si nous augmentons la valeur de F à partir de 0, on atteint une valeur $((F_{frs})_{min} = \mu_s N)$ de F qui déclenche le mouvement de m .

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{frs} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F} = - \mathbf{F}_{frs} \text{ et } F_{frs} \leq \mu_s N \quad (III-4)$$

b) Le frottement cinétique ou dynamique :

Lorsque la valeur de F dépasse $\mu_s N$, la masse m est en mouvement sur la surface horizontale (figure III.4). La force de frottement cinétique est la force nécessaire pour maintenir un mouvement uniforme ($a = 0$) de la masse m .

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{frc} = m \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F} = - \mathbf{F}_{frc} \text{ et } F_{frc} = \mu_c N \quad (III-5)$$

L'expérience montre que $\mu_s > \mu_c$.

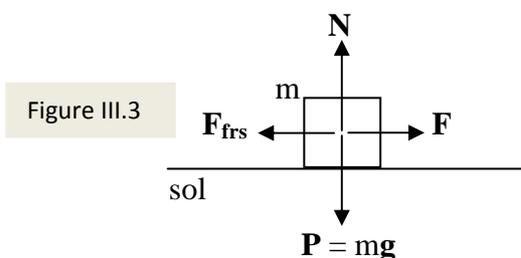


Figure III.3

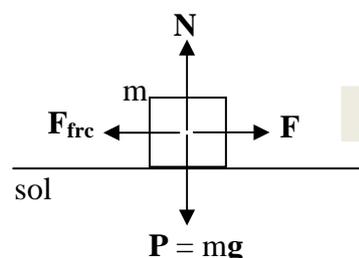


Figure III.4

III.3.2 Frottement entre un corps solide et un fluide (liquide ou gaz)

Lorsqu'un corps se déplace à faible vitesse dans un liquide ou un gaz, il subit une force opposée à son mouvement. L'expérience montre que cette force est proportionnelle à sa vitesse.

$$\mathbf{F}_{fr} = -k \mathbf{v} \quad (\text{III-6})$$

Le coefficient de proportionnalité k dépend de la forme du corps et de la nature du fluide.

$k = k_f \eta$ où k_f est le coefficient de forme du corps et η est la viscosité du fluide.

III.4 Forces d'inertie

Pour une particule de masse m , la 2^{ème} loi de Newton s'écrit dans un référentiel (R) d'inertie :

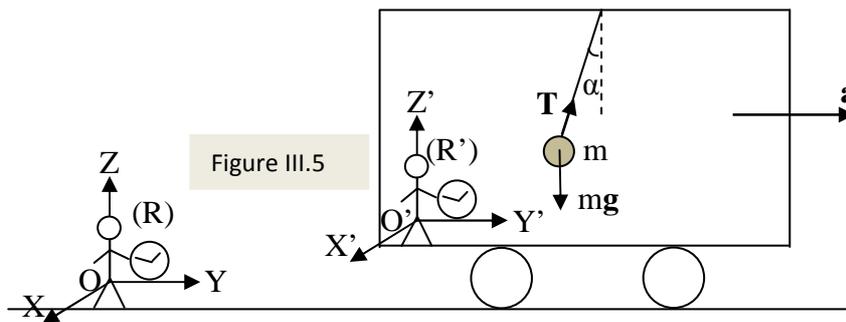
$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

Si la particule est libre, la somme des forces est nulle et donc $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

$\sum \mathbf{F}$ est la somme des forces ayant une origine matérielle dans (R) .

Comment écrire la 2^{ème} loi de Newton dans un référentiel non galiléen (R') ?

Considérons par exemple un référentiel galiléen (R) lié au sol et un référentiel non galiléen (R') lié à un wagon ayant une accélération constante \mathbf{a} par rapport au sol (figure III.5). A l'intérieur du wagon se trouve un pendule simple constitué par une masse m attachée au plafond à l'aide d'un fil inextensible et sans masse. En l'absence de frottement, la masse m subit deux forces : son poids $\mathbf{p} = m \mathbf{g}$ et la tension du fil \mathbf{T} .



Notons d'abord que les deux observateurs constatent que la masse m s'écarte d'un angle α par rapport à la verticale et dans le sens opposé à l'accélération \mathbf{a} .

Pour l'observateur lié à (R) , l'accélération de m est celle du wagon ; c'est-à-dire \mathbf{a} . Le PFD s'écrit dans ce cas :

$$m \mathbf{g} + \mathbf{T} = m \mathbf{a} \quad (\text{III-7})$$

La projection de cette relation sur les axes horizontal et vertical donne respectivement :

$$T \sin \alpha = m a$$

$$T \cos \alpha = m g$$

La division de la première relation par la deuxième relation donne alors :

$$\tan \alpha = a/g \quad (\text{III-8})$$

L'observateur lié à (R) peut donc expliquer, à l'aide du PFD, l'écartement de m par rapport à la verticale.

Pour l'observateur lié au wagon (R') , l'accélération de m est nulle. Le PFD 'dans (R') ' donnerait :

$$m \mathbf{g} + \mathbf{T} = \mathbf{0} ?$$

Ce qui est impossible puisque le poids et la tension ne sont pas portés sur la même direction.

Mais alors est t'il possible d'écrire une expression générale du PFD dans un référentiel non galiléen (R') ?

En général, dans (R) le PFD s'écrit :

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

L'accélération absolue étant la somme des accélérations relative \mathbf{a}_r , d'entraînement \mathbf{a}_e et de Coriolis \mathbf{a}_c (voir chapitre 2) :

$$\sum \mathbf{F} = m (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c) \text{ qui s'écrit alors}$$

$$\sum \mathbf{F} + \sum_{in} \mathbf{F} = m \mathbf{a}_r \quad \text{(III-9)}$$

où

$$\sum_{in} \mathbf{F} = -m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c = \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic} \quad \text{(III-10)}$$

Où \mathbf{F}_{ie} et \mathbf{F}_{ic} sont respectivement les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. L'observateur lié à (R') doit donc ajouter des forces d'inertie à la résultante des forces 'matérielles'. Les forces d'inertie ne sont pas les résultats d'interactions ; ce sont des forces 'non matérielles'.

Pour l'exemple du pendule ci-dessus, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_e$ le PFD dans le référentiel lié au wagon s'écrit :

$$m \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{ie} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{F}_{ie} = -m \mathbf{a}_e = -m \mathbf{a}$$

On obtient alors : $m \mathbf{g} + \mathbf{T} - m \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ou encore : $m \mathbf{g} + \mathbf{T} = m \mathbf{a}$ analogue à (III-7).

En résumé, les forces d'inertie sont des forces sans origine matérielle que l'on introduit en plus lorsqu'on applique la 2^{ème} loi de Newton dans un référentiel non galiléen.

Dans le référentiel géocentrique, il existe donc une force d'inertie $-m \mathbf{a}_{nts}$ où \mathbf{a}_{nts} est l'accélération normale de la terre autour du soleil. En module, cette accélération est :

$$a_{nts} = \frac{v_{t/s}^2}{d_{ts}} \approx 0,006 \text{ m/s}^2 \text{ où } d_{ts} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \text{ est la distance terre-soleil (rayon de la trajectoire) et } v_{t/s} \text{ est la vitesse de rotation de la terre autour du soleil.}$$

Dans le référentiel terrestre, il existe aussi une force d'inertie $-m \mathbf{a}_{ntt}$ où \mathbf{a}_{ntt} est l'accélération normale de la terre autour d'elle même. En module, cette accélération est :

$$a_{ntt} = \frac{v_{t/t}^2}{R} \approx 0,03 \text{ m/s}^2 \text{ où } R \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} \text{ est le rayon de la terre et } v_{t/t} \text{ est la vitesse de rotation de la terre autour d'elle même.}$$

Si l'on considère galiléens les référentiels géocentrique et terrestre, nous commettons une erreur sur l'accélération de l'objet étudié. Cette erreur est respectivement de l'ordre de quelques centièmes et quelques millièmes de m/s^2 pour les référentiels terrestre et géocentrique.

III.5 La loi de gravitation universelle de Newton

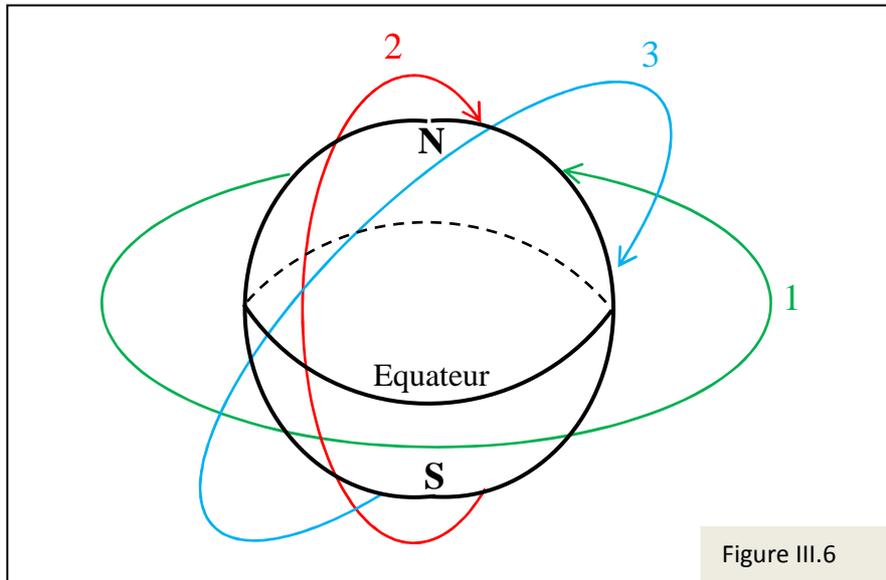
Le mouvement des planètes de notre système solaire autour du soleil a été étudié par Kepler au début du 17^{ème} siècle. Ce mouvement est le résultat d'une force centrale qui existe entre le soleil et chaque planète. Newton a fait remarquer que la force entre le soleil et ces planètes est du même type que la force exercée par la terre sur la lune ou encore celle subite par une pomme au voisinage de la surface de la terre (force de poids). C'est la force de gravitation entre deux masses m_1 et m_2 . Le module de cette force est donné par la loi universelle de gravitation de Newton (établit en 1687) :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(III-11)}$$

où $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ est la constante de gravitation et r la distance entre les deux masses.

Ainsi, le mouvement des planètes et des satellites (naturels et artificiels) peut être décrit en utilisant la loi de gravitation et les trois lois de Newton.

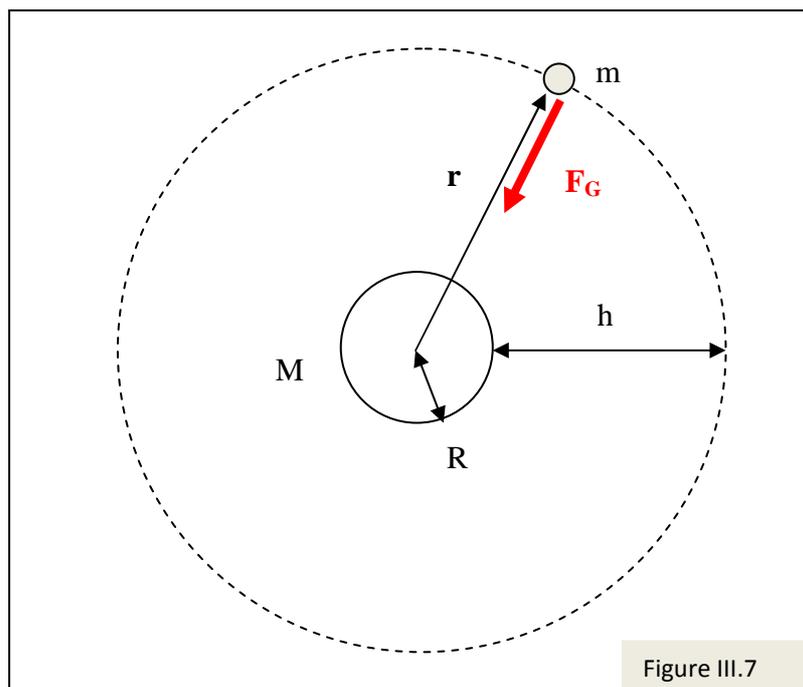
Des milliers de satellites artificiels se trouvent aujourd'hui en orbite autour de la terre à des altitudes se situant entre 300 et 36000 km. Les inclinaisons des orbites de ces satellites sont variées comme indiqué sur la figure III.6. L'usage du satellite s'est aussi diversifié (télécommunications, observation, navigation etc...).



Soit une masse m (de rayon négligeable) qui effectue un mouvement supposé circulaire autour d'une masse M de rayon R comme indiqué sur la figure III.7 ci-dessous. La distance r entre les deux masses est le rayon du cercle que décrit m autour de M .

$$r = R + h$$

où h est la hauteur de m (par rapport à la surface de M).



En l'absence de frottements, la masse m subit une force de gravitation \mathbf{F}_G exercée par M . Cette force représente le poids de m à cette hauteur. Dans le référentiel galiléen ayant comme origine le centre de M et trois axes orientés vers des étoiles lointaines, la deuxième loi de Newton appliquée à m s'écrit :

$$\mathbf{F}_G = m \mathbf{a} \quad (\text{III-12})$$

où \mathbf{a} est le vecteur accélération (normale) de m .

La projection de l'équation (III-12) sur l'axe normal (orienté vers le centre de M) au cercle donne :

$$F_G = m a_n = m g = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{III-13})$$

où v est la vitesse linéaire de m autour de M .

Avec la relation (III-11) de la force de gravitation, le poids de m s'écrit :

$$m g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{GMm}{(h+R)^2} \quad (\text{III-14})$$

L'accélération (de la pesanteur) de m est donc :

$$g = \frac{GM}{(h+R)^2} = \frac{GM}{R^2(1+h/R)^2} = \frac{g_0}{(1+\frac{h}{R})^2} \quad (\text{III-15})$$

où $g_0 = GM/R^2$ est l'accélération de m à la surface de M ($h = 0$).

En utilisant les relations (III-13) et (III-15), la vitesse de m est donnée par :

$$v = \sqrt{g_0 R / (1 + \frac{h}{R})} \quad (\text{III-16})$$

La période T de rotation de m est par définition le temps nécessaire à m pour effectuer un tour complet autour de M et donc :

$$v T = 2\pi r = 2\pi(h + R) = 2\pi R(1 + \frac{h}{R}) \quad (\text{III-17})$$

Les relations (III-16) et (III-17) donnent alors :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} (1 + \frac{h}{R})^{3/2} = 2\pi \sqrt{1/(g_0 R^2)} r^{3/2} \quad (\text{III-18})$$

Ainsi, pour deux masses m_1 et m_2 en orbite autour de M à des distances r_1 et r_2 , la relation entre les périodes respectives T_1 et T_2 s'écrit :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} \quad (\text{III-19})$$

III.6 La quantité de mouvement

La quantité de mouvement \mathbf{P} d'une particule de masse m ayant une vitesse \mathbf{v} est :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v} \quad (\text{III-20})$$

La quantité de mouvement d'une particule libre ou isolée ($\mathbf{v} = \mathbf{Cste}$) est donc constante.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Cste} \quad (\text{III-21})$$

Cette dernière relation constitue un nouvel énoncé de la première loi de Newton (principe d'inertie).

D'autre part, la dérivée de la relation (III-20) par rapport au temps (en considérant que la masse m est constante) donne :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (\text{III-22})$$

où \mathbf{F} est la résultante des forces extérieures qui agissent sur la particule. On obtient ainsi une expression du PFD généralisé (2^{ème} loi de Newton généralisée) :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad (\text{III-23})$$

Cette dernière relation reste valable lorsque la masse de la particule change en fonction du temps.

III.6.1 Conservation de la quantité de mouvement

Pour un système de plusieurs particules, la quantité de mouvement totale s'écrit :

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots \quad (\text{III-24})$$

Dans ce qui suit, on se place dans le cas particulier de deux particules 1 et 2 (en interaction mutuelle) ayant des masses m_1 et m_2 et des vitesses \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Ce système est supposé isolé ou pseudo-isolé. Ceci veut dire que ces deux particules ne subissent pas de forces extérieures exercées par d'autres particules n'appartenant pas à ce système. Ces deux particules interagissent entre elles et les forces correspondantes sont donc 'intérieures'. Ces forces intérieures sont notées par $\mathbf{F}_{2/1}$ (force qu'exerce la particule 2 sur la particule 1) et $\mathbf{F}_{1/2}$ (force qu'exerce la particule 1 sur la particule 2).

Soient $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$, $\mathbf{v}_1(t')$ et $\mathbf{v}_2(t')$ les vitesses des particules aux instants t et t' de sorte que $t' - t = \Delta t > 0$.

La variation de vitesse de la particule 1 entre les instants t et t' s'écrit :

$$\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(t') - \mathbf{v}_1(t) \quad (\text{III-25})$$

Pour la particule 2, cette variation est :

$$\Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(t') - \mathbf{v}_2(t) \quad (\text{III-26})$$

L'expérience montre que $m_1 \Delta \mathbf{v}_1 = - m_2 \Delta \mathbf{v}_2$

Si les masses m_1 et m_2 sont constantes, on peut écrire :

$$\Delta(m_1 \mathbf{v}_1) = - \Delta(m_2 \mathbf{v}_2) \text{ et donc } \Delta(\mathbf{P}_1) = - \Delta(\mathbf{P}_2) \quad (\text{III-27})$$

Où \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 sont les quantités de mouvement des particules 1 et 2.

Pour deux particules en interaction, la variation de la quantité de mouvement d'une particule est égale (en module) et opposée à la variation de la quantité de mouvement de l'autre pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t' - t$.

Une interaction produit ainsi un échange de la quantité de mouvement.

La relation (III-27) peut s'écrire aussi sous plusieurs formes:

$$\Delta(\mathbf{P}_1) + \Delta(\mathbf{P}_2) = \Delta(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \mathbf{0} \text{ ou bien :}$$

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)_t = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)_{t'} \text{ ou encore :}$$

$$\mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \quad (\text{III-28})$$

Le premier et le second membre de (III-28) représente respectivement la quantité de mouvement totale du système aux instants t' et t .

La quantité de mouvement totale des deux particules soumises uniquement à leur interaction mutuelle est constante.

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{Constante} \quad (\text{III-29})$$

C'est le principe de conservation de la quantité de mouvement.

On peut généraliser ce principe à un système isolé (ou pseudo-isolé) de plusieurs particules :

La quantité de mouvement totale d'un **système isolé de particules** est constante.

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots = \text{Constante} \quad (\text{III-30})$$

Reprenons l'exemple des deux particules, d'après la relation (III-27) :

$$\Delta(\mathbf{P}_1) = - \Delta(\mathbf{P}_2) \implies \frac{\Delta\mathbf{P}_1}{\Delta t} = - \frac{\Delta\mathbf{P}_2}{\Delta t} \quad (\text{III-31})$$

Lorsque $t' \rightarrow t$ $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t = dt$), ceci devient :

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{dt} = - \frac{d\mathbf{P}_2}{dt} \quad (\text{III-32})$$

La force $\mathbf{F}_{2/1}$ qu'exerce la particule 2 sur la particule 1 s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{dt} = \mathbf{F}_{2/1} \quad (\text{III-33})$$

De même, la force $\mathbf{F}_{1/2}$ qu'exerce la particule 1 sur la particule 2 est :

$$\frac{d\mathbf{P}_2}{dt} = \mathbf{F}_{1/2} \quad (\text{III-34})$$

Les relations (III-32), (III-33) et (III-34) nous donnent :

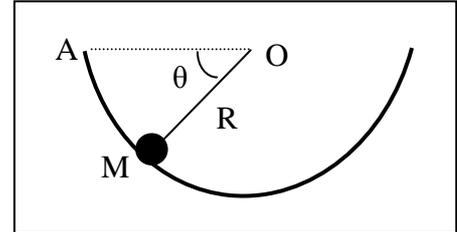
$$\mathbf{F}_{2/1} = - \mathbf{F}_{1/2} \quad (\text{III-35})$$

On retrouve ainsi la 3^{ème} loi de Newton.

EXERCICES CORRIGÉS

Exercice III-1

Une masse ponctuelle m glisse du point A sans vitesse initiale sur la paroi d'un hémisphère de rayon R et de centre O. On supposera que les frottements sont négligeables et on notera par θ l'angle entre OA et OM où M est la position instantanée de la masse m .



- 1) Calculer en fonction de θ
 - a) la grandeur de la force de contact C que la paroi exerce sur la masse m .
 - b) les accélérations normale et tangentielle du mouvement.
- 2) Quelle est la valeur maximale du module de C ?

Solution

1) a) En l'absence de frottements, les forces qui agissent sur m sont : le poids mg et la force de contact C .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à m s'écrit : $m\mathbf{g} + \mathbf{C} = m\mathbf{a}$ où \mathbf{a} est l'accélération de m .

La projection de cette dernière relation sur l'axe normal (MO) donne :

$$-mg\sin\theta + C = ma_N = mv^2/R \tag{a}$$

La projection sur l'axe tangentiel (T) conduit à la relation :

$$mg\cos\theta = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = g \cos\theta dt \tag{b}$$

$$\text{Sachant que } v = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = R d\theta/v \tag{c}$$

En portant (c) dans (b), on obtient :

$$v dv = g R \cos\theta d\theta \tag{d}$$

L'intégration de l'équation (d) conduit l'expression de v en fonction de θ .

$$\int v dv = \int g R \cos\theta d\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} = g R \sin\theta + K \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Au point A ($\theta = 0$), la vitesse est nulle. La constante K est donc nulle et :

$$v = \sqrt{2 g R \sin\theta} \tag{e}$$

En portant cette dernière expression de la vitesse dans l'équation (a), on obtient :

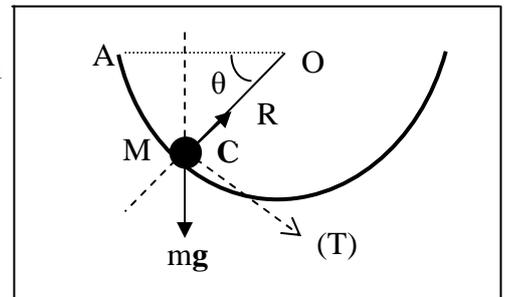
$$C = m g \sin\theta + \frac{mv^2}{R} = 3 m g \sin\theta \tag{f}$$

b) En utilisant l'expression (e), l'accélération normale a_N s'écrit :

$$a_N = \frac{v^2}{R} = 2 g \sin\theta$$

L'accélération tangentielle du mouvement est (d'après les relations (e) et (c)) :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{d\theta}\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \left(\frac{2gR\cos\theta}{2\sqrt{2gR\sin\theta}}\right) \left(\frac{\sqrt{2gR\sin\theta}}{R}\right) = g \cos\theta$$



2) D'après la relation (f), la force de contact est maximale lorsque la valeur de $\sin\theta$ est maximale ; c'est-à-dire pour $\sin\theta = 1$ et $\theta = \pi/2$. La valeur maximale de C est donc :
 $C_{max} = 3 mg$

Exercice III-2

Une boîte en acier de masse m égale à 50 kg est posée sur un plan horizontal. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la boîte et le plan sont respectivement $\mu_s = 0,6$ et $\mu_c = 0,3$.

- 1) Déterminer la valeur maximale de la force F qu'on peut appliquer horizontalement sur la boîte sans déclencher son mouvement. On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- 2) On pousse successivement cette boîte avec une force horizontale de 180 N, 260 N, 380 N et 400 N. Dans chacun des cas, quelle est la valeur de la force de frottement f ?

Solution

La 2^{ème} loi de Newton appliquée à m s'écrit :

$$mg + N + F + f = ma$$

La projection sur l'axe (X) donne :

$$F - f = ma$$

Le mouvement de m se fait uniquement sur l'axe (X) donc :

$$N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

Lorsque la boîte est au repos ($a = 0$), la force de frottement statique f_s est égale à F et $f_s(max) = \mu_s N$.

Lorsque la boîte est en mouvement, la force de frottement cinétique ou dynamique f_c est égale à $\mu_c N$ ou à $F - ma$.

La valeur maximale de la force F qu'on peut appliquer (sans déclencher le mouvement de la boîte) est par définition égale à la valeur maximale de la force de frottement statique, soit :

$$f_s(max) = \mu_s N = \mu_s mg = 0,6 \times 50 \times 10 = 300 \text{ N}, f_s \leq f_s(max)$$

2) Lorsqu'on applique à la boîte une force inférieure à 300 N, celle-ci sera au repos et la valeur de la force de frottement statique est égale (en module) à la force appliquée.

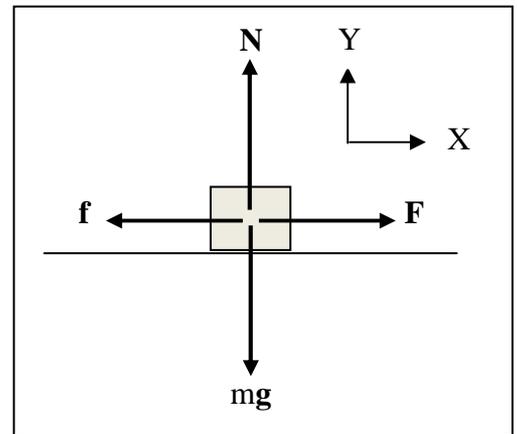
Pour $F = F_1 = 180 \text{ N} < 300 \text{ N}$, la boîte est au repos et $f_s = f_{s1} = 180 \text{ N}$.

Pour $F = F_2 = 260 \text{ N} < 300 \text{ N}$, la boîte est au repos et $f_s = f_{s2} = 260 \text{ N}$.

Lorsqu'on applique à la boîte une force supérieure à 300 N, celle-ci sera en mouvement et la valeur de la force de frottement cinétique (dynamique) est égale à $\mu_c N = \mu_c mg = 150 \text{ N}$.

Pour $F = F_3 = 380 \text{ N} > 300 \text{ N}$, la boîte est en mouvement et $f_c = f_{c3} = 150 \text{ N}$.

Pour $F = F_4 = 400 \text{ N} > 300 \text{ N}$, la boîte est en mouvement et $f_c = f_{c4} = 150 \text{ N}$.



Exercice III-3

1) Alcomsat-1 est un satellite de télécommunications algérien lancé le 10 décembre 2017 et mis sur orbite géostationnaire dans le plan équatorial. Pour ce type d'orbite, le satellite paraît immobile pour un observateur fixe sur terre. On se place dans le référentiel géocentrique

ayant comme origine le centre de la terre et les axes orientés vers des étoiles lointaines. On donne : rayon de la terre $R = 6400 \text{ km}$.

- a) Quelle est la période de rotation du satellite (temps pour effectuer un tour complet autour du centre de la terre) ? Quel est le sens de rotation du satellite ?
 - b) La hauteur de ce satellite.
- 2) La lune est le seul satellite naturel de la terre. Elle effectue un tour complet autour de la terre en 27,32 jours. L'orbite de la lune est inclinée de $61,4^\circ$ par rapport à la direction sud-nord. Calculer :
- a) la distance terre-lune.
 - b) l'accélération de la lune.
 - c) la vitesse de rotation de la lune autour de la terre.
- 3) Pour chacun des satellites artificiels suivants, calculer la vitesse et la période.
- a) Satellite d'observation 'obs1' à une altitude de 700 km en orbite perpendiculaire au plan équatorial (voir paragraphe II.10).
 - b) Satellite de géolocalisation 'géo1' en orbite inclinée à une altitude de 22000 km.
 - c) La station spatiale internationale (ISS) en orbite inclinée de $51,6^\circ$ (par rapport au plan équatorial) à une altitude moyenne de 380 km.

Solution

1) a) Un satellite géostationnaire est immobile par rapport à un observateur fixe au sol. La rotation du satellite s'effectue donc avec une période égale à celle de la rotation de la terre autour d'elle-même (24 heures) et dans le même sens (de l'ouest vers l'est). Les expressions établies au paragraphe III.5 peuvent être utilisées. Dans notre cas, M , R et g_0 représentent respectivement la masse de la terre, le rayon de la terre et l'accélération de la pesanteur à sa surface ($g_0 = 9,81 \frac{m}{s^2}$).

La relation (III-18) du paragraphe III.5 permet d'écrire le rayon (et la hauteur) du satellite en fonction de la période :

$$r = h + R = \left[\frac{T}{2\pi} \sqrt{g_0 R^2} \right]^{2/3} \tag{a}$$

En remplaçant dans (a) les valeurs de T ($24 \times 3600 \text{ s}$), R ($6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$) et g_0 ($9,81 \frac{m}{s^2}$) nous obtenons $r = 42400 \text{ km}$ et $h = 36000 \text{ km}$.

2) a) La période de rotation de la lune autour de la terre est de 27,32 jours (mois lunaire). Dans ce cas, la relation (a) permet d'estimer la distance terre-lune à $r = 60R = 384000 \text{ km}$.

b) L'accélération de la lune peut être calculée en utilisant la relation du paragraphe III.5 soit :

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

Pour $h = 59 R = 377600 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ et $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ on obtient :

$$g = 2,7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

c) La vitesse de rotation de la lune autour de la terre est donnée par la relation (III-16) du paragraphe III.5, soit :

$$v = \sqrt{g_0 R / (1 + \frac{h}{R})} \quad (b)$$

On trouve alors : $v = 1,02 \times 10^3 \text{ m/s}$.

3) a) Pour 'obs1', la relation (b) ci-dessus donne avec $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ et $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$:
 $v = 7500 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7,5 \text{ km/s}$.

La période de ce satellite est donnée par :

$$T = 2\pi(R + h)/v \quad (c)$$

Soit $T = 5945 \text{ s} = 1\text{h } 39 \text{ min } 5 \text{ s}$.

b) Pour 'géo1', les relations (b) et (c) donnent respectivement:

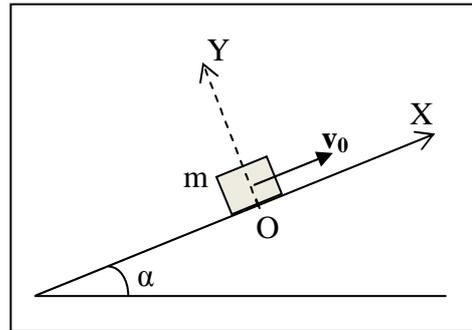
$$v = 3760 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,76 \text{ km/s} , \quad T = 47434 \text{ s} = 13\text{h } 10 \text{ min } 34 \text{ s}.$$

c) De même, pour l'ISS on obtient :

$$v = 7700 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7,7 \text{ km/s} , \quad T = 5530 \text{ s} = 1\text{h } 32 \text{ min } 10 \text{ s}.$$

Exercice III-4

Une boîte de masse $m = 5\text{kg}$ se trouve sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Le coefficient de frottement cinétique entre les surfaces en contact est $\mu_c = 0,3$. A partir du point O, on lance la boîte vers le haut avec une vitesse initiale $v_0 = 2 \text{ m/s}$. On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.



1) Déterminer l'accélération de la boîte.

2) Quelle est la distance parcourue par la boîte avant de s'arrêter ?

3) Quelle est la valeur minimale du coefficient de frottement statique μ_s pour que la boîte, une fois arrêtée, ne reparte pas en arrière ?

Solution

1) Les forces agissant sur la masse m sont : le poids $m\mathbf{g}$, la réaction normale \mathbf{N} du plan et la force de frottement cinétique \mathbf{Fr}_c . Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit :

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{Fr}_c = m\mathbf{a} \quad (a)$$

Où \mathbf{a} est l'accélération de m (sur l'axe OX).

La projection du PFD sur les axes (OX) et (OY) donne respectivement les relations :

$$-mg \sin\alpha - Fr_c = m a \quad (b)$$

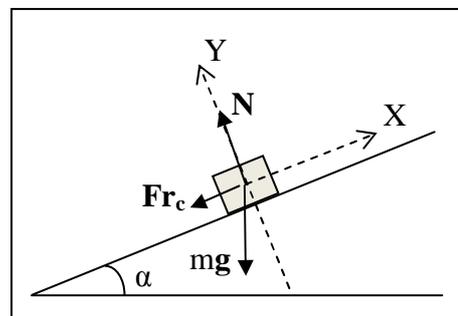
$$N - mg \cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos\alpha \quad (c)$$

D'autre part, la force de frottement cinétique est donnée par (en tenant compte de (c)):

$$Fr_c = \mu_c N = \mu_c mg \cos\alpha \quad (d)$$

Nous obtenons donc, à partir des relations (b) et (d) l'accélération de la masse m :

$$a = -g \sin\alpha - \mu_c g \cos\alpha \quad (e)$$



Application numérique : $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\mu_c = 0,3$, $\alpha = 30^\circ$, $a = -7,6 \text{ m/s}^2$.

La valeur de a est négative puisque l'accélération de m est orientée vers le bas du plan dans le sens opposé à l'axe (OX) qu'on a choisit vers le haut.

2) L'accélération de m donnée par l'expression (e) est constante. Il s'agit donc d'un mouvement rectiligne uniformément varié. On peut appliquer la relation :

$$v^2 - v_0^2 = 2 a (OB) \quad (f)$$

Où v_0 et v sont respectivement les vitesses aux points O et B (point d'arrêt de m , $v = 0$).

La distance OB parcourue par la boîte avant de s'arrêter est alors :

$$OB = -v_0^2 / (2a)$$

Application numérique : $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $a = -7,6 \text{ m/s}^2$, $OB = 0,26 \text{ m}$.

3) Pour que la boîte ne revienne pas vers l'arrière, une force de frottement \mathbf{Fr}_s (statique) dirigée vers le haut doit exister pour avoir l'équilibre de la masse m ; c'est-à-dire :

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{Fr}_s = \mathbf{0} \quad (g)$$

La projection de l'équation (g) sur les axes (OX) et (OY)

donne respectivement les relations :

$$-mg \sin\alpha + Fr_s = 0 \Rightarrow Fr_s = mg \sin\alpha \quad (h)$$

$$N - mg \cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos\alpha \quad (i)$$

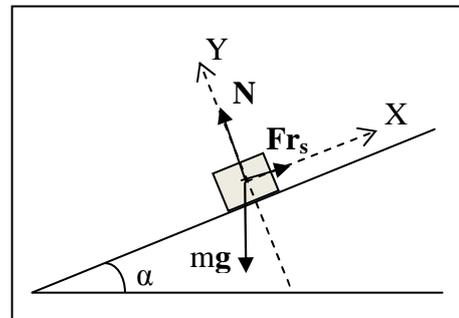
Le coefficient de frottement statique μ_s est par définition :

$$\mu_s = Fr_s(\text{max})/N$$

A la limite, $Fr_s = Fr_s(\text{max})$ et la valeur minimale de μ_s s'obtient en faisant le rapport des relations (h) et (i) :

$$\mu_s(\text{min}) = \frac{Fr_s}{N} = \text{tg}\alpha$$

Application numérique : $\alpha = 30^\circ$, $\mu_s(\text{min}) = 0,577$.



CHAPITRE IV

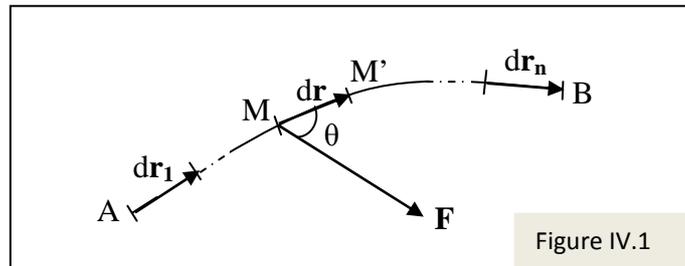
TRAVAIL ET ENERGIE DANS LE CAS DU POINT MATERIEL

IV.1 Introduction

L'énergie est une grandeur physique qui se présente sous plusieurs formes : mécanique, électrique, chimique, thermique etc... Elle passe d'une forme à une autre tout en ayant la propriété de rester constante lorsqu'on tient compte de toutes les transformations. L'énergie ne peut donc être créée ou détruite. Pour transformer l'énergie d'une forme à une autre, il faut effectuer un travail. L'utilisation des notions de l'énergie et du travail est préférable (par rapport à la 2^{ème} loi de Newton) pour étudier les systèmes physiques lorsque les forces appliquées sont d'un genre particulier.

IV.2 Travail

Soit une particule se déplaçant sur une trajectoire quelconque (C) sous l'action d'une force **F** (figure IV.1). Pendant un temps très court *dt*, elle effectue un déplacement **MM' = dr** (*M* → *M'*).



Le travail de la force **F** pendant le déplacement **dr** est par définition :

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dr \cos\theta = F \cos\theta dr \tag{IV-1}$$

F cosθ est la composante de la force suivant le déplacement.

Le travail total effectué entre deux points A et B est la somme de tous les travaux élémentaires : *dW₁, dW₂, dW₃,.....*

$$W_{AB} = dW_1 + dW_2 + dW_3 + \dots = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r}_3 + \dots = \sum_{dr_i \rightarrow 0} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{IV-2}$$

L'unité de mesure du travail est le joule (j) qui est identique au *kg.m².s⁻²*.

Cas particuliers

- Force constante (module, direction et sens) et trajectoire rectiligne AB (figure IV.2):

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F dr \cos\alpha = F \cos\alpha \int_A^B dr = F (AB) \cos\alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{AB}$$

Si **F** est perpendiculaire à **AB**, *W = 0*.

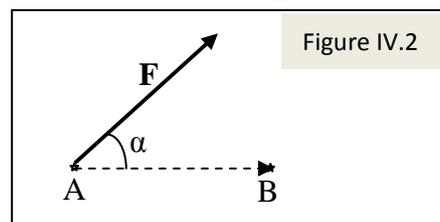
Si $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow W > 0$ (travail moteur)

Si $\pi \geq \alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow W < 0$ (travail résistant)

- Force de poids et trajectoire quelconque :

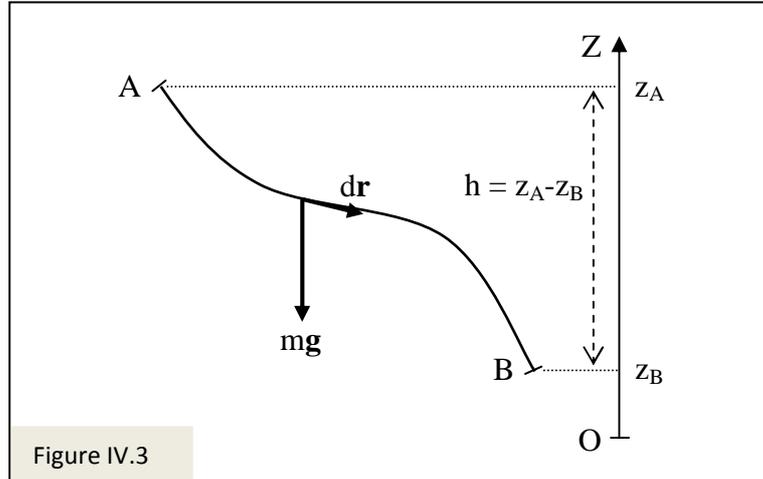
Nous avons dans ce cas (figure IV.3):

r(x, y, z), **dr(dx, dy, dz)** et **mg(0,0, -mg)** et :



$$W_{AB}(m\mathbf{g}) = \int_A^B m\mathbf{g} \, d\mathbf{r} = \int_A^B (-mg\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \int_{z(A)}^{z(B)} -mg \, dz = -mg \int_{z(A)}^{z(B)} dz = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B) = mgh \quad (\text{IV-3})$$

Le travail de la force du poids ne dépend donc pas du chemin suivi entre A et B.



IV.3 Puissance

La puissance moyenne P_{moy} est par définition le rapport du travail sur la durée de son accomplissement $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$P_{moy} = \frac{W_{t_1 t_2}}{t_2 - t_1} \quad \text{où } W_{t_1 t_2} \text{ est le travail effectué dans l'intervalle de temps } [t_1, t_2]$$

Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t = dt$), on obtient la puissance instantanée P :

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (\text{IV-4})$$

où dW est le travail effectué durant dt .

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{IV-5})$$

La puissance est donc donnée par le produit scalaire de la force et de la vitesse. L'unité de mesure de la puissance est le Watt (W) qui est aussi le $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$.

IV.4 Energie cinétique, potentielle et mécanique

IV.4.1 Energie cinétique

Soit \mathbf{F} la résultante des forces qui agissent sur une particule de masse m constante effectuant un déplacement sur une courbe quelconque (figure IV.4). Pour un déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$, le travail de la force \mathbf{F} est : $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

D'après la 2^{ème} loi de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ et de plus : $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v} \, dt$

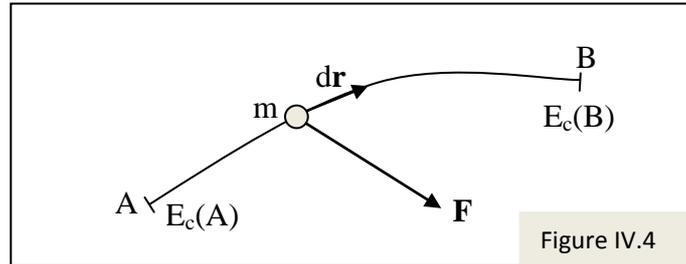
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \, dt = m\mathbf{v} \, d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m \, d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d\left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2\right) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

Par définition, la quantité $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ est l'énergie cinétique de la particule de masse m ayant une vitesse (en module) v . On a donc :

$$dW = dE_c \quad (IV-6)$$

Pour un déplacement du point A au point B, nous pouvons écrire :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (IV-7)$$



Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème de l'énergie cinétique : La variation de l'énergie cinétique d'une particule entre deux points A et B est égale à la somme des travaux de toutes les forces agissant sur la particule.

IV.4.2 Energie potentielle

Une force \mathbf{F} dérive d'un potentiel E_p si le travail qu'elle effectue sur un déplacement de A à B se présente comme une différence de la fonction E_p évaluée aux points A et B.

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) \quad (IV-8)$$

La quantité $E_p(\mathbf{r})$ dépend des coordonnées de la particule et elle est appelée énergie potentielle.

Une force qui dérive d'un potentiel est appelée force conservative.

Le travail d'une force conservative est indépendant du chemin suivi par la particule. Il ne dépend que de la position initiale (A) et de la position finale (B) de la particule.

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\Delta E_p = -\int_A^B dE_p \Rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dE_p \quad (IV-9)$$

E_p est une fonction des coordonnées (x,y,z) , sa différentielle s'écrit :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \quad \text{et} \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \quad (IV-10)$$

Comme dx, dy, dz sont quelconques, nous pouvons déduire que :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad (IV-11)$$

Qu'on peut écrire sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_p$$

En prenant le rotationnel des deux membres de cette dernière équation, on obtient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{rot}(-\mathbf{grad} E_p) = -\mathbf{rot}(\mathbf{grad} E_p) = \mathbf{0} \quad (\text{voir paragraphe I.6.4})$$

Pour qu'une force \mathbf{F} soit conservative, il faut avoir :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad (IV-12)$$

Remarque

Les forces de frottements sont des forces non conservatives. On ne peut pas associer une énergie potentielle à ce type de forces.

L'expression de la force de frottement peut se présenter sous deux formes :

$\mathbf{F} = -k \mathbf{v} = -k v \mathbf{u}_t$ ou bien $\mathbf{F} = -F_0 \mathbf{u}_t$ où k est une constante et F_0 est une force constante. \mathbf{u}_t est le vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire du mobile et qui est orienté dans le sens du déplacement. Bien entendu, le vecteur vitesse \mathbf{v} est aussi porté par la tangente à la trajectoire. La première forme correspond au frottement subit par un solide dans un fluide et la deuxième forme représente le frottement entre deux surfaces solides (masse sur un plan horizontal ou incliné par exemple). Lorsque le module de la vitesse est constant, la première forme devient analogue à la deuxième.

Le travail de la force de frottement entre deux points A et B s'écrit pour la première forme :

$$W_{AB}(\mathbf{F}) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -k \int_A^B v \mathbf{u}_t \cdot d\mathbf{r} = -k \int_A^B v ds$$

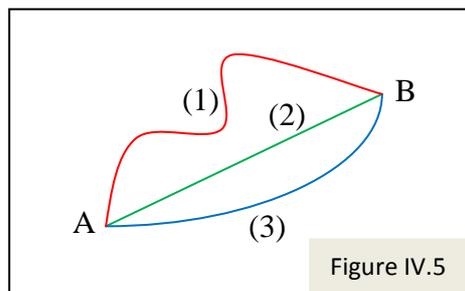
où s est l'abscisse curviligne sur la trajectoire entre A et B.

La valeur du travail fait donc intervenir l'abscisse curviligne. Pour la deuxième forme de la force de frottement, on obtient :

$$W_{AB}(\mathbf{F}) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F_0 \int_A^B ds = -F_0 [s(B) - s(A)] = -F_0 \widehat{AB}$$

où \widehat{AB} est la longueur de l'arc AB, c'est-à-dire la distance parcourue entre A et B (voir figure IV.5).

Le travail de la force de frottement est donc toujours négatif (résistant) et dépend du chemin suivi entre les deux points A et B (puisque la longueur de l'arc AB dépend du chemin suivi).



Quelques exemples d'énergies potentielles

a) Energie potentielle de la force de poids $m\mathbf{g}$ (au voisinage de la surface de la terre) :

Nous avons montré au paragraphe IV.2 que le travail de cette force entre deux points A et B est :

$$W_{AB}(m\mathbf{g}) = \int_A^B m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = mg(z_A - z_B) = mgz_A - mgz_B \tag{IV-13}$$

Ce travail s'écrit donc sous la forme :

$W_{AB}(m\mathbf{g}) = mgz_A - mgz_B = E_p(A) - E_p(B)$ et cette force dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p(z) = m g z + \text{constante} \quad (\text{IV-14})$$

b) Energie potentielle de gravitation entre deux masses M et m :

La force qu'exerce M sur m s'écrit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{G M m}{r^2} \mathbf{u} = -\frac{G M m}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{IV-15})$$

où \mathbf{r} est le rayon vecteur de m par rapport au centre de M et \mathbf{u} est le vecteur unitaire porté par \mathbf{r} ($\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r}$) comme représenté sur la figure IV.6.

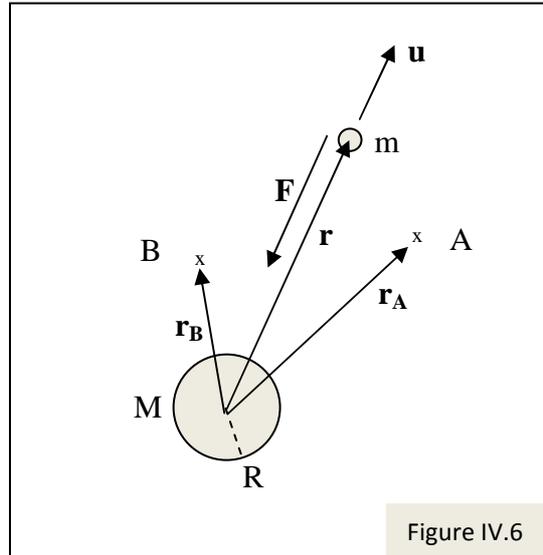


Figure IV.6

Le travail de la force \mathbf{F} de A à B s'écrit :

$$W_{AB}(\mathbf{F}) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\int_A^B F dl \cos\theta = -G M m \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = G M m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (\text{IV-16})$$

où θ est l'angle entre \mathbf{F} et $d\mathbf{l}$ et $dl \cos\theta = dr$ (voir la figure IV.7 ci-dessous) ; $d\mathbf{l}$ est un déplacement élémentaire quelconque et dr est le déplacement radial correspondant (dans la direction de la force).

Nous pouvons donc écrire le travail de \mathbf{F} entre A et B sous la forme :

$$W_{AB}(\mathbf{F}) = -\frac{G M m}{r_A} + \frac{G M m}{r_B} = E_p(A) - E_p(B) \quad (\text{IV-17})$$

La force de gravitation \mathbf{F} dérive donc du potentiel :

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r} + \text{constante} \quad (\text{IV-18})$$

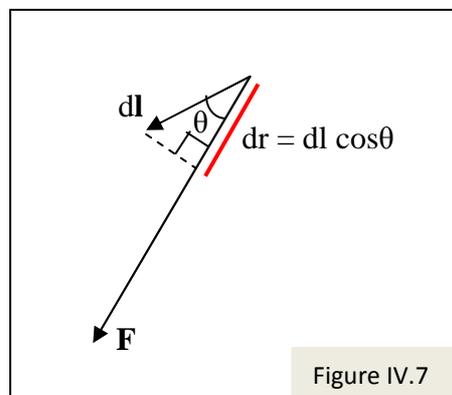


Figure IV.7

Remarque

L'énergie potentielle est définie à une constante près. Le choix de cette constante est lié au choix du zéro de l'énergie potentielle (référence). Comme le travail de la force conservative associée est une différence de cette énergie potentielle, le résultat ne dépend pas du choix de la référence ou de la constante.

c) Energie potentielle élastique d'un ressort :

Soit une masse m attachée à une extrémité d'un ressort sur une surface horizontale en position d'équilibre O (ressort non comprimé et non allongé). L'autre extrémité est supposée fixe comme l'indique la figure ci-dessous. Lorsque la masse est écartée d'une distance x par rapport à sa position d'équilibre (figure IV.8), la masse subit une force de rappel F_r du ressort :

$$F(x) = F_r(x) = -k x \tag{IV-19}$$

où k est la constante de raideur du ressort.

Le travail de F_r entre deux point A et B sur l'axe de déplacement de m s'écrit :

$$W_{AB}(F_r) = \int_A^B \mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -k x dx = -k \int_{x_A}^{x_B} x dx = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 \tag{IV-20}$$

La force de rappel du ressort dérive d'une énergie potentielle élastique de la forme :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 + \text{constante} \tag{IV-21}$$

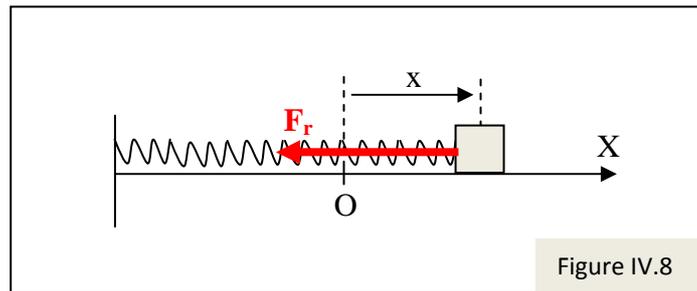


Figure IV.8

IV.4.3 Energie mécanique

Soit \mathbf{F} une force conservative agissant sur une particule de masse m . D'après le théorème de l'énergie cinétique, le travail de \mathbf{F} entre deux points A et B s'écrit :

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) \tag{IV-22}$$

Comme la force \mathbf{F} est conservative, le travail entre A et B s'écrit comme une différence d'une énergie potentielle E_p associée à cette force :

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) \tag{IV-23}$$

D'après les relations (IV-22) et (IV-23) nous avons :

$$E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) \Rightarrow E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) \tag{IV-24}$$

Cette dernière relation s'écrit aussi sous la forme :

$$(E_c + E_p)_B = (E_c + E_p)_A \Rightarrow E_c + E_p = \text{constante} \tag{IV-25}$$

La quantité $E_c + E_p = E_M$ est appelée énergie mécanique de la particule. C'est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. Si la particule est soumise à une force

conservative, son énergie mécanique est constante (conservée). Ceci traduit le théorème de la conservation de l'énergie mécanique qui s'écrit de façon simplifiée :

$$\Delta E_M = 0 \quad (IV-26)$$

Remarque 1

Si plusieurs forces conservatives F_i agissent sur une particule, on peut montrer que l'énergie mécanique de la particule est conservée.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots \quad (IV-27)$$

A chaque force F_i est associée une énergie potentielle E_{pi} et le travail de F entre deux points A et B s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum \int_A^B \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \sum [E_{pi}(A) - E_{pi}(B)] = \\ \sum E_{pi}(A) - \sum E_{pi}(B) &= E_p(A) - E_p(B) \Rightarrow E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) \Rightarrow \\ E_M(A) &= E_M(B) \end{aligned} \quad (IV-28)$$

L'énergie potentielle E_p de la particule est donnée dans ce cas par :

$$E_p = \sum E_{pi} \quad (IV-29)$$

Remarque 2

Si parmi les forces F_i agissant sur une particule, une force ne dérive pas d'un potentiel (force non conservative) le principe de conservation de l'énergie mécanique n'est plus applicable en général. C'est le cas par exemple où une force de frottement agit sur la particule. Mais il convient de souligner que le principe de conservation de l'énergie mécanique reste applicable si la force en question effectue un travail toujours nul entre A et B comme les cas de la réaction normale à une surface ou de la tension du fil d'un pendule.

IV.4.3.1 Théorème de la variation de l'énergie mécanique

Soit F la résultante des forces agissant sur une particule. Cette résultante est en général composée de trois types de forces :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nc} + \mathbf{F}_{nul} \quad (IV-30)$$

F_c est la résultante des forces conservatives.

F_{nc} est la résultante des forces non conservatives.

F_{nul} est la résultante des forces qui effectuent un travail nul sur n'importe quel trajet.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre deux points A et B permet d'écrire :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\mathbf{F}) = W_{AB}(\mathbf{F}_c) + W_{AB}(\mathbf{F}_{nc}) + W_{AB}(\mathbf{F}_{nul}) \quad (IV-31)$$

$$W_{AB}(\mathbf{F}_{nul}) = 0 \quad (IV-32)$$

$$W_{AB}(\mathbf{F}_c) = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \quad (IV-33)$$

où E_p est la somme des énergies potentielles associées aux forces conservatives.

La relation (IV-31) s'écrit alors :

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W_{AB}(\mathbf{F}_{nc}) \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) = \Delta E_M = W_{AB}(\mathbf{F}_{nc}) \quad (IV-34)$$

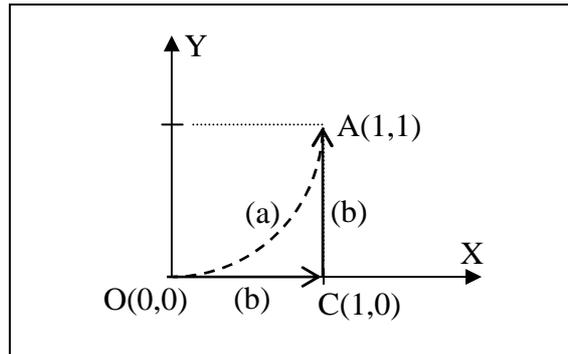
La variation de l'énergie mécanique de la particule est égale au travail des forces non conservatives.

EXERCICES CORRIGÉS

Exercice IV-1

Calculer le travail de la force $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ de l'origine O(0,0) au point A(1,1) suivant deux chemins différents :

- a) La courbe d'équation $y = x^3$.
- b) La droite OC puis la droite CA avec C(1,0).



Solution

$$W_{OA}(\mathbf{F}) = \int_0^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^A (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \int_0^A ydx + xdy \quad (a)$$

a) Le chemin suivi est la droite d'équation $y = x^3$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx, \text{ } x \text{ et } y \text{ varient de } 0 \text{ à } 1.$$

L'expression (a) s'écrit alors :

$$W_{OA}(\mathbf{F}) = \int_0^1 x^3 dx + x(3x^2) dx = \int_0^1 4x^3 dx = [x^4]_0^1 = 1 \text{ joule}$$

b) Le chemin suivi est la droite OC puis la droite CA :

$$W_{OA}(\mathbf{F}) = \int_0^C ydx + xdy + \int_C^A ydx + xdy \quad (b)$$

Sur le chemin OC, $y = 0$, $dy = 0$ et x varie de 0 à 1. La première intégrale à droite de l'équation (b) s'annule.

Sur le chemin CA, $x = 1$, $dx = 0$ et y varie de 0 à 1. L'équation (b) donne alors :

$$W_{OA}(\mathbf{F}) = \int_0^1 dy = 1 \text{ joule}$$

Exercice IV-2

Retrouver l'expression de l'énergie potentielle mg_0z de la force de poids au voisinage de la surface de la terre à partir de l'énergie potentielle de gravitation $-GMm/r$.

Solution

La distance r s'écrit : $r = R + z$ où R est le rayon de la masse M (terre) et z est la hauteur de m par rapport à la surface de M . L'énergie potentielle s'écrit donc :

$$E_p(z) = -\frac{GMm}{R+z} + \text{constante} = -\frac{GMm}{R(1+\frac{z}{R})} + \text{constante} = -\frac{GMm}{R} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{R}}\right) + \text{constante}$$

Au voisinage de la surface de M, nous avons $z \ll R$ ($z/R \ll 1$) et donc $\frac{1}{1+z/R} \approx 1 - z/R$,

alors :

$$E_p(z) \approx -\frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{z}{R}\right) + \text{constante} = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm z}{R^2} + \text{constante} \quad (a)$$

Si M représente la masse de la terre, nous avons vu au paragraphe III.5 que $\frac{GM}{R^2} = g(z = 0) = g_0$. D'autre part, le terme $-\frac{GMm}{R}$ de la relation (a) est une constante. On retrouve ainsi l'expression de l'énergie potentielle de la force de poids au voisinage de la surface de la terre : $E_p(z) = mg_0 z + \text{constante}$

Exercice IV-3

Trouver l'énergie potentielle associée à la force conservative suivante : $\mathbf{F} = (y - 2x)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Solution

On peut vérifier d'abord que cette force est conservative ($\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$).

Soit $E_p(x, y)$ l'énergie potentielle associée à \mathbf{F} . D'après les relations (IV-11), nous avons :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -F_x = 2x - y \quad (a)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = -F_y = -x \quad (b)$$

L'intégration de l'équation (a) par rapport à x donne :

$$E_p(x, y) = x^2 - xy + f(y) \quad (c)$$

Où $f(y)$ est une fonction qui ne dépend pas de x.

De même, l'intégration de (b) par rapport à y donne :

$$E_p(x, y) = -xy + g(x) \quad (d)$$

Où $g(x)$ est une fonction qui ne dépend pas de y.

En comparant (c) et (d), nous pouvons déduire que :

$f(y) = \text{constante}$ et $g(x) = x^2 + \text{constante}$ et donc :

$$E_p(x, y) = x^2 - xy + \text{constante}$$

Exercice IV-4

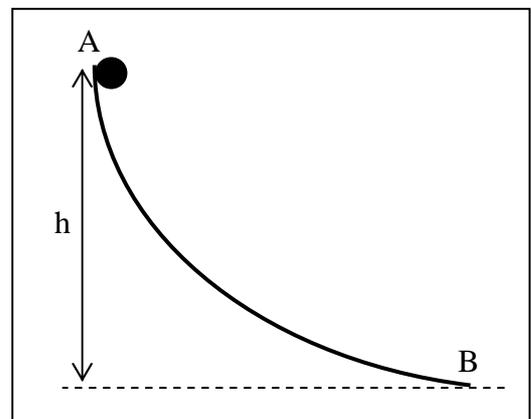
Sur la piste de la figure ci-contre, une bille de masse m assimilée à un point matériel est lâchée sans vitesse initiale au point A et parvient au point B avec une vitesse v_B égale à 6 m/s.

La différence d'altitudes entre A et B est $h = 2$ m.

On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1) Montrer que le point matériel est soumis à des forces de frottements.

2) Calculer le travail de ces forces de frottements



entre les points A et B si $m = 3 \text{ kg}$.

Solution

1) Pour montrer que le point matériel est soumis à des forces de frottement, il suffit de montrer que l'énergie mécanique n'est pas conservée entre A et B. Si l'altitude du point B est prise comme étant la référence d'énergie potentielle nulle ($h_B = 0$, $h_A = h$), nous avons :

$$E_M(A) = mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh + 0 = 20m, \text{ où } m \text{ est la masse de la bille.}$$

$$E_M(B) = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 = 18m$$

L'énergie mécanique en B est inférieure à sa valeur correspondante en A. L'énergie mécanique n'est donc pas conservée. Cette perte d'énergie mécanique est due à la présence de frottements.

2) Le théorème de la variation de l'énergie mécanique entre A et B s'écrit :

$$\Delta E_M = W(\mathbf{F}_{frott}) = E_M(B) - E_M(A) = 18m - 20m = -2m$$

Le travail des forces de frottements est donc (avec $m = 3 \text{ kg}$) :

$$W(\mathbf{F}_{frott}) = -2m = -6 \text{ joule}$$

ANNEXE

LEXIQUE DE TERMINOLOGIE FRANÇAIS-ARABE

LEXIQUE DE TERMINOLOGIE FRANÇAIS-ARABE**A**

Abscisse curviligne	فاصلة منحنى
Accélération	تسارع
Accélération moyenne	تسارع متوسط
Accélération instantanée	تسارع لحظي
Accélération normale	تسارع نظامي
Accélération tangentielle	تسارع مماسي
Action	فعل
Angle	زاوية
Arc	قوس
Artificiel	اصطناعي
Axe	محور
Axe de rotation	محور الدوران

B

Base	قاعدة
Base intrinsèque	قاعدة ذاتية
Base locale	قاعدة محلية
Base orthonormée	قاعدة متعامدة ممنظمة

C

Chaleur	حرارة
Champ de forces	حقل القوى
Champ scalaire	حقل سلمي
Champ vectoriel	حقل شعاعي
Charge électrique	شحنة كهربائية
Chemin (entre deux points)	مسلك أو سبيل (بين نقطتين)
Chute libre	سقوط حر
Cinématique	حركية
Cinétique	تحريكي
Constante de raideur d'un ressort	ثابت المرونة أو الصلابة لنابض
Coefficient de frottement	معامل الاحتكاك
Combinaison linéaire	تأليفية خطية
Commutativité	تبادلية
Composantes d'un vecteur	مركبات شعاع
Coordonnées	إحداثيات
Coordonnées cartésiennes	إحداثيات ديكارتية
Coordonnées cylindriques	إحداثيات أسطوانية
Coordonnées polaires	إحداثيات قطبية
Coordonnées sphériques	إحداثيات كروية
Coplanaires	مستوئي

D

Déplacement	إنتقال
Dérivée	مشتقة

Dérivée partielle	مشتقة جزئية
Différentielle	تفاضل
Différentielle totale	تفاضل كلي
Dimensions	أبعاد
Direction	منحى
Distributivité	توزيعة
Divergence	تباعد
Double produit vectoriel	ضعف الجداء الشعاعي
Dynamique (adj.)	تحريكي
Dynamique (nom)	تحريك (ديناميك)

E

Electricité	كهرباء
Energie	طاقة
Energie cinétique	طاقة حركية
Energie mécanique	طاقة ميكانيكية
Energie potentielle	طاقة كامنة
Energie potentielle de gravitation	الطاقة الكامنة التجاذبية
Energie potentielle élastique (ressort)	الطاقة الكامنة المرورية (نابض)
Equateur	خط الاستواء
Equation aux dimensions	معادلة الأبعاد
Equation de la trajectoire	معادلة المسار
Etalon	معيار
Etat fondamental	حالة أساسية أو أصلية

F

Fluide	مائع
Fonction scalaire	دالة سلمية أو عددية
Fonction vectorielle	دالة شعاعية
Force	قوة
Force centrale	قوة مركزية
Force conservative	قوة محافظة
Force de contact	قوة الإلتماس
Force de rappel (d'un ressort)	قوة الارتداد (لنابض)
Force d'inertie	قوة العطالة
Force électrostatique	قوة كهروستاتيكية
Force gravitationnelle	قوة التجاذب أو الجاذبية
Force matérielle	قوة مادية أو ذو أصل مادي
Forme analytique	صيغة تحليلية
Fréquence	تردد
Frottement	إحتكاك
Frottement cinétique (ou dynamique)	إحتكاك حركي أو ديناميكي
Frottement statique	إحتكاك سكوني

G

Géostationnaire	ساكن بالنسبة إلى الأرض
-----------------	------------------------

Gradient إنحدار أو تدرج
 Grandeur physique مقدار أو قدر
 Gravitation تجاذب

H

Homogène متجانس

I

Inertie عطالة
 Intégrale تكامل
 Intensité شدة أو طويلة
 Intensité du courant شدة التيار
 Interaction تفاعل أو تأثير
 Intervalle مجال

L

Latitude خط أو دائرة العرض
 Loi de gravitation universelle قانون التجاذب الكوني
 Longitude خط الطول

M

Masse ponctuelle كتلة نقطية
 Matière مادة
 Mécanique (adj.) ميكانيكي
 Mécanique (nom) الميكانيك
 Méridien de Greenwich خط زوال جرينويتش
 Mobile جسم متحرك
 Module طويلة أو معيار
 Mouvement حركة
 Mouvement accéléré حركة متسارعة
 Mouvement circulaire حركة دائرية
 Mouvement curviligne حركة منحنية
 Mouvement rectiligne حركة مستقيمة
 Mouvement relatif حركة نسبية
 Mouvement retardé (décélééré) حركة متباطئة
 Mouvement uniforme حركة منتظمة
 Mouvement uniformément varié حركة متغيرة بانتظام

N

Naturel طبيعي
 Niveau مستوى
 Normal (adj.) نظامي
 Normale (nom) منظمي

O

Objet libre	جسم حر
Optique (adj.)	ضوئي أو بصري
Optique (nom)	بصريات
Orbite	مدار

P

Parabole	قطع مكافئ
Parallélepède	متوازي المستطيلات
Parallélogramme	متوازي الأضلاع
Période	دور
Perpendiculaire	عمودي
Pesanteur	ثقالة
Physique (adj.)	فيزيائي
Physique (nom)	الفيزياء
Physique quantique	الفيزياء الكمية
Plan	مستوى
Plan équatorial	مستوى استوائي
Point matériel	نقطة مادية
Portée d'un projectile	مدى القذيفة
Position	موضع
Potentiel	جهد
Pression	ضغط
Primitive	أصلية (دالة)
Principe de conservation de l'énergie mécanique	مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية
Principe fondamental de la dynamique	المبدأ الأساسي في التحريك (الديناميك)
Produit mixte	جداء مختلط
Produit scalaire	جداء سلمي
Produit vectoriel	جداء شعاعي
Projectile	قذيفة
Projection	إسقاط أو مسقط
Puissance instantanée	الإستطاعة اللحظية
Puissance moyenne	الإستطاعة المتوسطة

Q

Quantité de mouvement	كمية الحركة
-----------------------	-------------

R

Rayon de courbure	نصف قطر الإنحناء
Rayon vecteur	شعاع الموضع
Réaction	رد الفعل
Référentiel	مرجع
Référentiel absolu	مرجع مطلق
Référentiel galiléen (d'inertie)	مرجع غاليلي (العطالة)
Référentiel géocentrique	مرجع مركزي أرضي

Référentiel relatif	مرجع نسبي
Repère	معلم
Résultante	محصلة
Rotationnel	إلتفاف

S

Satellite	قمر
Scalaire (adj.)	سلمي
Scalaire (nom)	عدد
Sens	اتجاه
Statique (adj.)	ساكن
Statique (nom)	سكون
Surface	مساحة
Symétrie	تناظر
Système isolé	جملة معزولة
Système d'unités	نظام الوحدات

T

Tangent (adj.)	مماس
Tangente (nom)	مماس
Théorème de la variation de l'énergie mécanique	نظرية تغير الطاقة الميكانيكية
Théorème de l'énergie cinétique	نظرية الطاقة الحركية
Trajectoire	مسار
Transition	إنتقال
Travail	عمل

U

Unités dérivées	وحدات مشتقة
Unités fondamentales	وحدات أساسية

V

Valeur absolue	قيمة مطلقة
Variable	متغير
Vecteur	شعاع
Vecteur unitaire	شعاع واحد
Vitesse	سرعة
Vitesse absolue	سرعة مطلقة
Vitesse angulaire	سرعة زاوية
Vitesse d'entraînement	سرعة الجر
Vitesse initiale	سرعة ابتدائية
Vitesse instantanée	سرعة لحظية
Vitesse moyenne	سرعة متوسطة
Vitesse relative	سرعة نسبية
Volume	حجم

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. Bouda ; La mécanique, notions de base et applications, Éditions de l'Office des Publications Universitaires 2007.
- [2] J. L. Caubarrere, J. Fourny, H. Djelouah et F. Z. Khelladi ; Introduction à la mécanique (cours, exercices et travaux pratiques), Éditions de l'Office des Publications Universitaires 1981.
- [3] D. Halliday et R. Resnick ; Mécanique, Editions du renouveau pédagogique.
- [4] M. Alonso et E. J. Finn ; Physique générale Tome 1 Mécanique, Éditions Dunod.
- [5] M. R. Spiegel ; Théorie et applications de la mécanique générale, Éditions McGraw- Hill.
- [6] C. Kittel, W. D. Knight et M. A. Ruderman ; Cours de physique Volume 1 Mécanique, Éditions Armand Colin.
- [7] M. Cabane et J. M. Mouren ; Initiation à la physique, rappels de cours et exercices corrigés Tome 1 Mécanique, Éditions McGraw Hill.
- [8] J. I. Queyrel et J. Mesplede ; Précis de physique, Mécanique cours et exercices résolus, Éditions Bréal.
- [9] C. Gruber et W. Benoit ; Mécanique générale, Éditions des Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR).
- [10] J. M. Brèbec et al. ; Mécanique, Éditions Hachette Supérieur.
- [11] C. Clerc et P. Clerc ; Mécanique, Éditions Bréal.
- [12] R. Basquin ; Mécanique 1^{ère} partie, Éditions Delagrave.
- [13] J. Boutigny ; Cours de physique Tome 1 Mécanique, Éditions Vuibert.
- [14] J. Kane et M. Sternheim ; Physique, Éditions Dunod.
- [15] I. Derycke et J. P. Vigneron ; Physique exercices et problèmes résolus, Éditions Dunod.
- [16] D. Sivoukhine ; Cours de physique générale Tome 1 Mécanique, Éditions Mir Moscou.
- [17] José-Philippe Pérez ; Mécanique, fondements et applications, Éditions Dunod.
- [18] Alain Thionnet ; Mécanique du point, Éditions Ellipses.
- [19] M. Bertin, J. P. Faroux et J. Renault ; Mécanique du point, Éditions Dunod Université.
- [20] Hubert Gié et Jean-Pierre Sarmant ; Mécanique (1^{ère} année), Éditions TD-Lavoisier.
- [21] Alain Gibaud et Michel Henry ; Cours de Physique Mécanique du point, Éditions Dunod.