Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie, Département de Technologie

Année universitaire 2015-2016
Mai 2016

Corrigé de l'examen de MATHS 2

Exercice n° 1.

1. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' = 12x - 10. \tag{1}$$

(a) Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (1) : L'équation homogène associée à (1) est

$$y'' - 2y' = 0 \;\;\ldots\ldots\ldots(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - 2r = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(C)$$

(C) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Donc la solution générale de (E_0) est

1,5

$$y_0(x) = C_1e^{0x} + C_2e^{2x} = C_1 + C_2e^{2x},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Détermination des constantes α et β pour que $y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x$ soit une solution particulière de (1) : On a

$$y_1'(x) = 2\alpha x + \beta \;\text{ et }\; y_1''(x) = 2\alpha.$$

Donc on aura

$$\begin{aligned} y_1'' - 2y_1' = 12x - 10 &\Leftrightarrow 2\alpha - 2(2\alpha x + \beta) = 12x - 10 \\ &\Leftrightarrow -4\alpha x + 2\alpha - 2\beta = 12x - 10 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4\alpha = 12 \\ 2\alpha - 2\beta = -10 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

1

Donc

$$y_1(x) = -3x^2 + 2x.$$

(c) Détermination de la solution générale de (1) : La solution générale de (1) est

0,5

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_0(x) + y_1(x) \\ &= C_1 + C_2e^{2x} - 3x^2 + 2x,\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Cherchons la solution de (1) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 4$. On a

$$y'(x) = 2C_2e^{2x} - 6x + 2.$$

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Finalement, la solution est

1

$$y(x) = e^{2x} - 3x^2 + 2x.$$

2. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' + 2xy = x. \tag{2}$$

L'équation homogène associée est

$$y' + 2xy = 0....... \; (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -2x \implies \frac{dy}{y} &= -2xdx \\ \implies \ln|y| &= -x^2 + K_1, \; K_1 \in \mathbb{R} \\ \implies y &= C_1 e^{-x^2}, C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0) . Finalement, la solution générale de (E_0) est 1,5

$$y(x) = ce^{-x^2}, \; c \in \mathbb{R}.$$

On fait varier la constante c et la solution générale de (2) sera $y(x) = c(x)\, e^{-x^2}$.
On a $y' = C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$. Par suite

$$\begin{aligned} y' + 2xy = x \implies C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} &= x \\ \implies C'(x) &= xe^{x^2} \\ \implies C(x) &= \tfrac{1}{2}e^{x^2} + K, \; K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (2) est 1,5

$$y(x) = (\frac{1}{2}e^{x^2} + K)e^{-x^2} = \frac{1}{2} + Ke^{-x^2}, \; K \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 2. Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculons I_0 et I_1 : On a

$$I_0 = \int_0^1 \sin \pi x dx = \left.\frac{-\cos \pi x}{\pi}\right|_0^1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$ 0,5

$$I_1 = \int_0^1 x \sin \pi x dx.$$

Posons

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\implies f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin \pi x \quad &\implies g(x) = \frac{-\cos \pi x}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \left.\frac{-x\cos \pi x}{\pi}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi x}{\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \left.\frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right|_0^1 = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$ 1

2. Montrons que $\pi^2 I_n = \pi - (n-1)nI_{n-2}$: Posons

$$\begin{aligned} f(x) = x^n \quad &\implies f'(x) = nx^{n-1} \\ g'(x) = \sin \pi x \quad &\implies g(x) = \frac{-\cos \pi x}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_n &= \left.\frac{-x^n\cos\pi x}{\pi}\right|_0^1 + \frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi}+\frac{n}{\pi}J_n, \text{ où } J_n=\int_0^1 x^{n-1}\cos\pi x dx. \end{aligned}$$

Calcul de J_n : Posons

$$\begin{aligned} u(x) = x^{n-1} &\Longrightarrow u'(x) = (n-1)x^{n-2} \\ v'(x) = \cos\pi x &\Longrightarrow v(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi}. \end{aligned}$$

2,5

Donc

$$\begin{aligned} J_n &= \left.\frac{x^{n-1}\sin\pi x}{\pi}\right|_0^1 - \frac{(n-1)}{\pi}\int_0^1 x^{n-2}\sin\pi x dx \\ &= -\frac{(n-1)}{\pi}I_{n-2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$I_n = \frac{1}{\pi}-\frac{n}{\pi}\frac{(n-1)}{\pi}I_{n-2},$$

c'est à dire

$$\pi^2 I_n = \pi - n(n-1)I_{n-2}.$$

3. Déduction de I_2 et I_3 : On a

$$\begin{aligned} \pi^2 I_2 &= \pi - 2(2-1)I_0 \\ &= \pi - \frac{4}{\pi}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$I_2 = \frac{\pi^2-4}{\pi^3}.$$

0,5

On a

$$\begin{aligned} \pi^2 I_3 &= \pi - 3(3-1)I_1 \\ &= \pi - \frac{6}{\pi}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$I_3 = \frac{\pi^2-6}{\pi^3}.$$

0,5

Exercice n° 3.

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Démontrons que A est inversible et calculons son inverse : Développement suivant la première colonne

1

$\det A = 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -1.$ $\det A \neq 0$, donc A est inversible.

0,5

On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(comA),$$

avec

$$comA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

A_{ij} désigne la matrice d'ordre 2 déduite de A en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne. Après calculs, on trouve

$$ComA = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ {}^t(comA) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ 1

(b) Déduction de la solution du système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ -2x + y - z = 1 \\ -2x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

On a

$$(S) \Longleftrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ 1,5

Remarque : On peut utiliser aussi la méthode de Cramer.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résolution suivant les valeurs de α du système suivant :

$$(S_\alpha)\begin{cases} 2x + y + \alpha z = 1 \\ -\alpha x + y - 2z = -2 \\ \alpha x - 3y + 4z = 4. \end{cases}$$

On a

$$(S_\alpha) \Longleftrightarrow A_\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 & -2 \\ \alpha & -3 & 4 \end{pmatrix}$$ 1

On a $\det A_\alpha = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -\alpha & -2 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ \alpha & -3 \end{vmatrix} = 2(\alpha+2)(\alpha-1).$

i) Si $\alpha \neq -2$ et $\alpha \neq 1$ (i.e., $\det A_\alpha \neq 0$) alors (S_α) est un système de Cramer et admet une unique solution donnée par

0,5 0,5 0,5

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{2(\alpha+2)(\alpha-1)} = \frac{1}{\alpha+2}, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ -\alpha & -2 & -2 \\ \alpha & 4 & 4 \end{vmatrix}}{2(\alpha+2)(\alpha-1)} = \frac{-\alpha}{\alpha+2}, z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & -2 \\ \alpha & -3 & 4 \end{vmatrix}}{2(\alpha+2)(\alpha-1)} = \frac{2}{\alpha+2}.$$

ii) Si $\alpha = 1$: On a

$$(S_1) \Longleftrightarrow A_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_1 = 0$, donc le système (S_1) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_1 on trouve

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \det M_1 = 3.$$

M_1 est associée au système

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 1 - z, \\ -x + y = -2 + 2z. \end{cases}$$

Les deux inconnues $x,\ y$ sont les inconnues principales et z est un paramètre. (1) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = 1 - z$ et $y = -1 + z$.
On porte cette solution $(x,\ y)$ dans la troisième équation du système (S_1)

$$x - 3y + 4z = (1 - z) - 3(-1 + z) + 4z = 1 - z + 3 - 3z + 4z = 4.$$

Finalement, (S_1) admet une infinité de solutions

$$\{(1 - z, -1 + z, z),\ z \in \mathbb{R}\}.$$

ii) Si $\alpha = -2$: On a

$$(S_{-2}) \Longleftrightarrow A_{-2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_{-2} = 0$, donc le système (S_{-2}) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_{-2} on trouve

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \det M_2 = -4.$$

M_2 est associée au système

$$(2) \begin{cases} 2x + y = -2 + 2z, \\ -2x - 3y = 4 - 4z. \end{cases}$$

Les deux inconnues $x,\ y$ sont les inconnues principales et z est un paramètre. (2) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z$ et $y = -1 + z$.
On porte cette solution $(x,\ y)$ dans la première équation du système (S_{-2})

$$2x + y - 2z = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z\right) + (-1 + z) - 2z = -1 + z - 1 + z - 2z = -2 \neq 1.$$

Finalement, le système (S_{-2}) n'admet pas de solutions.
Remarque : On peut remarquer que les deux premières équations du système (S_{-2}) sont incompatibles, donc (S_{-2}) n'admet pas de solutions.

1

0,5