Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

Interrogation № 1 d'analyse 1
2019/2020

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Nom :........................ Prénom :........................ Groupe :..............

<u>Exercice :</u> (06 points). Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le minimum, le maximum, s'ils existent (en justifiant, si nécessaire, vos réponses en utilisant la caractérisation de la borne supérieure ou inférieure).

$$A_1 = \left[\sqrt{3}, 4\right] \cap \mathbb{Q}, \qquad A_2 = \{\sin(n\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

<u>Réponse :</u>

1) $A_1 = \left[\sqrt{3}, 4\right] \cap \mathbb{Q} = \left\{r \in \mathbb{Q}\,;\ \sqrt{3} < r \le 4\right\}.\ On\ a\ 4 \in A_1 \Longrightarrow A_1 \neq \emptyset. On\ a\ aussi$

$$\forall x \in A_1 : \sqrt{3} < x \le 4\ et\ donc\ A_1 est\ major\acute{e}e\ et\ minor\acute{e}e \Longrightarrow \inf A_1\ \ et \sup A_1\ existent.$$

- $\left.\begin{matrix} 4\ est\ un\ majorant\ de\ A_1 \\ et\ 4 \in A_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \max A_1 = 4.$ **01 pt**
- $\max A_1 = 4 \Longrightarrow \sup A_1 = 4.$ **0,5 pt**
- Montrons que $\inf A_1 = \sqrt{3}$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

  $\inf A_1 = \sqrt{3} \iff \begin{cases} i)\ \forall x \in A_1 : x \ge \sqrt{3}\ \text{(vérifiée par définition de } A_1\text{)}, \\ ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A_1 : x_0 < \sqrt{3} + \varepsilon. \end{cases}$ **0,5 pt**

Soit $\varepsilon > 0$.

- <u>1er cas : $\sqrt{3} < \sqrt{3} + \varepsilon \le 4$</u>

$\left.\begin{matrix} (\sqrt{3} + \varepsilon) \in \mathbb{R} \\ \sqrt{3} \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{densit\acute{e}\ de\ \mathbb{Q}\ dans\ \mathbb{R}} \exists r_0 \in \mathbb{Q} :\ \sqrt{3} < r_0 < \sqrt{3} + \varepsilon.$

On a : $r_0 \in A_1$, $car\ (r_0 \in \mathbb{Q}\ et\ \sqrt{3} < r_0 \le 4)$,

et puisque $r_0 < \sqrt{3} + \varepsilon$, alors on prend $x_0 = r_0$. Et ii) est donc vérifiée. **01 pt**

- <u>2ème cas : $\sqrt{3} + \epsilon > 4$.</u>

Dans ce cas on a : $\forall x \in A_1, x < \sqrt{3} + \varepsilon$. Et ii) est vérifiée. **0,5 pt**

- $\inf A_1 = \sqrt{3} \notin A_1 \Longrightarrow \min A_1\ \ n'existe\ pas.$ **0,5 pt**

2) $A_2 = \{\sin(n\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
On a : $\sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, alors

$$A_2 = \{0\}.$$ **01 pt**

A_2 est un singleton (ensemble fini contenant un seul élément).

Par conséquent,

$\max A_2 = \min A_2 = \sup A_2 = \inf A_2 = 0\,.$ **01 pt**

Enseignant : Mr. Boukhelifa.