

Université de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Support Pédagogique pour le niveau L2 Physique :

SYSTÈMES DE POINTS
ET
APPLICATION AU SOLIDE
(Résumé de Cours et Exercices Résolus)

Réalisé par
M. Belabbas Abdelmoumene

Septembre 2019

Avant propos

Ce Support Pédagogique, intitulé : Systèmes de Points et Application au Solide (Résumé de Cours et Exercices Résolus), comporte trois parties :

1. Résumé de cours.
2. Exercices avec solutions.
3. Examens types avec solutions.

Ce document de 106 pages couvre une bonne partie du programme d'un enseignement que j'ai assuré au Département de Physique de 2009 jusqu'à 2014 (Niveau L2 de Physique Fondamentale) et il a été rédigé dans l'intention d'être à la fois accessible aux étudiants inscrits en L2 de Physique en le considérant comme une partie bien détaillée du module de Mécanique Analytique, ainsi qu'aux étudiants du niveau L1, en tronc commun SM, pour s'exercer sur les intégrales simples et multiples.

Comme la littérature disponible couvrant la Mécanique des corps rigides est très riche, nous avons donc opté pour consacrer le premier Chapitre à un résumé de cours concis qui a pour but principal de rappeler de manière claire et efficace les idées de base essentielles. Pour des exposés à la fois détaillés et exhaustifs nous encourageons les étudiants à consulter, à titre indicatif, les références bibliographiques suivantes : [1]-[8]. Nous avons délibérément fait le choix d'axer ce polycopié sur les exercices de manière à leurs consacrer environ 90% du contenu total, ainsi les Chapitres 2 et 3 sont respectivement consacrés à des exercices et autres examens types. Les solutions et corrigés sont très détaillés et très souvent accompagnés de figures illustratives conçues avec l'aide d'un logiciel libre pour dessins vectoriels. Aux étudiants désireux d'approfondir leurs connaissances en calcul différentiel et Intégral, nous recommandons l'excellent livre d'exercices [9] ainsi que les incontournables références [10] et [11].

Belabbas Abdelmoumene ( <http://orcid.org/0000-0002-7328-7597>)
Laboratoire de Physique Théorique
Faculté des Sciences Exactes
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie

Table des matières

1	Résumé de Cours	5
1.1	Système de Particules	5
1.1.1	Centre de masse	5
1.1.2	Référentiel de Centre de masse	6
1.1.3	Quantité de Mouvement	6
1.1.4	Moment Cinétique	7
1.1.5	Énergie Cinétique	7
1.2	Rotation du Solide	8
1.2.1	Moment d'inertie	8
1.2.2	Moment Cinétique et Tenseur d'inertie	9
1.2.3	Énergie Cinétique	11
1.2.4	Les équations d'Euler	13
2	Exercices avec solutions	15
2.1	Centre de Masse : Systèmes discrets	15
2.1.1	Exercice (Barycentre de 2 masses ponctuelles)	15
2.1.2	Solution exercice (Barycentre de 2 masses ponctuelles)	15
2.1.3	Exercice (Barycentre de 4 masses ponctuelles)	16
2.1.4	Solution exercice (Barycentre de 4 masses ponctuelles)	17
2.1.5	Exercice (Barycentre de 8 masses ponctuelles)	19
2.1.6	Solution exercice (Barycentre de 8 masses ponctuelles)	20
2.1.7	Exercices supplémentaires	22
2.2	Centre de Masse : Systèmes Continus	24
2.2.1	Exercice (Centre de masse d'une tige linéaire)	24
2.2.2	Solution exercice (Centre de masse d'une tige linéaire)	24
2.2.3	Exercice (Centre de masse d'un coude à deux tiges)	25
2.2.4	Solution Exercice (Centre de masse d'un coude à deux tiges)	25
2.2.5	Exercice (Centres de masses d'arcs circulaires)	26
2.2.6	Solution exercice (Centres de masses d'arcs circulaires)	27
2.2.7	Exercice (Centre de masse d'un disque circulaire)	30
2.2.8	Solution exercice (Centre de masse d'un disque circulaire)	30

2.2.9	Exercice (Centres de masses de plaques rectangulaire et triangulaire)	32
2.2.10	Solution exercice (Centres de masses de plaques rectangulaire et triangulaire)	33
2.2.11	Exercice (Centres de masses d'une Couronne ainsi que de segments à deux bases et à une base)	36
2.2.12	Solution exercice (Centres de masses d'une Couronne ainsi que de segments à deux bases et à une base)	37
2.2.13	Exercice (Centre de masse d'une boule sphérique)	41
2.2.14	Solution exercice (Centre de masse d'une boule sphérique)	42
2.2.15	Centres de masses d'un cylindre et cône pleins	43
2.3	Angles d'euler	47
2.3.1	Exercice (Cosinus directeurs et Angles d'euler)	47
2.3.2	Solution Exercice (Cosinus directeurs et Angles d'euler)	48
2.3.3	Démonstration que $A^{-1} = A^t$ pour une transformation orthogonale	49
2.4	Moment d'inertie (par rapport à un axe)	51
2.4.1	Exercice (Moment d'inertie d'une tige linéaire)	51
2.4.2	Solution exercice (Moment d'inertie d'une tige linéaire)	51
2.4.3	Exercice (Moment d'inertie d'un demi-disque)	53
2.4.4	Solution exercice (Moment d'inertie d'un demi-disque)	53
2.4.5	Exercice (Moment d'inertie d'une boule)	54
2.4.6	Solution exercice (Moment d'inertie d'une boule)	55
2.4.7	Exercice Supplémentaire (Moment d'inertie d'un rectangle)	56
2.4.8	Exercice Supplémentaire (Moment d'inertie d'un triangle)	56
2.5	Tenseur d'inertie	57
2.5.1	Exercice (Tenseur d'inertie de solides continus)	57
2.5.2	Solution exercice (Tenseur d'inertie de solides continus)	57
3	Examens types avec solutions	59
3.1	Examen 2009-2010	59
3.1.1	Problème (12 points)	59
3.1.2	Exercice (08 points)	60
3.2	Corrigé Examen 2009-2010	61
3.2.1	Problème (12 points)	61
3.2.2	Exercice (08 points)	64
3.3	Rattrapage 2009-2010	67
3.3.1	Problème (10 points)	67
3.3.2	Exercice (10 points)	68
3.4	Corrigé Rattrapage 2009-2010	68
3.4.1	Problème (10 points)	68
3.4.2	Exercice (10 points)	70
3.5	Examen 2012	71
3.5.1	Problème (12 points)	71
3.5.2	Exercice (08 points)	72

3.6	Corrigé Examen 2012	73
3.6.1	Exercice (12 points)	73
3.6.2	Exercice (08 points)	75
3.7	Examen Remplacement 2012	78
3.7.1	Problème (12 points)	78
3.7.2	Exercice (08 points)	79
3.8	Corrigé Examen Remplacement 2012	79
3.8.1	Problème (12 points)	79
3.8.2	Exercice (08 points)	84
3.9	Examen 2013	85
3.9.1	Exercice (10 points)	85
3.9.2	Exercice (10 points)	86
3.10	Corrigé Examen 2013	87
3.10.1	Exercice (10 points)	87
3.10.2	Exercice (10 points)	89
3.11	Examen 2014	92
3.11.1	Exercice (10 points)	92
3.11.2	Exercice (10 points)	93
3.12	Corrigé Examen 2014	94
3.12.1	Exercice (10 points)	94
3.12.2	Exercice (10 points)	96
3.13	Examen de Rattrapage 2014	100
3.13.1	Exercice (05 points)	100
3.13.2	Problème (15 points)	100
3.14	Corrigé de l'Examen de Rattrapage 2014	101
3.14.1	Exercice (05 points)	101
3.14.2	Problème (15 points)	102

Bibliographie

Chapitre 1

Résumé de Cours

1.1 Système de Particules

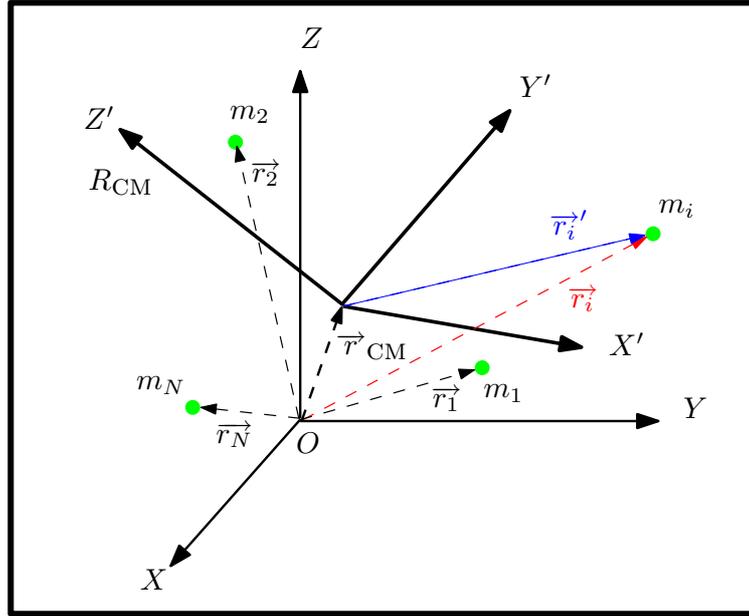
1.1.1 Centre de masse

Dans un référentiel galiléen (R), d'origine O et muni de trois axes orthonormés $(OX), (OY), (OZ)$, soit $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$, les vecteurs positions d'un système à N points matériels de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_N . Le centre de masse¹ CM d'un tel système est le point repéré par le vecteur position (voir Figure 1.1)

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^{-1} = \frac{(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N)}{(m_1 + m_2 + \dots + m_N)} \quad (1.1)$$

Dans le cas d'une distribution continue subdivisée en une infinité de masses infinitésimales dm très rapprochées les unes des autres. En repérant chaque masse infinitésimale quelconque par le vecteur position \vec{r} , alors la position du centre de masse est plutôt $\vec{r}_{\text{CM}} = \left(\int_D dm \vec{r} \right) \left(\int_D dm \right)^{-1}$.

¹Le centre de masse est appelé aussi : barycentre. Dans le cas de masses en mouvements le centre de masse est appelé centre d'inertie, de plus si les masses sont situées dans une région où règne un champ gravitationnel alors nous avons affaire plutôt à un centre de gravité.

FIG. 1.1 – Ensemble de N masses ponctuelles et centre de masse

1.1.2 Référentiel de Centre de masse

C'est un référentiel qui a comme origine le CM lui-même (voir Figure 1.1). Dans un tel référentiel $R_{\text{CM}} = (\text{CM}, X'Y'Z')$ nous pouvons montrer, en utilisant $\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}'_i$, que²

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0}, \quad (1.2)$$

où \vec{r}'_i représente le vecteur position de la particule i dans R_{CM} .

1.1.3 Quantité de Mouvement

En dérivant par rapport au temps le vecteur position (1.1), nous aboutissons à la relation cinématique selon laquelle la quantité de mouvement totale est égale à la masse totale par la vitesse du CM

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = M \vec{V}_{\text{CM}}, \quad (1.3)$$

²En effet, en utilisant (1.1), à savoir $M \vec{r}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{CM}}) + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{\text{CM}}$ alors nous aboutissons à $M \vec{r}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i + M \vec{r}_{\text{CM}}$ ou encore finalement $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0}$, sachant que la masse totale est donnée par $M = \sum_{i=1}^N m_i$.

où $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ est la quantité de mouvement de la particule i et $\vec{V}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{\text{CM}})$ est la vitesse du CM. D'autre part, il est possible de montrer que la force extérieure totale agissant sur le système est égale à la masse totale par l'accélération $\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{V}_{\text{CM}}}{dt}$ du CM

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(\text{ext})} = M \frac{d\vec{V}_{\text{CM}}}{dt}, \quad (1.4)$$

où $\vec{F}_i^{(\text{ext})}$ représente la force extérieure que subit la particule i . Attirons l'attention sur le fait que les forces internes se compensent complètement entre-elles en vertu de la troisième loi de Newton d'action-réaction.

1.1.4 Moment Cinétique

En considérant le même système de N particules précédentes avec les vitesses respectives $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$, dans le repère (R) , alors il est possible de montrer que le moment cinétique total d'un tel système est donné par le premier théorème de Koenig (Voir section (3.7) pour la démonstration)

$$\sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{\text{CM}} \wedge \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{L}_i', \quad (1.5)$$

où $\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$ et $\vec{L}_i' = m_i \vec{r}_i' \wedge \vec{v}_i'$ sont les moments cinétiques respectifs de la particule i par rapport à (R) et R_{CM} . De plus, il est possible d'exprimer, dans (R) , le théorème du moment cinétique comme suit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(\text{ext})}. \quad (1.6)$$

Nous remarquons que les forces internes ne contribuent pas dans la variation du moment cinétique total $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$.

1.1.5 Énergie Cinétique

L'expression de l'énergie cinétique totale $E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$ est donnée par le second théorème de Koenig (Voir section (3.7) pour la démonstration)

$$E_c = \frac{1}{2} M \vec{V}_{\text{CM}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i')^2. \quad (1.7)$$

La différentiation de (1.7) permet d'aboutir au Théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = dW_{\text{ext}} + dW_{\text{int}}. \quad (1.8)$$

Dans le cas d'un corps indéformable, pour lequel les distances mutuelles entre les points matériels demeurent constantes sous l'action de n'importe quelle force extérieure, alors le travail élémentaire des forces internes est nul

$$dW_{\text{int}} = 0,$$

de sorte que la variation de l'énergie cinétique pour un corps rigide est due au travail des forces extérieures. Dans ce cas (1.8) se réduit à :

$$dE_c = dW_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(\text{ext})} \cdot d\vec{r}_i. \quad (1.9)$$

1.2 Rotation du Solide

1.2.1 Moment d'inertie

Considérons le mouvement de rotation circulaire effectué par une particule de masse m autour d'un axe (OZ) avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. On suppose que le mouvement de la particule aura lieu dans le plan XOY perpendiculaire à l'axe de rotation (Voir la Figure 1.2 (a)). En utilisant les coordonnées polaires, il est possible de montrer que le vecteur vitesse

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \quad (1.10)$$

est le produit vectoriel entre le vecteur vitesse angulaire et le vecteur position. En effet, d'une part, le vecteur vitesse (pour la rotation $\rho = cte$) s'écrit en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{\rho}}_{=0} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

alors que d'autre part, nous avons aussi

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = (\dot{\theta} \vec{e}_z) \wedge (\rho \vec{e}_\rho) = \rho \dot{\theta} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho) = \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

• **Le moment cinétique** de la particule par rapport à l'origine, $\vec{L}_O = m \vec{r} \wedge \vec{v}$, se met compte tenu de (1.10) sous la forme :

$$\vec{L}_O = m \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = m [(\vec{r} \wedge \vec{\omega}) \wedge \vec{r}] = m \left[(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{=0} \vec{r} \right]$$

ou encore

$$\vec{L}_O = I_{(OZ)} \vec{\omega} \quad (1.11)$$

où le scalaire $I_{(OZ)} = m r^2$ représente le moment d'inertie de la particule par rapport à l'axe de rotation (OZ).

• **L'énergie cinétique** de la particule $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$, compte tenu de (1.10), se met sous la forme

$$E_c = \frac{1}{2} I_{(OZ)} \omega^2. \quad (1.12)$$

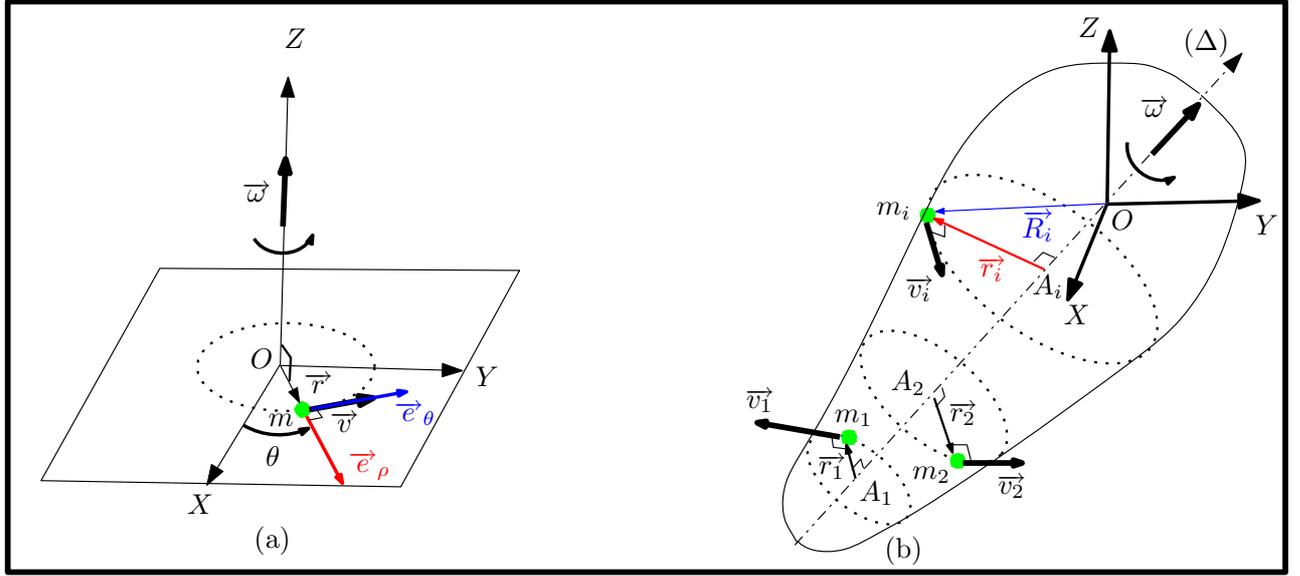


FIG. 1.2 – (a) Une masse ponctuelle en rotation par rapport à l'axe (OZ) . (b) Un corps rigide constitué de masses ponctuelles en rotation par rapport à l'axe (Δ) avec une vitesse angulaire ω .

1.2.2 Moment Cinétique et Tenseur d'inertie

Dans le cas d'un corps rigide constitué de N particules, de masses respectives $m_1, \dots, m_i, \dots, m_N$, en rotation autour d'un axe (Δ) , toutes ces particules ont la même vitesse angulaire $\omega = \|\omega\|$ mais celles-ci ont des vitesses $\|\vec{v}_i\| = r_i \omega$ différentes à cause de leurs distances respectives r_i à l'axe de rotation (Voir la Figure (1.2 (b))). Dans ce cas, le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe (Δ) se généralise à

$$I_{(\Delta)} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

La projection sur l'axe de rotation (Δ) du moment cinétique total, du corps rigide par rapport à l'origine O , nous permet de définir le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation comme suit :

$$L_{(\Delta)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_i \wedge \vec{v}_i) \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{OA}_i + \vec{r}_i) \wedge \vec{v}_i] \cdot \vec{u}$$

où le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation est $\vec{u} = \vec{\omega} / \omega$, ce qui conduit à

$$L_{(\Delta)} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i) \cdot \vec{u}, \quad (1.13)$$

du fait que les vecteurs $(\overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{v}_i)$ et \vec{u} soient perpendiculaires. En généralisant la relation de la vitesse (1.10) pour chaque point i (Voir la Figure (1.2 (b)))

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i, \quad (1.14)$$

alors le moment cinétique (1.13), par rapport à l'axe de rotation (Δ) , se met sous la forme

$$L_{(\Delta)} = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)] \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^N m_i \left[(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)}_{=0} \vec{r}_i \right] \cdot \vec{u}$$

ce qui donne finalement $L_{(\Delta)} = I_{(\Delta)} \omega$ ou encore vectoriellement $\vec{L}_{(\Delta)} = I_{(\Delta)} \vec{\omega}$.

Pour le corps rigide précédent, le moment cinétique total par rapport à l'origine O d'un repère orthonormé $(OXYZ) = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ se calcule comme suit. Il est possible de montrer que la relation (1.14) se généralise sous la forme³ (Voir la Figure (1.2 (b)))

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_i, \quad (1.15)$$

alors le moment cinétique total, par rapport à l'origine O ,

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i \wedge \vec{v}_i$$

se met sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{R}_i \wedge \vec{\omega}) \wedge \vec{R}_i] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_i) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{R}_i) \vec{R}_i], \end{aligned} \quad (1.16)$$

qui désormais ne pourra être simplifiée car dans ce cas les vecteurs \vec{R}_i et $\vec{\omega}$ ne sont pas perpendiculaires. En décomposant le moment cinétique total (1.16) en fonction des composantes de $\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z$, alors il est possible d'aboutir à la relation vectorielle $\vec{L}_O = I \vec{\omega}$ exprimée sous la forme du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

³En effet, nous avons $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{OA_i} + \vec{r}_i) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA_i} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$, car $\vec{\omega} // \overrightarrow{OA_i}$ (vecteurs parallèles).

où le tenseur d'inertie du corps rigide relativement à O est donné par :

$$I = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où le tenseur d'inertie est diagonal alors dans ce cas les axes (OX) , (OY) et (OZ) sont dits axes principaux d'inertie.

D'une manière générale, le moment cinétique \vec{L}_O d'un solide n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$. Dans le cas par exemple où le solide tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$, alors dans ce cas le moment cinétique (1.17) devient $\vec{L}_O = I_{zz} \vec{\omega}$ où I_{zz} représente le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (OZ) ; dans ce cas particulier \vec{L}_O et $\vec{\omega}$ sont parallèles ($\vec{L}_O // \vec{\omega}$).

Dans le cas d'un système continu, le corps rigide est subdivisé en une infinité de masses ponctuelles dm dont chacune est repérée par le vecteur position $\vec{r}(x, y, z)$, ainsi le tenseur d'inertie se met plutôt sous la forme

$$I = \begin{pmatrix} \int_D dm (y^2 + z^2) & -\int_D dm xy & -\int_D dm xz \\ -\int_D dm xy & \int_D dm (x^2 + z^2) & -\int_D dm yz \\ -\int_D dm xz & -\int_D dm yz & \int_D dm (x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Énergie Cinétique

L'énergie cinétique de rotation d'un corps rigide $E_c = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$, compte tenu de (1.15), se met sous la forme

$$E_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Dans le cas d'un mouvement rectiligne la masse exprime la capacité d'un point ponctuel à s'opposer aux causes responsables du mouvement. En effet, en soumettant deux points

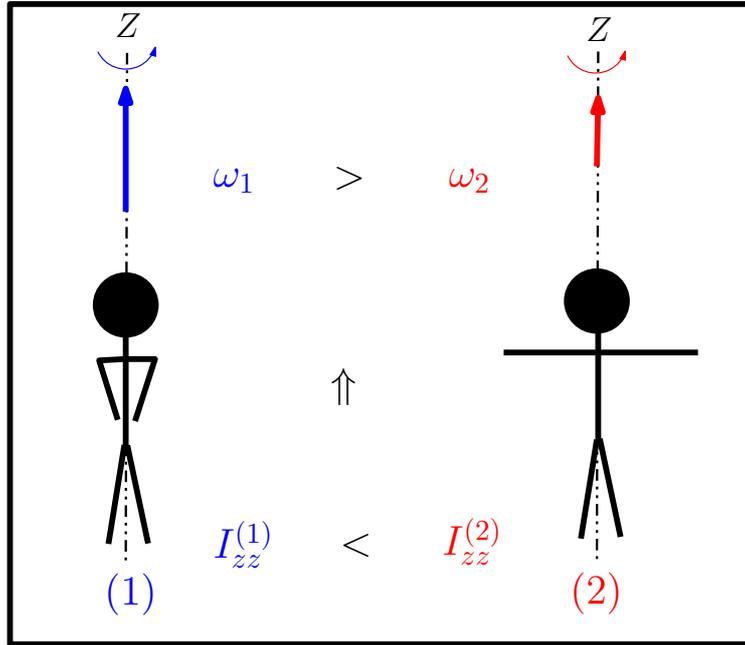


FIG. 1.3 – (1) Cas de figure où le patineur rapproche le maximum de points de son corps de l'axe de rotation Z pour augmenter sa vitesse de rotation. (2) Cas de figure où le patineur éloigne le maximum de points de son corps de l'axe de rotation Z pour diminuer sa vitesse de rotation.

ponctuels de masses respectives m_1 et m_2 , tel que $m_1 < m_2$, à la même force \vec{F} , alors elles vont subir les accélérations respectives $\vec{a}_1 = \vec{F}/m_1$ et $\vec{a}_2 = \vec{F}/m_2$, dans ce cas, il est clair que le point de masse supérieure manifeste une opposition (inertie) plus grande à la cause (force) qui provoque son mouvement, car $\|\vec{a}_1\| > \|\vec{a}_2\|$.

Dans le cas où le solide tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$, alors dans ce cas l'énergie cinétique (1.18) se réduit à $E_c = \frac{1}{2} I_{zz} \vec{\omega}^2$; on remarque que le moment d'inertie I_{zz} joue un rôle analogue à la masse dans l'expression $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2$. Une application de ce résultat est bien connue en patinage artistique où on distingue deux cas de figures décrits par deux vecteurs de rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ autour de l'axe (OZ) (Voir Figure (1.3)). En supposant que le système est isolé de telle sorte que l'énergie cinétique de rotation soit conservée, alors

$$E_c = \frac{1}{2} I_{zz}^{(1)} \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_{zz}^{(2)} \omega_2^2.$$

Nous remarquons que

$$I_{zz}^{(1)} < I_{zz}^{(2)} \Rightarrow \omega_1 > \omega_2.$$

Dans un premier temps, pour faire le maximum de tours, en l'occurrence trois tours, le patineur a intérêt à augmenter sa vitesse angulaire $\omega_1 = \sqrt{2E_c/I_{zz}^{(1)}}$ en diminuant son moment d'inertie $I_{zz}^{(1)}$ par rapport à l'axe de rotation (techniquement ceci se fait en rapprochant ses

deux mains de son corps). Ensuite pour atterrir, le patineur a plutôt intérêt à diminuer sa vitesse angulaire $\omega_2 = \sqrt{2E_c/I_{zz}^{(2)}}$ en augmentant son moment d'inertie $I_{zz}^{(2)}$ par rapport à l'axe de rotation (techniquement ceci se fait en écartant ses deux mains de son corps).

Dans le cas général d'un corps rigide en rotation, l'opposition au mouvement (inertie) ne s'exprime pas de la même manière selon les différentes directions de l'espace ; elle s'exprime en fonction des éléments du tenseur d'inertie.

1.2.4 Les équations d'Euler

Pour un système de N points matériels, en exprimant le théorème du moment cinétique (1.6) dans la base particulière orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sur les axes principaux d'inertie, de sorte que le moment cinétique soit :

$$\vec{L}_O = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 + I_3 \vec{\omega}_3 = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \vec{e}_i.$$

D'autre part, le moment des forces extérieures se décompose dans la même base comme suit $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^3 M_i \vec{e}_i$. Dans ce cas le théorème du moment cinétique devient :

$$\sum_{i=1}^3 M_i \vec{e}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \left(I_i \dot{\omega}_i \vec{e}_i + I_i \omega_i \dot{\vec{e}}_i \right)$$

sachant que⁴ $\dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \omega_j \vec{e}_j \wedge \vec{e}_i$ se met sous la forme

$$\sum_{i=1}^3 M_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 I_i \dot{\omega}_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j \vec{e}_j \wedge \vec{e}_i \right)$$

ce qui conduit finalement aux équations d'Euler

$$M_1 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_3 \omega_2 \quad (1.19)$$

$$M_2 = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3 \quad (1.20)$$

$$M_3 = I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1 \omega_2 \quad (1.21)$$

car $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{0}$. Dans le cas $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ (pas de couple de forces) et $I_1 = I_2 = cte \neq I_3$, alors (1.21) conduit à

$$\omega_3 = cte,$$

⁴Par exemple dans le cas de la base locale des coordonnées cylindriques nous avons d'une part $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et d'autre part $\vec{\omega} \wedge \vec{e}_\rho = (\dot{\theta} \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

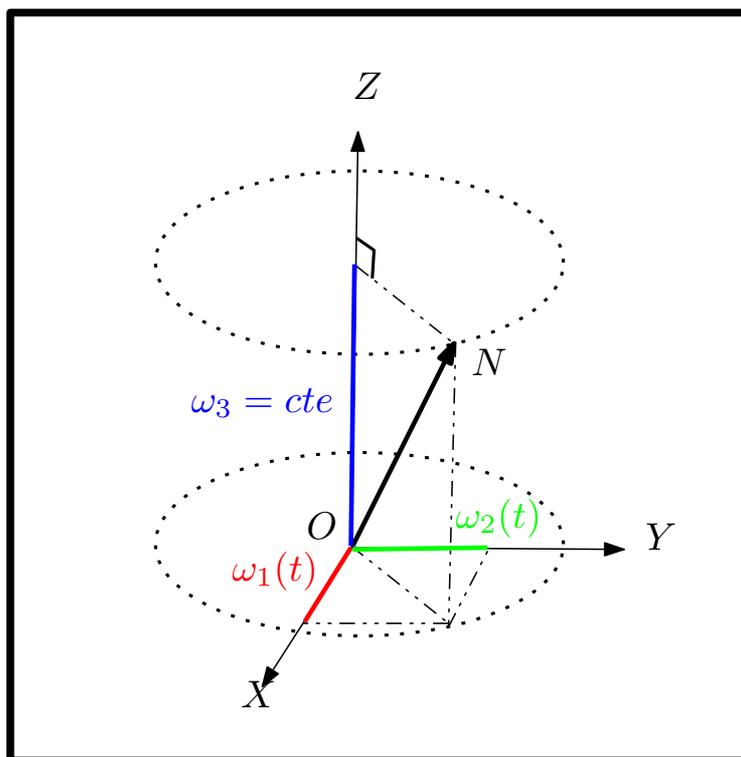


FIG. 1.4 – En absence de couple de forces, le vecteur vitesse angulaire décrit un cône d'axe (OZ)

alors que la dérivée par rapport au temps respectivement de (1.19) et (1.20) donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \left[\left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \omega_3 \right] \omega_2 = \Omega \omega_2 \Rightarrow \frac{d^2\omega_1}{dt^2} = -\Omega^2 \omega_1 \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \left[\left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) \omega_3 \right] \omega_1 = -\Omega \omega_1 \Rightarrow \frac{d^2\omega_2}{dt^2} = -\Omega^2 \omega_2 \end{aligned}$$

ce qui conduit aux solutions sinusoidales

$$\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \text{ et } \omega_2(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$$

où $\Omega = \omega_3(I_2 - I_3)/I_1$ et A et ϕ sont deux constantes d'intégration. Nous remarquons finalement que le carré du module du vecteur vitesse angulaire $\|\vec{\omega}\|^2 = A^2 + \omega_3^2$ est une constante de sorte que le mouvement du vecteur $\vec{\omega} = \overrightarrow{ON}$ forme un cône de sommet O et d'axe (OZ); Le point O est fixe alors que l'extrémité mobile N a un mouvement circulaire de vitesse angulaire constante Ω (Voir Figure (1.4)).

Chapitre 2

Exercices avec solutions

2.1 Centre de Masse : Systèmes discrets

2.1.1 Exercice (Barycentre de 2 masses ponctuelles)

Soit deux masses m_1 et m_2 situées respectivement aux points $A(4, 2)$ et $B(-2, -2)$

1. Déterminer les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g)$ du système m_1 et m_2 .
2. Dans le cas où $m_1 = m_2$, déduire les coordonnées du centre de masse.
3. Dans le cas où $m_2 = 3m_1$, on rajoute une troisième masse $M = 5m_1$. Déterminer les coordonnées (x, y) de la masse M pour que le centre de masse du système m_1, m_2 et M soit $G(1, 1)$

2.1.2 Solution exercice (Barycentre de 2 masses ponctuelles)

1. Les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g)$ du système m_1 et m_2 :
Nous avons par définition

$$\vec{Og} = \frac{m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB}}{m_1 + m_2},$$

ainsi les coordonnées sont données par

$$x_g = \frac{m_1 x_A + m_2 x_B}{m_1 + m_2} = \frac{2(2m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (2.1)$$

$$y_g = \frac{m_1 y_A + m_2 y_B}{m_1 + m_2} = \frac{2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (2.2)$$

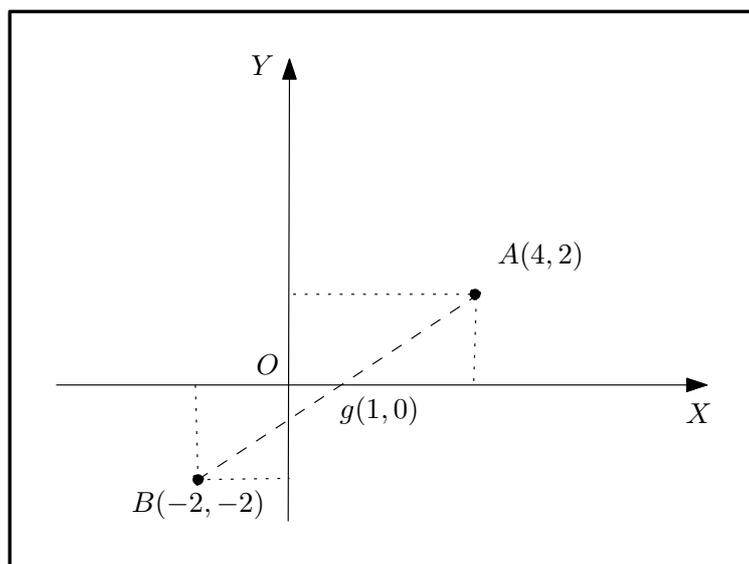


FIG. 2.1 – Le centre de masse g des deux points A et B est situé au milieu du segment $[AB]$.

2. Dans le cas où $m_1 = m_2$, les coordonnées du centre de masse sont (voir Figure (2.1))

$$x_g = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 - 1}{2} = 1 \quad (2.3)$$

$$y_g = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \quad (2.4)$$

3. Dans le cas où $m_2 = 3m_1$, on rajoute une troisième masse $M = 5m_1$. Déterminons les coordonnées (x, y) de la masse M pour que le centre de masse du système m_1, m_2 et M soit $G(1, 1)$. Nous avons les coordonnées du centre de masse des trois masses

$$1 = x_G = \frac{m_1 x_A + m_2 x_B + M x}{m_1 + m_2 + M} = \frac{m_1 x_A + 3m_1 x_B + 5m_1 x}{m_1 + 3m_1 + 5m_1}$$

$$1 = y_G = \frac{m_1 y_A + m_2 y_B + M y}{m_1 + m_2 + M} = \frac{m_1 y_A + 3m_1 y_B + 5m_1 y}{m_1 + 3m_1 + 5m_1}$$

ainsi nous déduisons les coordonnées

$$x = \frac{9 - x_A - 3x_B}{5} = \frac{11}{5} \quad (2.5)$$

$$y = \frac{9 - y_A - 3y_B}{5} = \frac{13}{5} \quad (2.6)$$

2.1.3 Exercice (Barycentre de 4 masses ponctuelles)

Soit quatre masses m , $2m$, m et $2m$, disposées sur un cercle de rayon R et de centre O , comme indiqué dans la FIG.2.2

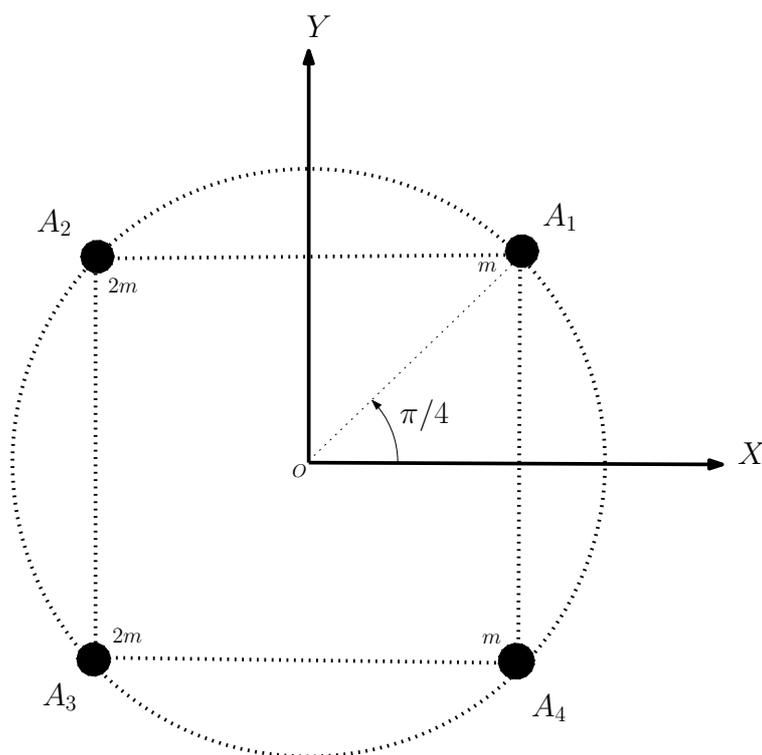


FIG. 2.2 – Quatre masses ponctuelles, de masses respectives m , $2m$, m et $2m$, disposées aux points A_1 , A_2 , A_3 et A_4 .

1. Déterminer les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g, z_g)$.
2. Soit M une masse située sur un point (x, y) du cercle. Déterminer la position et la valeur de M pour que le centre de masse du système à 5 masses soit $G(0, 0)$

2.1.4 Solution exercice (Barycentre de 4 masses ponctuelles)

1. Détermination des coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g)$:
 Commençons d'abord par déterminer les coordonnées des points A_i , où $i = 1, 2, 3, 4$, en utilisant les coordonnées polaires $A_i(x_i = \|\overrightarrow{OA_i}\| \cos \theta, y_i = \|\overrightarrow{OA_i}\| \sin \theta)$ avec $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OA_i})$. Par exemple, les coordonnées du point $A_1(x_1 = \|\overrightarrow{OA_1}\| \cos \pi/4, y_1 = \|\overrightarrow{OA_1}\| \sin \pi/4) = A_1(x_1 = R\sqrt{2}/2, y_1 = R\sqrt{2}/2)$. De la même manière on parvient à calculer les coordonnées des quatres points
 $A_1(x_1 = R\sqrt{2}/2, y_1 = R\sqrt{2}/2, z_1 = 0)$ $A_3(x_3 = -R\sqrt{2}/2, y_3 = -R\sqrt{2}/2, z_3 = 0)$
 $A_2(x_2 = -R\sqrt{2}/2, y_2 = R\sqrt{2}/2, z_2 = 0)$ $A_4(x_4 = R\sqrt{2}/2, y_4 = -R\sqrt{2}/2, z_4 = 0)$
 Ensuite déterminons les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g, z_g)$ de l'ensemble des 4 masses. Par définition, le centre de masse est repéré par le vecteur position

$$\overrightarrow{Og} = \frac{m\overrightarrow{OA_1} + 2m\overrightarrow{OA_2} + 2m\overrightarrow{OA_3} + m\overrightarrow{OA_4}}{m + 2m + 2m + m}, \quad (2.7)$$

ce qui conduit après simplification à

$$\vec{Og} = \frac{1}{6} \left[(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_4) + 2(\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3) \right],$$

de sorte que les coordonnées soient données par

$$x_g = \frac{1}{6} [(x_1 + x_4) + 2(x_2 + x_3)] \quad (2.8)$$

$$y_g = \frac{1}{6} [(y_1 + y_4) + 2(y_2 + y_3)] \quad (2.9)$$

$$z_g = \frac{1}{6} [(z_1 + z_4) + 2(z_2 + z_3)] \quad (2.10)$$

Finalement

$$g(x_g = -R\sqrt{2}/6, y_g = 0, z_g = 0). \quad (2.11)$$

2. Dans ce qui suit, on rajoute une masse M située sur un point $N(x, y, 0)$ du cercle. Déterminer la position et la valeur de M pour que le centre de masse du système à 5 masses soit $G(0, 0, 0)$.

Nous avons par définition

$$\vec{OG} = \frac{\left[(m\vec{OA}_1 + 2m\vec{OA}_2 + m\vec{OA}_3 + 2m\vec{OA}_4) + M\vec{ON} \right]}{[(m + 2m + m + 2m) + M]}$$

ce qui conduit, compte tenu de la position (2.7) du centre de masse g , à

$$\vec{OG} = \frac{6m\vec{Og} + M\vec{ON}}{6m + M}. \quad (2.12)$$

Le problème est équivalent à la recherche du centre de masse de deux points g et N . Le barycentre g des quatre masses disposées en A_i , où $i = 1, 2, 3, 4$ est affecté d'une masse totale $6m$ alors que la cinquième masse située sur un point inconnu N du cercle doit être affectée d'une masse M à déterminer de telle sorte que le centre de masse total G entre g et N coïncide avec l'origine O . La relation vectorielle précédente (2.12) est équivalente aux trois relations

$$0 = x_G = \frac{6m x_g + M x}{6m + M} \implies x = -6m x_g / M > 0 \quad (2.13)$$

$$0 = y_G = \frac{6m y_g + M y}{6m + M} \implies y = 0 \quad (2.14)$$

$$0 = z_G = \frac{6m z_g + M z}{6m + M} \implies 0 = 0(\text{évidence}) \quad (2.15)$$

L'équation cartésienne du cercle (c) est $x^2 + y^2 = R^2$, donc nous devons résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{R^2 - y^2} \\ y = 0 \\ x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm R \\ x > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

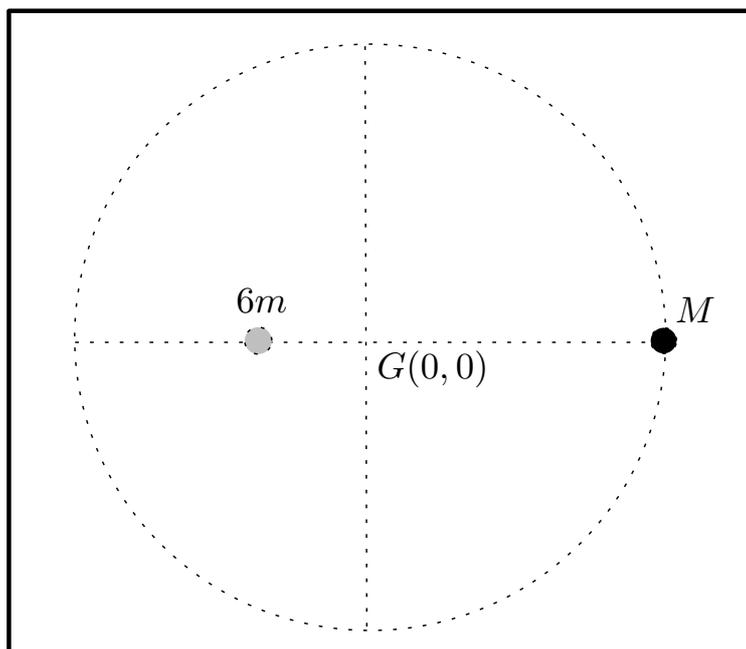


FIG. 2.3 – Le barycentre g des quatre masses disposées en A_i , où $i = 1, 2, 3, 4$ est affecté d'une masse totale $6m$ alors que la cinquième masse située au point $(x = R, y = 0)$ doit être affectée d'une $M = \sqrt{2}m$.

ce qui conduit à

$$x = R.$$

La cinquième masse M rajoutée doit être disposée au point $(x = R, y = 0)$. En remplaçant cette valeur de $x = R$ ainsi que la valeur de $x_g = -\frac{R\sqrt{2}}{6}$ dans (2.13) alors nous avons

$$R = -\left(\frac{6m}{M}\right)\left(-\frac{R\sqrt{2}}{6}\right)$$

Finalement (voir Figure (2.3))

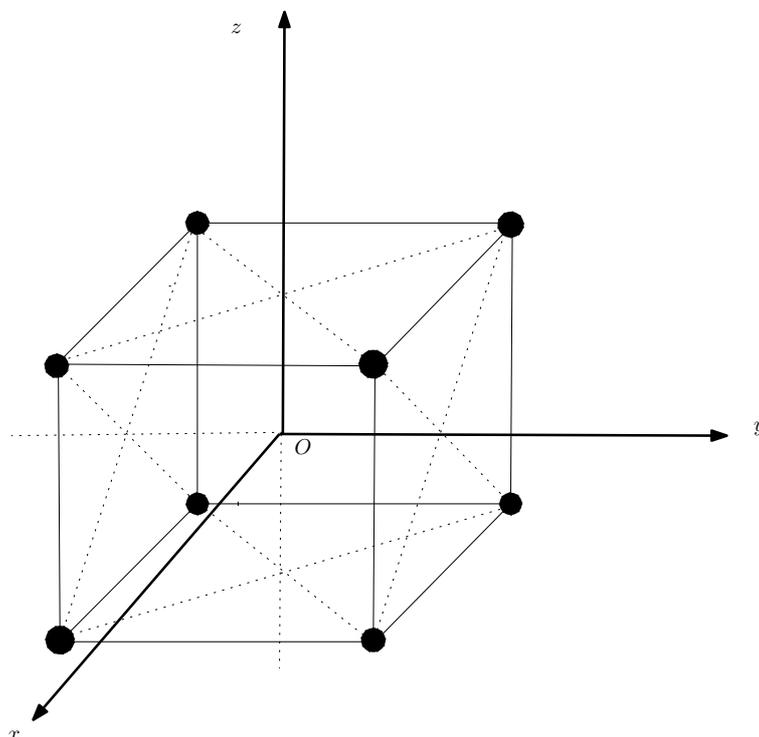
$$M = \sqrt{2}m.$$

2.1.5 Exercice (Barycentre de 8 masses ponctuelles)

Soit huit masses situées sur les sommets d'un cube de côté a .

Déterminer les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g, z_g)$ dans les deux cas suivants :

1. $2m(a/2, a/2, a/2)$, $m(a/2, -a/2, a/2)$, $2m(-a/2, -a/2, a/2)$, $m(-a/2, a/2, a/2)$,
 $m(a/2, a/2, -a/2)$, $2m(a/2, -a/2, -a/2)$, $m(-a/2, -a/2, -a/2)$, $2m(-a/2, a/2, -a/2)$.

FIG. 2.4 – Huit masses ponctuelles disposées sur les sommets d'un cube de côté a .

2. $m(a/2, a/2, a/2), m(a/2, -a/2, a/2), m(-a/2, -a/2, a/2), m(-a/2, a/2, a/2),$
 $2m(a/2, a/2, -a/2), 2m(a/2, -a/2, -a/2), 2m(-a/2, -a/2, -a/2), 2m(-a/2, a/2, -a/2).$

2.1.6 Solution exercice (Barycentre de 8 masses ponctuelles)

Déterminons les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g, z_g)$ dans les deux cas suivants :

1. Nous avons dans le premier cas les coordonnées suivantes

$$x_g = \frac{[2m(a/2) + m(a/2) + 2m(a/2) + m(a/2)] + [m(-a/2) + 2m(-a/2) + 2m(-a/2) + m(-a/2)]}{4m + 8m}$$

$$y_g = \frac{[2m(a/2) + m(a/2) + 2m(-a/2) + m(-a/2)] + [m(-a/2) + 2m(a/2) + 2m(-a/2) + m(a/2)]}{4m + 8m}$$

$$z_g = \frac{[2m(a/2) + m(-a/2) + 2m(-a/2) + m(a/2)] + [m(-a/2) + 2m(-a/2) + 2m(a/2) + m(a/2)]}{4m + 8m}$$

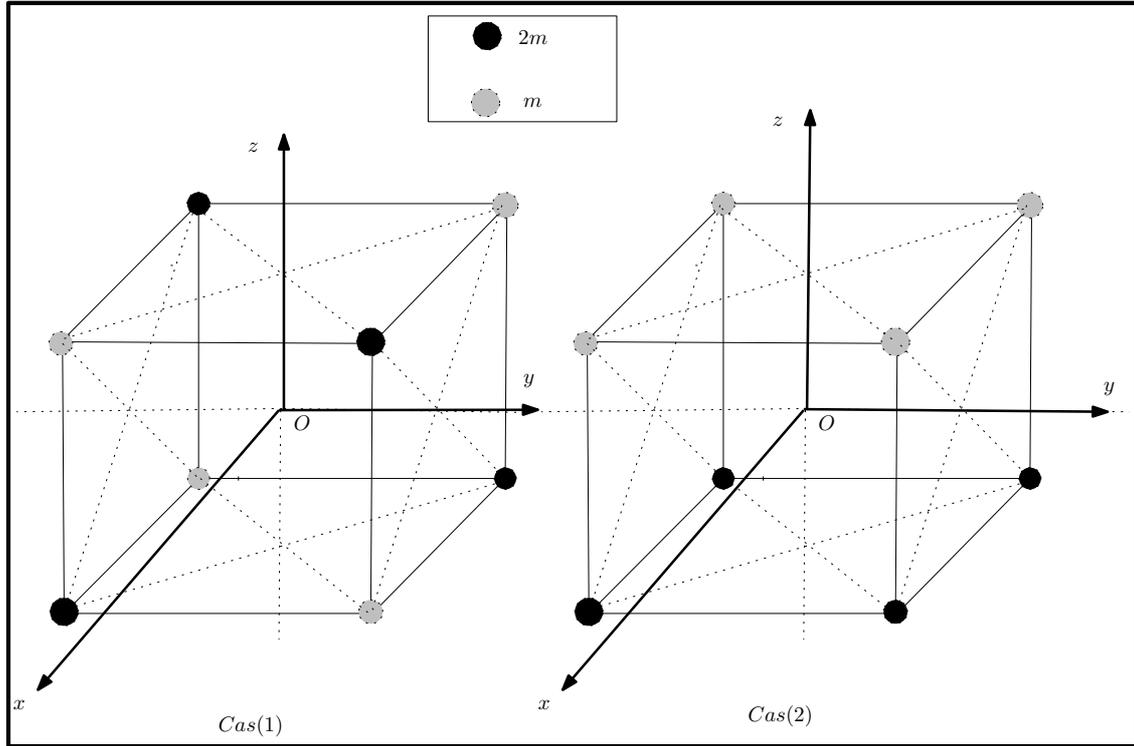


FIG. 2.5 – Cas (1) : Masses m et $2m$ alternées sur les huit sommets du cube. Cas (2) : Masses m disposées sur la face supérieure et masses $2m$ disposées sur la face inférieure du cube.

ou encore

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{(a/2) [2m + m + 2m + m] - (a/2) [m + 2m + 2m + m]}{12m} \\ y_g &= \frac{(a/2) [2m + m - 2m - m] - (a/2) [m - 2m + 2m - m]}{12m} \\ z_g &= \frac{(a/2) [2m - m - 2m + m] - (a/2) [m + 2m - 2m - m]}{12m} \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à (voir Cas (1) de la Figure 2.5)

$$g(0, 0, 0).$$

2. Nous avons dans le deuxième cas les coordonnées suivantes

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{[m(a/2) + m(a/2) + m(-a/2) + m(-a/2)] + [2m(a/2) + 2m(a/2) + 2m(-a/2) + 2m(-a/2)]}{12m} \\ y_g &= \frac{[m(a/2) + m(-a/2) + m(-a/2) + m(a/2)] + [2m(a/2) + 2m(-a/2) + 2m(-a/2) + 2m(a/2)]}{12m} \\ z_g &= \frac{[m(a/2) + m(a/2) + m(a/2) + m(a/2)] + [2m(-a/2) + 2m(-a/2) + 2m(-a/2) + 2m(-a/2)]}{12m} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}x_g &= \frac{(m a/2) [1 + 1 - 1 - 1] - (2m a/2) |1 + 1 - 1 - 1|}{12} \\y_g &= \frac{(m a/2) [1 - 1 - 1 + 1] - (2m a/2) |1 - 1 - 1 + 1|}{12} \\z_g &= \frac{(m a/2) [1 + 1 + 1 + 1] - (2m a/2) |1 + 1 + 1 + 1|}{12}\end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à (voir Cas (2) de la Figure 2.5)

$$g(0, 0, -a/6).$$

2.1.7 Exercices supplémentaires

Exercice supplémentaire (barycentre de 3 masses ponctuelles)

Soit trois masses m_1 , m_2 et m_3 , situées respectivement aux points $A(1, 0, 3)$, $B(-1, -2, 0)$, $C(2, -1, 2)$.

1. Représenter les points A, B et C .
2. Déterminer les coordonnées de centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$ des trois masses.
3. Dédire les coordonnées de centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$ dans le cas où $m_1 = m_2 = m_3$.
4. Montrer que G est situé sur le plan formé par les trois points A, B et C .

Exercice supplémentaire (barycentre de 4 masses ponctuelles)

Soit quatre masses m_1 , m_2 , m_3 et m_4 , situées respectivement aux points : $A(a/2, a/2)$, $B(-a/2, a/2)$, $C(-a/2, -a/2)$, $D(a/2, -a/2)$

1. Représenter les points A, B, C et D
2. Déterminer les coordonnées de centre de masse $G(x_G, y_G)$ des quatre masses.
3. Dédire les coordonnées de centre de masse $G(x_G, y_G)$ dans les cas
 - (a) $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$.
 - (b) $m_1 = m_2$ et $m_3 = m_4$.
 - (c) $m_1 = m_3$ et $m_2 = m_4$.
 - (d) $m_1 = m_4$ et $m_2 = m_3$.

Exercice supplémentaire (barycentre de 7 masses ponctuelles)

Soit sept masses identiques m , disposées comme indiqué sur la figure, où $\|\overrightarrow{A_1 A_5}\| = R$.

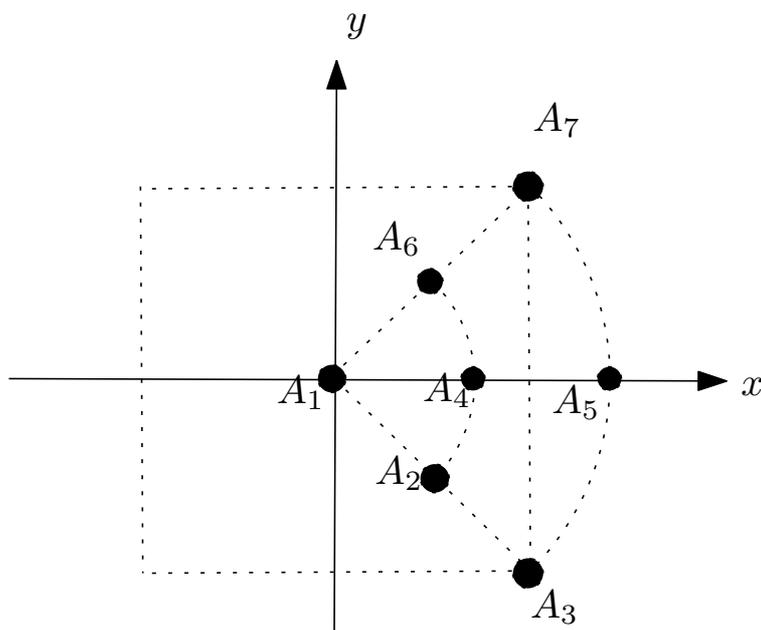


FIG. 2.6 – Sept masses ponctuelles disposées tel que $A_1A_5 = 2A_1A_2$.

1. Déterminer les coordonnées de centre de masse $G(x_G, y_G)$ des sept masses.
 Dans ce qui suit, on rajoute une masse M aux sept masses précédentes.
 - (a) Dans le cas où la masse $M = 2m$ est placée au point $(0, R)$, déterminer le nouveau centre de masse $g(x_g, y_g)$.
 - (b) Dans le cas où la masse M est inconnue et placée au point $(-R\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Déterminer la valeur de M pour que le nouveau centre de masse soit $A_1(0, 0)$.

2.2 Centre de Masse : Systèmes Continus

2.2.1 Exercice (Centre de masse d'une tige linéaire)

Soit une tige linéaire de densité de masse λ et dont les extrémités sont situées aux points $A(-2, 1)$ et $B(1, 2)$.

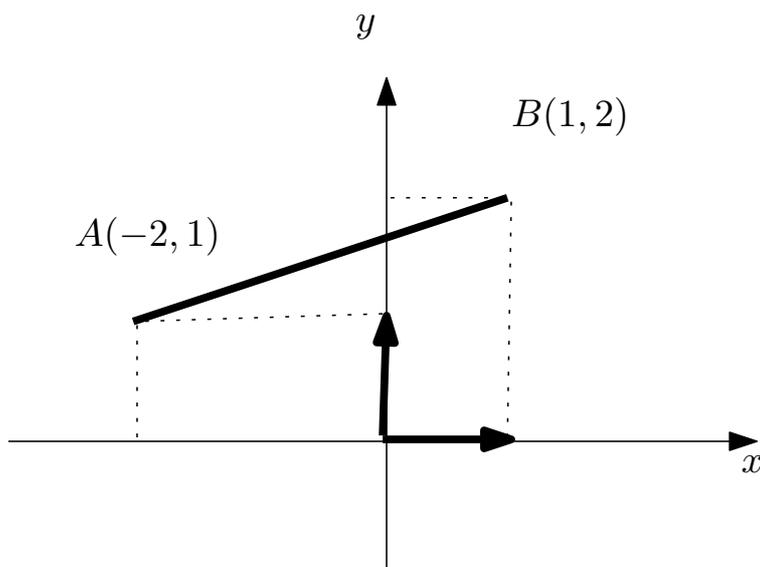


FIG. 2.7 – Une tige linéaire $[AB]$.

Déterminer le centre de masse $G(x_G, y_G)$ de la tige, dans les cas suivants :

$$(a) \lambda = \lambda_0 = cte, \quad (b) \lambda = \lambda_0 x^2$$

2.2.2 Solution exercice (Centre de masse d'une tige linéaire)

Déterminons le centre de masse $G(x_G, y_G)$ de la tige, dans les cas suivants :

1. $\lambda = \lambda_0 = cte$

L'équation de la droite (AB) est de type $y = \alpha x + \beta$ où α et β sont deux constantes à déterminer. Sachant que les coordonnées de A et B vérifient une telle équation, alors nous obtenons le système linéaire suivant (à deux inconnues)

$$\begin{aligned} -1 &= 2\alpha - \beta, \\ 2 &= \alpha + \beta, \end{aligned}$$

dont la solution est $\alpha = 1/3$ et $\beta = 5/3$. Dans ce cas l'équation de la droite est $y = x/3 + 5/3$ (dont la fonction dérivée est $dy/dx = 1/3$).

- **La masse :** Sachant que $dm = \lambda_0 dl = \lambda_0 (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \lambda dx [1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{1/2}$ alors nous avons

$$\begin{aligned} M &= \int_D dm = \lambda_0 \int_{-2}^1 dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \lambda_0 \int_{-2}^1 dx \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \lambda_0 \frac{\sqrt{10}}{3} \int_{-2}^1 dx \\ &= \lambda_0 \frac{\sqrt{10}}{3} [x]_{-2}^1 = \lambda_0 \sqrt{10}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

- **Centre de masse :** Nous avons par définition

$$x_g = \frac{\int_D x dm}{M} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 \sqrt{10}} \int_{-2}^1 x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{10}} \int_{-2}^1 x \frac{\sqrt{10}}{3} dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 x dx = -\frac{1}{2} \quad (2.18)$$

$$y_g = \frac{\int_D y dm}{M} = \frac{1}{\sqrt{10}} \int_{-2}^1 y \frac{\sqrt{10}}{3} dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 y dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\right) dx = \frac{3}{2} \quad (2.19)$$

En fait, on peut remarquer facilement que dans le cas où la masse est uniformément répartie, le centre de masse est situé au milieu $g(x_g = \frac{x_A+x_B}{2}, y_g = \frac{y_A+y_B}{2})$.

2. $\lambda = \lambda_0 x^2$

C'est le même principe de calcul, néanmoins ceux-ci sont plus fastidieux (à faire comme travail personnel). Une chose est sûre, le centre de masse n'est pas situé au milieu $g(x_g \neq \frac{x_A+x_B}{2}, y_g \neq \frac{y_A+y_B}{2})$

2.2.3 Exercice (Centre de masse d'un coude à deux tiges)

Soit un coude constitué de deux tiges : OA et OB de densités de masses linéiques constantes respectives λ_1, λ_2 , tel que $O(0,0)$, $A(3,1)$ et $B(-1,3)$.

Déterminer le centre de masse $G(x_G, y_G)$ du coude, dans les cas suivants :

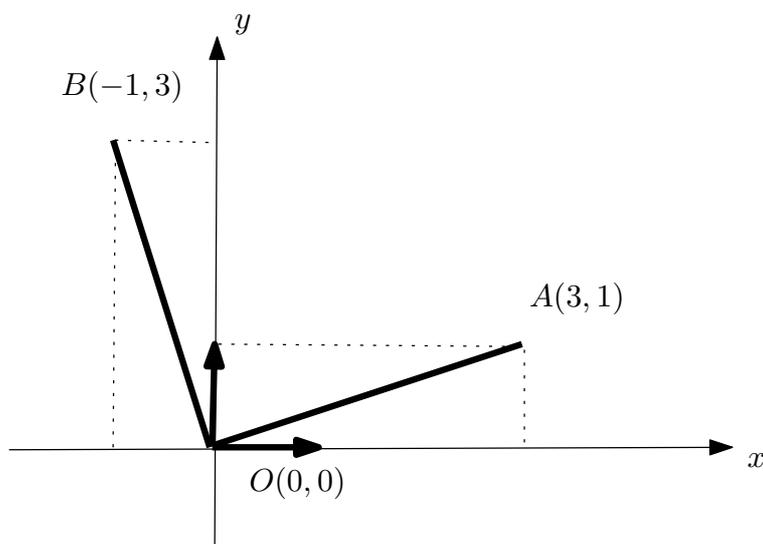
- (a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, (b) $\lambda_1 = \lambda_2$.

2.2.4 Solution Exercice (Centre de masse d'un coude à deux tiges)

Détermination du centre de masse $G(x_G, y_G)$ du coude :

1. **Centres de masses de $(OA) = (\Delta_1)$ et $(OB) = (\Delta_2)$:**

Les équations des droites sont respectivement $(\Delta_1) : y = x/3$ et $(\Delta_2) : y = -3x$ ce qui nous permet de calculer les masses respectives $M_1 = \lambda_1 \sqrt{10}$ et $M_2 = \lambda_2 \sqrt{10}$ et les coordonnées des centres de masses respectives $g_1(x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = \frac{1}{2})$ et $g_2(x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{3}{2})$ (voir exercice précédent).

FIG. 2.8 – Un coude formé par deux tiges linéaires OA et OB .

2. Centre de masse $G(x_G, y_G)$ du système total :

Par définition nous avons le vecteur position

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_1 \overrightarrow{Og_1} + M_2 \overrightarrow{Og_2}}{M_1 + M_2}$$

ce qui conduit aux coordonnées

$$x_G = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{3\lambda_1 - \lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (2.20)$$

$$y_G = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (2.21)$$

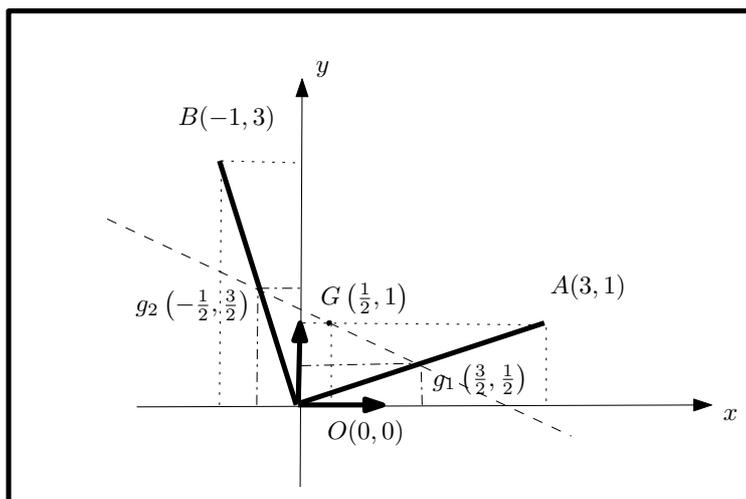
Dans le cas particulier où $\lambda_1 = \lambda_2$, les coordonnées précédentes se simplifient comme suit (voir Figure 2.9)

$$x_G = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \quad (2.22)$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \quad (2.23)$$

2.2.5 Exercice (Centres de masses d'arcs circulaires)

1. Déterminer le centre de masse d'un demi-cercle de densité linéique constante λ .
2. Soit un système constitué de deux demi-cercles de rayons R , r et de densités linéiques constantes λ_R , λ_r . Déterminer le centre de masse dans les cas suivants :

FIG. 2.9 – Centre de masse G du coude formé par les deux tiges linéaires OA et OB .

- (a) $\lambda_R \neq \lambda_r$ et $r \neq R$, (b) $\lambda_R \neq \lambda_r$ et $r = R$, (c) $\lambda_R = \lambda_r$ et $r \neq R$, (d) $\lambda_R = \lambda_r$ et $r = R$.

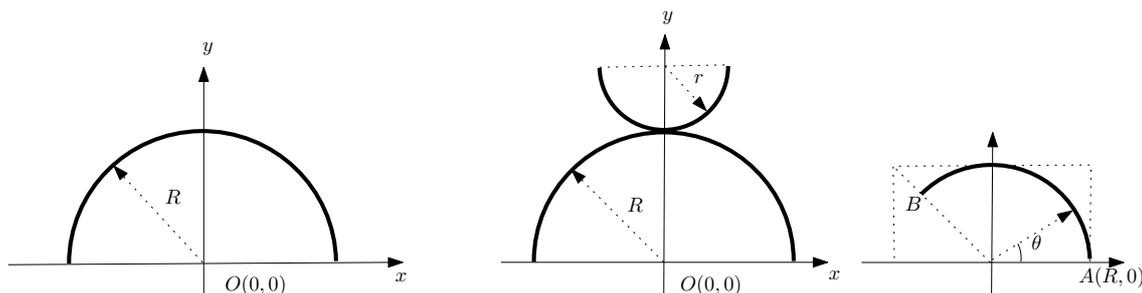


FIG. 2.10 – Demi-cercle, superposition de deux demi-cercles et arc quelconque.

3. Déterminer le centre de masse de l'arc de cercle AB dans les cas où les densités linéiques sont :

(a) $\lambda = \lambda_0 = \text{cte}$, (b) $\lambda = \lambda_0 \cos^2 \theta$, (c) $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$.

2.2.6 Solution exercice (Centres de masses d'arcs circulaires)

1. Déterminons le centre de masse d'un demi-cercle de densité linéique constante λ .

• **La masse :**

Utilisons les coordonnées polaires pour repérer l'élément de masse dm , de longueur infiniment petite $dl = R d\theta$, qui se trouve au point $(r = R, \theta)$. La masse est donnée par $M = \int_D dm = \lambda \int_D dl = \lambda L$, avec la longueur $L = \int_D dl = \int_0^\pi R d\theta = \pi R$ (obtenue en coordonnées polaires). L'utilisation des coordonnées cartésiennes est plus

compliquée de sorte que le demi-cercle d'équation $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ a pour longueur

$$\begin{aligned} L &= \int_D dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{-R}^R dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{-R}^R dx \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} \\ &= \int_{-R}^R dx \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Le changement de variables $x = R \sin t$ permet de calculer l'intégrale précédente comme suit. En injectant la différentielle¹ $dx = dt R \cos t = dt R \sqrt{1 - \sin^2 t}$ nous avons

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (dt R \sqrt{1 - \sin^2 t}) \frac{R}{R \sqrt{1 - \sin^2 t}} = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi R$$

Nous avons enfin $M = \lambda(\pi R)$.

• **Centre de masse :**

Nous avons les coordonnées

$$x_g = \frac{\int_D x dm}{M} = \frac{\lambda}{\lambda \pi R} \int_{-R}^R \underbrace{x \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}}_{F(x)} dx = 0 \quad [F(-x) = -F(x)] \quad (2.24)$$

$$y_g = \frac{\int_D y dm}{M} = \frac{\lambda}{\lambda \pi R} \int_{-R}^R y \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R dx = \frac{2R}{\pi} \quad (2.25)$$

ainsi le centre de masse

$$g \left(0, \frac{2R}{\pi} \right)$$

est situé sur l'axe de symétrie (OY); la première intégrale étant nulle car l'intégrale d'une fonction impaire $F(x)$ sur un intégrale symétrique $[-R, R]$ donne zéro (la contribution de l'intégrale sur l'intervalle $[-R, 0]$ est "contrebalancée" par la contribution sur l'intervalle $[0, R]$).

2. Déterminons le centre de masse du système constitué de deux demi-cercles de rayons R, r et de densités linéiques constantes λ_R, λ_r :

D'après la question précédente, les centres de masses respectifs des demi-cercles ont les coordonnées suivantes (Voir Figure 2.11)

$$G_R \left(0, \frac{2R}{\pi} \right) \quad (2.26)$$

$$G_r \left(0, R + \left(r - \frac{2r}{\pi} \right) \right) \quad (2.27)$$

¹La différentielle d'une fonction à une variable $f = f(x)$ est donnée, au premier ordre, par $df = f(x + dx) - f(x) \approx \frac{[f(x+dx) - f(x)]}{[(x+dx) - x]} dx = f'(x) dx$. En ayant deux fonctions telles que $f(x) = g(t)$ alors la différentielle des deux membres, $df(x) = dg(t)$, permet d'aboutir à $\frac{df(x)}{dx} dx = \frac{dg(t)}{dt} dt$ autrement-dit $f'(x) dx = g'(t) dt$.

et les masses respectives sont

$$M_R = \lambda_R L_R = \pi R \lambda_R \quad (2.28)$$

$$M_r = \lambda_r L_r = \pi r \lambda_r \quad (2.29)$$

Par définition nous avons le vecteur position

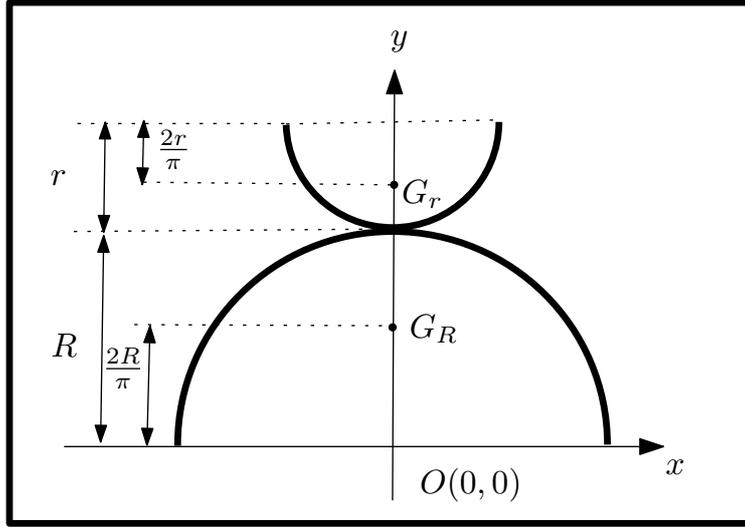


FIG. 2.11 – Centre de masse d'un système constitué par la superposition de deux demi-cercles.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_R \overrightarrow{OG_R} + M_r \overrightarrow{OG_r}}{M_R + M_r}$$

ce qui conduit aux coordonnées

$$x_G = \frac{1}{R\lambda_R + r\lambda_r} \{R\lambda_R \times 0 + r\lambda_r \times 0\} \quad (2.30)$$

$$y_G = \frac{1}{R\lambda_R + r\lambda_r} \left\{ R\lambda_R \left(\frac{2R}{\pi} \right) + r\lambda_r \left[R + \left(r - \frac{2r}{\pi} \right) \right] \right\} \quad (2.31)$$

ou encore finalement

$$G \left(0, \frac{1}{R\lambda_R + r\lambda_r} \left[\frac{2}{\pi} (R^2\lambda_R - r^2\lambda_r) + \lambda_r (rR + r^2) \right] \right). \quad (2.32)$$

Dans le cas où $r = R$ le centre de masse (2.32) se réduit à

$$G \left(0, \frac{R}{\lambda_R + \lambda_r} \left[\frac{2}{\pi} (\lambda_R - \lambda_r) + 2\lambda_r \right] \right), \quad (2.33)$$

par contre dans le cas où $\lambda_R = \lambda_r$ le centre de masse (2.32) se réduit à

$$G \left(0, \frac{1}{R+r} \left[\frac{2}{\pi} (R^2 - r^2) + (rR + r^2) \right] \right), \quad (2.34)$$

et enfin dans le cas où $\lambda_R = \lambda_r$ et $\lambda_R = \lambda_r$ le centre de masse (2.32) se réduit à

$$G(0, R). \quad (2.35)$$

3. Détermination du centre de masse de l'arc de cercle AB :

Voir Examen 2014 (Section 3.11).

2.2.7 Exercice (Centre de masse d'un disque circulaire)

- Déterminer le centre de masse $g(x_g, y_g)$ d'un demi-disque de rayon R et de masse surfacique constante σ .
- Soit le système constitué de deux demi-disques de rayons R et r , de densités de masses surfaciques constantes respectives σ_R et σ_r (voir figure). Déterminer le centre de masse $G(x_G, y_G)$ du système dans les cas suivants :
 (a) $\sigma_R \neq \sigma_r$, et $R \neq r$ (b) $\sigma_R = \sigma_r$ et $R \neq r$, (c) $\sigma_R \neq \sigma_r$ et $R = r$, (d) $\sigma_R = \sigma_r$ et $R = r$.

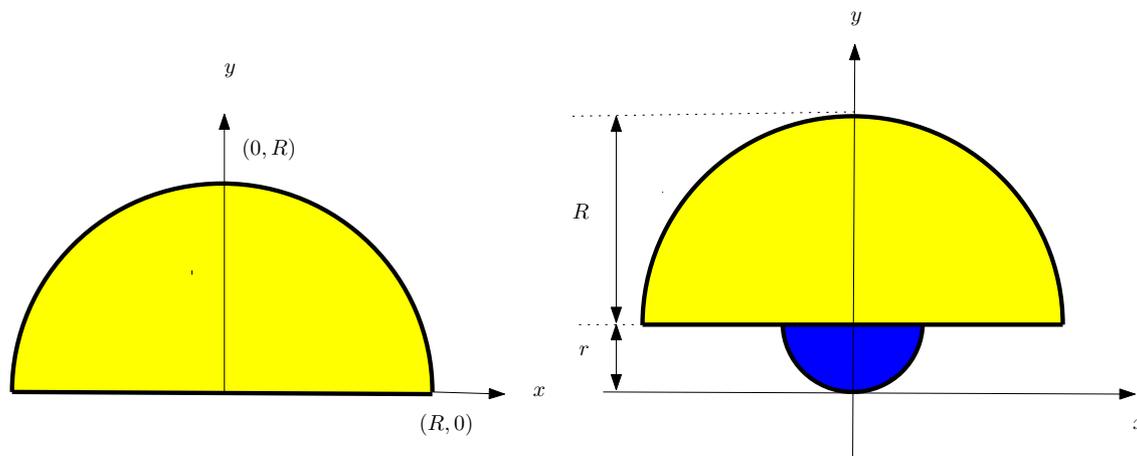


FIG. 2.12 – Demi-disque et système constitué par la superposition de deux demi-disques.

2.2.8 Solution exercice (Centre de masse d'un disque circulaire)

- Détermination du centre de masse $g(x_g, y_g)$ d'un demi-disque de rayon R de masse surfacique constante σ :

En utilisant les coordonnées polaires, il est possible de montrer que la masse est

$$M = \int \int_D dm = \sigma \int \int_D ds = \sigma \int_0^R r dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \pi R^2 / 2$$

alors que les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned}x_g &= \frac{1}{M} \int \int_D x \, dm, \\y_g &= \frac{1}{M} \int \int_D y \, dm,\end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{aligned}x_g &= \frac{\sigma}{\sigma(\pi R^2/2)} \int \int_D r \cos \theta \, ds = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 \, dr \underbrace{\int_0^\pi \cos \theta \, d\theta}_{=0} = 0. \\y_g &= \frac{\sigma}{\sigma(\pi R^2/2)} \int \int_D r \sin \theta \, ds = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} [(-1)(\cos \pi - \cos 0)] = \frac{4R}{3\pi}.\end{aligned}\right.$$

Finalement

$$g(0, 4R/3\pi). \quad (2.36)$$

2. Détermination du centre de masse $G(x_G, y_G)$ du système constitué de deux demi-disques de rayons R , r et de densités de masses surfaciques constantes σ_R et σ_r .
D'après la question précédente, les centres de masses respectifs des demi-cercles ont les coordonnées suivantes (Voir Figure 2.13)

$$G_R \left(0, r + \frac{4R}{3\pi} \right) \quad (2.37)$$

$$G_r \left(0, r - \frac{4r}{3\pi} \right) \quad (2.38)$$

et les masses respectives sont :

$$M_R = \sigma_R S_R = \left(\frac{\pi R^2}{2} \right) \sigma_R \quad (2.39)$$

$$M_r = \sigma_r S_r = \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) \sigma_r \quad (2.40)$$

Par définition nous avons le vecteur position

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_R \overrightarrow{OG_R} + M_r \overrightarrow{OG_r}}{M_R + M_r}$$

ce qui conduit aux coordonnées

$$x_G = \frac{1}{R^2 \sigma_R + r^2 \sigma_r} [R^2 \sigma_R \times 0 + r^2 \sigma_r \times 0] \quad (2.41)$$

$$y_G = \frac{1}{R^2 \sigma_R + r^2 \sigma_r} \left[R^2 \sigma_R \left(r + \frac{4R}{3\pi} \right) + r^2 \sigma_r \left(r - \frac{4r}{3\pi} \right) \right] \quad (2.42)$$

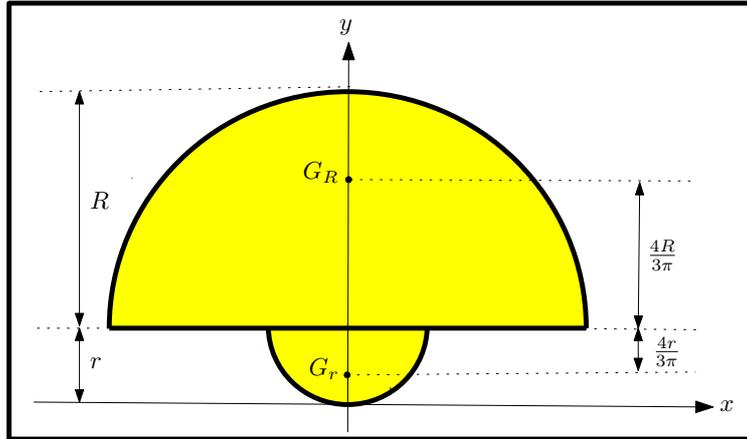


FIG. 2.13 – Centre de masse d'un système constitué par la superposition de deux demi-disques.

ou encore finalement

$$G \left(0, \frac{1}{R^2\sigma_R + r^2\sigma_r} \left[r(R^2\sigma_R + r^2\sigma_r) + \frac{4R}{3\pi}(R^3\sigma_R - r^3\sigma_r) \right] \right). \quad (2.43)$$

Dans le cas où $r = R$ le centre de masse (2.43) se réduit à

$$G \left(0, R + \frac{4}{3\pi} \left[\frac{\sigma_R - \sigma_r}{\sigma_R + \sigma_r} \right] \right), \quad (2.44)$$

par contre dans le cas où $\sigma_R = \sigma_r$ le centre de masse (2.43) se réduit à

$$G \left(0, \frac{1}{R^2 + r^2} \left[r(R^2 + r^2) + \frac{4}{3\pi}(R^3 - r^3) \right] \right), \quad (2.45)$$

et enfin dans le cas où $\sigma_R = \sigma_r$ et $R = r$ le centre de masse (2.43) se réduit à

$$G(0, R). \quad (2.46)$$

2.2.9 Exercice (Centres de masses de plaques rectangulaire et triangulaire)

1. Soit une plaque rectangulaire de densité de masse surfacique σ dont les sommets sont situés aux points $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -2)$ et $D(3, -2)$. Déterminer le centre de masse $G(x_G, y_G)$ de la plaque dans les cas suivants :

$$(a) \sigma = \sigma_0 = \text{cte} \quad (b) \sigma = \sigma_0(x^2 + y^2).$$

2. Soit une plaque triangulaire de densité de masse surfacique constante χ et dont les sommets sont situés aux points $A(2, 1)$, $B(-1, 0)$ et $C(3, -2)$. Déterminer le centre de masse $g(x_g, y_g)$ de la plaque.

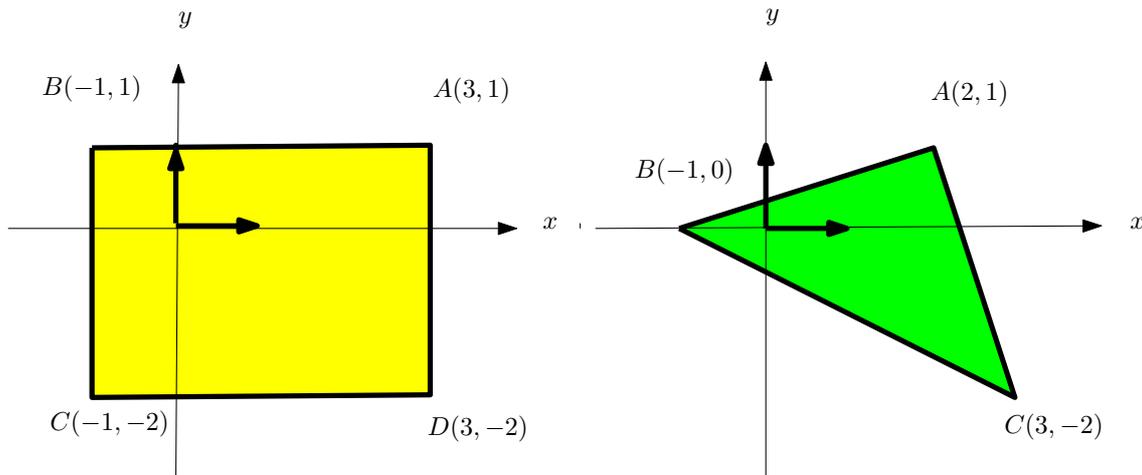


FIG. 2.14 – Plaques rectangulaire et triangulaire.

2.2.10 Solution exercice (Centres de masses de plaques rectangulaire et triangulaire)

1. Soit une plaque rectangulaire de densité de masse surfacique σ dont les sommets sont situés aux points $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -2)$ et $D(3, -2)$. Détermination du centre de masse $G(x_G, y_G)$ de la plaque rectangulaire de densité de masse surfacique σ dont les sommets sont situés aux points $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -2)$ et $D(3, -2)$:

(a) Cas où $\sigma = cte$:

• **La Masse** : $M = \int \int_D dm = \sigma \int \int_D ds = \sigma S$ est exprimée en fonction de la surface S telle que :

$$S = \int \int_D ds = \int_{-1}^3 dx \int_{-2}^1 dy = [x]_{-1}^3 [y]_{-2}^1 = [3 - (-1)] [1 - (-2)] = 12$$

La frontière du domaine D est constituée des segments (AB) et (CD) parallèles à l'axe (OX) ainsi que les segments (BC) et (AD) parallèles à l'axe (Oy) , ce qui a pour conséquence que les bornes des intégrales en coordonnées cartésiennes soient constantes et ainsi les deux intégrales soient complètement découplées (indépendantes).

• **Le centre de masse** : Les coordonnées du centre de masse sont

$$x_G = \frac{1}{M} \int \int_D x dm,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int \int_D y dm,$$

ou encore

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sigma}{\sigma S} \int \int_D x ds = \frac{1}{12} \int_{-1}^3 x dx \int_{-2}^1 dy = \frac{1}{12} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^3 \left[y \right]_{-2}^1 = \frac{1}{12} \times \frac{8}{2} \times 3 = 1 \\ y_G = \frac{\sigma}{\sigma S} \int \int_D y ds = \frac{1}{12} \int_{-1}^3 dx \int_{-2}^1 y dy = \frac{1}{12} \left[x \right]_{-1}^3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{12} \times 4 \times \frac{-3}{2} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Finalement

$$G \left(1, -\frac{1}{2} \right). \quad (2.47)$$

On remarque que ce résultat peut être obtenu en déterminant l'intersection des deux diagonales (AC) : $y_1(x) = (3x - 5)/4$ et (BD) : $y_2(x) = (-3x + 1)/4$, tel que $y_1(x) = y_2(x)$.

(b) Cas où $\sigma = \sigma_0 (x^2 + y^2)$:

• **La Masse** : est exprimée par l'intégrale

$$\begin{aligned} M &= \int \int_D dm = \sigma_0 \int \int_D (x^2 + y^2) ds \\ &= \sigma_0 \int_{-1}^3 x^2 dx \int_{-2}^1 dy + \sigma_0 \int_{-1}^3 dx \int_{-2}^1 y^2 dy = \sigma_0 (28 + 12) = 40\sigma_0 \quad (2.48) \end{aligned}$$

• **Le centre de masse** : Les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int \int_D x dm, \\ y_G &= \frac{1}{M} \int \int_D y dm, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int \int_D x \sigma_0 (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\sigma_0}{M} \left[\int_{-1}^3 x^3 dx \int_{-2}^1 dy + \int_{-1}^3 x dx \int_{-2}^1 y^2 dy \right] \\ &= \frac{1}{40} \left[\frac{80}{4} \times 3 + \frac{8}{6} \times 9 \right] = \frac{9}{5} \simeq 1.80 \\ y_G &= \frac{1}{M} \int \int_D y \sigma_0 (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\sigma_0}{M} \left[\int_{-1}^3 x^2 dx \int_{-2}^1 y dy + \int_{-1}^3 dx \int_{-2}^1 y^3 dy \right] \\ &= \frac{1}{40} \left[\frac{28}{6} \times (-3) + 4 \times \left(-\frac{15}{4} \right) \right] = -\frac{29}{40} \simeq -0.72 \end{aligned}$$

Finalement

$$g \left(\frac{9}{5}, -\frac{29}{40} \right). \quad (2.49)$$

2. Déterminons le centre de masse $g(x_g, y_g)$ de la plaque triangulaire de densité de masse surfacique constante χ et dont les sommets sont situés aux points $A(2, 1)$, $B(-1, 0)$ et $C(3, -2)$. Pour ce faire nous allons décomposer le domaine d'intégration D en deux domaines triangulaires $D_1 : (ABN)$ et $D_2 : (ANC)$ tel que $D = D_1 \cup D_2$. Les frontières du domaine D sont les segments d'équations $(BC) : y_1(x) = (-x - 1)/2$, $(AB) : y_2(x) = (x + 1)/3$, $(AC) : y_3(x) = (-3x + 7)$.

- **La Masse :** $M = \int \int_D dm = \chi S$ est exprimée en fonction de la surface

$$\begin{aligned} S &= \int \int_D ds = \int \int_{D_1} ds + \int \int_{D_2} ds = \int_{-1}^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy + \int_2^3 dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} dy \\ &= \int_{-1}^2 dx [y_2(x) - y_1(x)] + \int_2^3 dx [y_3(x) - y_1(x)] \\ &= \int_{-1}^2 dx \left(\frac{5}{6}x + \frac{5}{6} \right) + \int_2^3 dx \left(-\frac{5}{2}x + \frac{15}{2} \right) = 5. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Les frontières du domaine triangulaire D est constitué de segments (AB) , (AC) et (BC) inclinés, ce qui a pour conséquence que les bornes des intégrales en coordonnées cartésiennes soient des fonctions de la position x et ainsi les deux intégrales (par rapport à x et y) soient couplées (dépendantes).

- **Le centre de masse :** Les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M} \int \int_D x dm, \\ y_g &= \frac{1}{M} \int \int_D y dm, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{\chi}{\chi S} \int \int_D x ds = \frac{1}{S} \left(\int \int_{D_1} x dx dy + \int \int_{D_2} x dx dy \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\int_{-1}^2 x dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy + \int_2^3 x dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} dy \right) \\ &= \int_{-1}^2 dx \left(\frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{6}x \right) + \int_2^3 dx \left(-\frac{5}{2}x^2 + \frac{15}{2}x \right) \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} y_g &= \frac{\chi}{\chi S} \int \int_D y ds = \frac{1}{S} \left(\int \int_{D_1} y dx dy + \int \int_{D_2} y dx dy \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\int_{-1}^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y dy + \int_2^3 dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} y dy \right) \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^2 dx ([y_2(x)]^2 - [y_1(x)]^2) + \frac{1}{2} \int_2^3 dx ([y_3(x)]^2 - [y_1(x)]^2) \right\} \end{aligned}$$

Finalement

$$g \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right). \quad (2.51)$$

En fait géométriquement, le centre de masse s'obtient en dessinant la médiane (AF) issue du sommet A et en prenant $Fg = AF/3$, on obtient :

$$F \left(x_F = \frac{x_B + x_C}{2} = 1, y_F = \frac{y_B + y_C}{2} = -1 \right)$$

de sorte que l'équation cartésienne de la droite soit (AF) : $y = 2x - 3$. Les coordonnées du centre de masse vérifient cette équation $y_g = 2x_g - 3$.

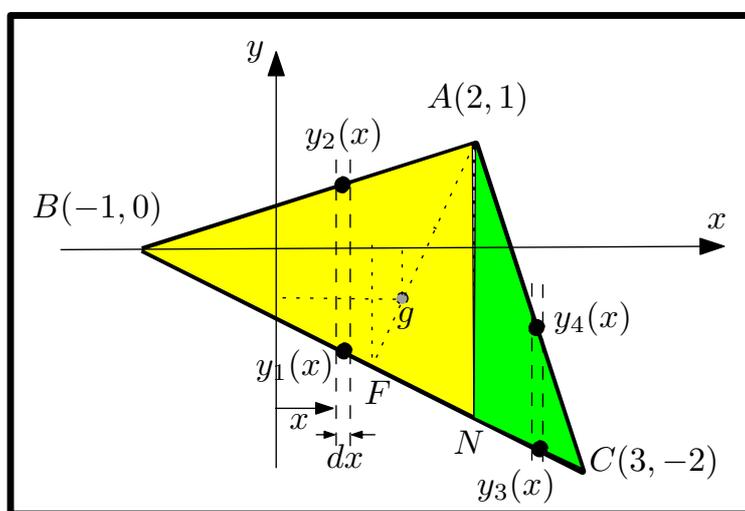


FIG. 2.15 – Centre de masse d'une plaque triangulaire de densité de masse surfacique constante.

2.2.11 Exercice (Centres de masses d'une Couronne ainsi que de segments à deux bases et à une base)

1. Déterminer le centre de masse $G(x_G, y_G)$ d'une plaque sous forme d'un secteur de couronne de densité de masse surfacique constante σ (voir figure 2.16 : à gauche).
2. Considérons une plaque sous forme d'un demi-disque de rayon R et de densité de masse surfacique constante χ . Celle-ci est découpée en deux plaques : supérieure (segment à une base) et inférieure (segment à deux bases)
 - (a) Déterminer le centre de masse $n(x_n, y_n)$ de la plaque inférieure.
 - (b) Déterminer le centre de masse $g(x_g, y_g)$ de la plaque supérieure.

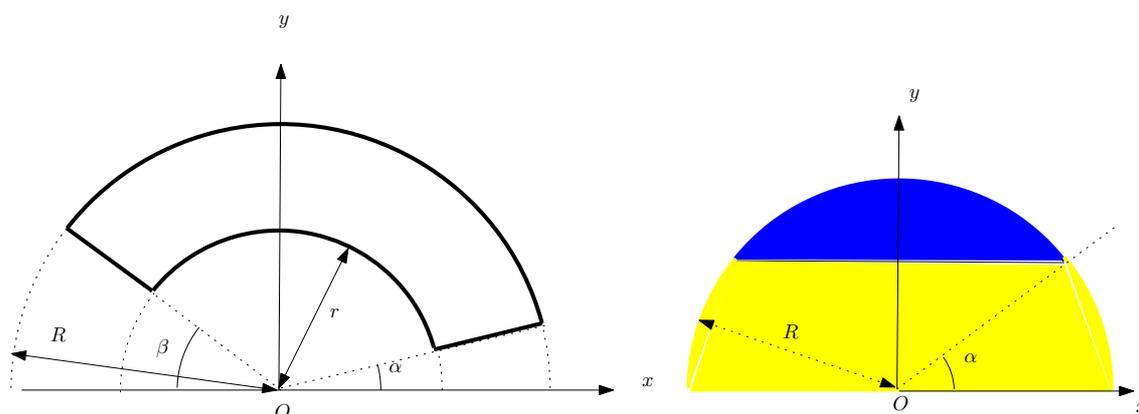


FIG. 2.16 – Couronne et segments à deux bases (jaune) et à une base (bleu).

2.2.12 Solution exercice (Centres de masses d'une Couronne ainsi que de segments à deux bases et à une base)

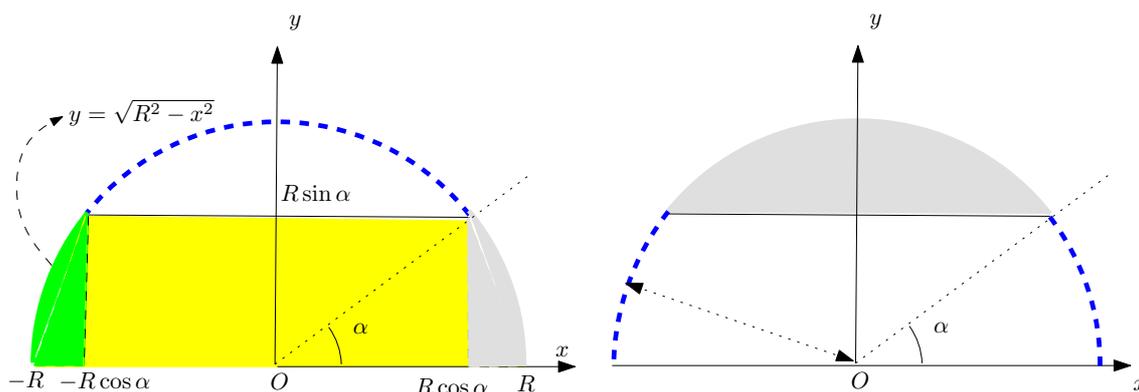


FIG. 2.17 – Segment à deux bases subdivisé en trois sous domaines : vert, jaune et gris. Segment à une base (gris).

1. Détermination du centre de masse $G(x_G, y_G)$ d'une plaque sous forme d'un secteur de couronne de densité de masse surfacique constante χ (Voir Examen de Rattrapage 2009-2010, section 3.4).
2. Considérons une plaque sous forme d'un demi-disque de rayon R et de densité de masse surfacique constante σ . Celle-ci est découpée en deux plaques : supérieure (segment à une base) et inférieure (segment à deux bases)
 - (a) Détermination du centre de masse $n(x_n, y_n)$ de la plaque inférieure :
Le domaine total D est subdivisé en trois domaines D_1 (vert), D_2 (jaune) et D_3 (gris) tel que $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

• **La Masse** : $M = \int \int_D dm = \sigma S_1$ est exprimée en fonction de la surface

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int \int_D ds = \int \int_{D_1} ds + \int \int_{D_2} ds + \int \int_{D_3} ds \\
 &= \int_{-R}^{-R \cos \alpha} dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy + \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx \int_0^{R \sin \alpha} dy + \int_{R \cos \alpha}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\
 &= \underbrace{\int_{-R}^{-R \cos \alpha} dx \sqrt{R^2 - x^2}}_{=I_1} + \underbrace{\int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx R \sin \alpha}_{=I_2} + \underbrace{\int_{R \cos \alpha}^R dx \sqrt{R^2 - x^2}}_{=I_3} \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que $I_1 = I_3$ (en posant $x = -X$). Pour calculer, d'une part, I_3 , effectuons le changement de variable $x = R \sin t$, pour avoir

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{\pi/2 - \alpha}^{\pi/2} (dt R \cos t) R \cos t = \frac{R^2}{2} \int_{\pi/2 - \alpha}^{\pi/2} dt (1 + \cos 2t) \\
 &= \frac{R^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] + \frac{R^2}{2} \frac{1}{2} \left[\sin 2t \right]_{\pi/2 - \alpha}^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$I_3 = \frac{R^2}{2} \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right) = I_1. \quad (2.53)$$

D'autre part, le calcul de I_2 est direct

$$I_2 = R^2 \sin 2\alpha. \quad (2.54)$$

L'utilisation de (2.54) et (2.53), nous permet de calculer la surface totale

$$S_1 = R^2 \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right). \quad (2.55)$$

Nous remarquons que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S_1 = \frac{\pi R^2}{2} \quad (\text{demi-disque})$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_1 = 0.$$

• **Le centre de masse** : Les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{1}{M} \int \int_D x dm, \\
 y_n &= \frac{1}{M} \int \int_D y dm,
 \end{aligned}$$

ainsi

$$x_n = 0 \quad (\text{L'axe (OY) est de symétrie})$$

de plus

$$y_n = \frac{\sigma}{\sigma S_1} \int_D y ds = \underbrace{\int_{-R}^{-R \cos \alpha} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy}_{=J_1} + \underbrace{\int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx \int_0^{R \sin \alpha} y dy}_{=J_2} + \underbrace{\int_{R \cos \alpha}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy}_{=J_3}$$

Nous pouvons remarquer que $J_1 = J_3$ (en posant $x = -X$). Calculons l'intégrale J_1

$$J_1 = \int_{-R}^{-R \cos \alpha} dx \frac{1}{2} [y^2]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{1}{2} \int_{-R}^{-R \cos \alpha} dx (R^2 - x^2)$$

ce qui donne finalement

$$J_1 = \frac{R^3}{2} \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) = J_3. \quad (2.56)$$

D'autre part, le calcul de J_2 est direct

$$J_2 = \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx \frac{1}{2} [y^2]_0^{R \sin \alpha} = \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{2} \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx$$

ainsi

$$J_2 = R^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

L'utilisation de (2.57) et (2.56), nous permet d'avoir

$$y_n = \frac{1}{R^2 \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right)} R^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} + \sin^2 \alpha \cos \alpha \right)$$

$$y_n = \frac{R}{\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right)} \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} + \sin^2 \alpha \cos \alpha \right)$$

Finalement

$$n \left(0, \frac{R \left[\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} + \sin^2 \alpha \cos \alpha \right]}{\left[\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right]} \right). \quad (2.57)$$

Nous remarquons que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} y_n = \frac{4R}{3\pi} \quad (\text{demi-disque})$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} y_n = 0.$$

(b) Détermination du centre de masse $g(x_g, y_g)$ de la plaque supérieure :

• **La Masse** : $M = \int \int_D dm = \sigma S_2$ est exprimée en fonction de la surface S_2 telle que :

$$\begin{aligned} S_2 &= \int \int_D ds = \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx \int_{R \sin \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\ &= \int_{-R}^{-R \cos \alpha} dx \left(\sqrt{R^2 - x^2} - R \sin \alpha \right) \\ &= \underbrace{\int_{-R}^{-R \cos \alpha} dx \sqrt{R^2 - x^2}}_{I_4} - R^2 \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.58)$$

L'intégrale I_4 se calcule en effectuant le changement de variable $x = R \sin t$:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\alpha - \pi/2}^{\pi/2 - \alpha} (dt R \cos t) R \cos t = \frac{R^2}{2} \int_{\alpha - \pi/2}^{\pi/2 - \alpha} dt (1 + \cos 2t) \\ &= \frac{R^2}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{R^2}{2} \frac{1}{2} \left[\sin 2t \right]_{\alpha - \pi/2}^{\pi/2 - \alpha} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$I_4 = \frac{R^2}{2} (\pi - 2\alpha) + \frac{R^2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.59)$$

L'utilisation de (2.59) nous permet de calculer la surface totale

$$S_2 = \frac{R^2}{2} (\pi - 2\alpha) - \frac{R^2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.60)$$

Nous remarquons que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S_2 = 0$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_2 = \frac{\pi R^2}{2} \quad (\text{demi-disque}).$$

De plus, compte tenu de (2.60) et (2.55) nous pouvons vérifier que

$$S_{\text{demi-disque}} = S_1 + S_2 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

• **Le centre de masse** : Les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M} \int \int_D x dm, \\ y_g &= \frac{1}{M} \int \int_D y dm, \end{aligned}$$

ainsi

$$x_g = 0 \quad (\text{L'axe (OY) est de symétrie})$$

de plus

$$\begin{aligned} y_g &= \frac{\sigma}{\sigma S_2} \int \int_D y \, ds = \frac{1}{S_2} \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx \int_{R \sin \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y \, dy \\ &= \frac{1}{S_2} \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx \frac{1}{2} [y^2]_{R \sin \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{2S_2} \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx [(R^2 - x^2) - R^2 \sin^2 \alpha] \\ &= \frac{1}{S_2} \left(\frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2} \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} dx - \frac{1}{2} \int_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} x^2 dx \right) \end{aligned}$$

ce qui permet d'aboutir à

$$\begin{aligned} y_g &= \frac{1}{S_2} \left[\left(\frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2} \right) (2R \cos \alpha) - \frac{1}{6} [x^3]_{-R \cos \alpha}^{R \cos \alpha} \right] \\ y_g &= \frac{1}{S_2} \left[R^3 \cos^3 \alpha - \frac{1}{6} (2R^3 \cos^3 \alpha) \right] \end{aligned}$$

Le résultat s'écrit donc :

$$g \left(0, \frac{2R \cos^3 \alpha}{\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}} \right). \quad (2.61)$$

Nous remarquons que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} y_g = 0$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} y_g = \frac{4R}{3\pi} \quad (\text{demi-disque}).$$

2.2.13 Exercice (Centre de masse d'une boule sphérique)

Déterminer les centres de masses des volumes suivants :

1. Une demi-sphère pleine de rayon R .
2. Un quart de sphère plein de de rayon R .

On suppose que la masse est uniformément répartie dans les volumes (i.e que $\rho = \text{cte}$).

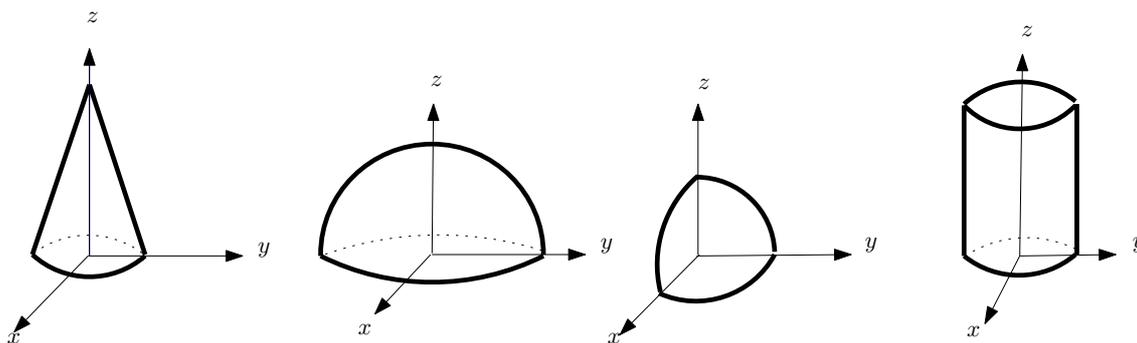


FIG. 2.18 – Cône, demi-boule circulaire, quart de boule et cylindre pleins.

2.2.14 Solution exercice (Centre de masse d'une boule sphérique)

Déterminons les centres de masses des volumes suivants :

1. Une demi-sphère pleine de rayon R :

- **La Masse** : On travaille en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et on prend comme origine le centre de la sphère. La masse totale $M = \int \int \int_D dm = \rho V$ est exprimée en fonction du volume (coordonnées sphériques ($x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ et $dv = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$))

$$V = \int \int \int_D dv = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{(\frac{4}{3} \pi R^3)}{2}. \quad (2.62)$$

- **Le centre de masse** : Les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M} \int \int \int_D x dm, \\ y_g &= \frac{1}{M} \int \int \int_D y dm, \\ z_g &= \frac{1}{M} \int \int \int_D z dm. \end{aligned}$$

ainsi

$$x_g = \frac{\rho}{\rho V} \int \int \int_D y dv = \frac{1}{V} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi}_{=0} = 0 \quad (\text{Le plan (YOZ) est de symétrie})$$

de plus

$$y_g = \frac{\rho}{\rho V} \int \int \int_D y dv = \frac{1}{V} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi}_{=0} = 0 \quad (\text{Le plan (XOZ) est de symétrie})$$

et enfin

$$\begin{aligned} z_g &= \frac{\rho}{\rho V} \int \int \int_D z \, dv = \frac{1}{V} \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ z_g &= \frac{1}{V} \left(\frac{R^4}{4} \right) \left(-\frac{1}{4} [\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) (2\pi) \end{aligned}$$

Finalement

$$g \left(0, 0, \frac{3}{8} R \right). \quad (2.63)$$

2. Un quart de sphère plein de rayon R :

La seule différence avec le cas précédent est que ($r = 0 \rightarrow R, \theta = 0 \rightarrow \pi/2, \phi = 0 \rightarrow \pi/2$ (il n'y a plus de plan de symétrie)). Après calculs montrer que

$$g \left(\frac{3}{8} R, \frac{3}{8} R, \frac{3}{8} R \right). \quad (2.64)$$

2.2.15 Centres de masses d'un cylindre et cône pleins

• Cylindre plein

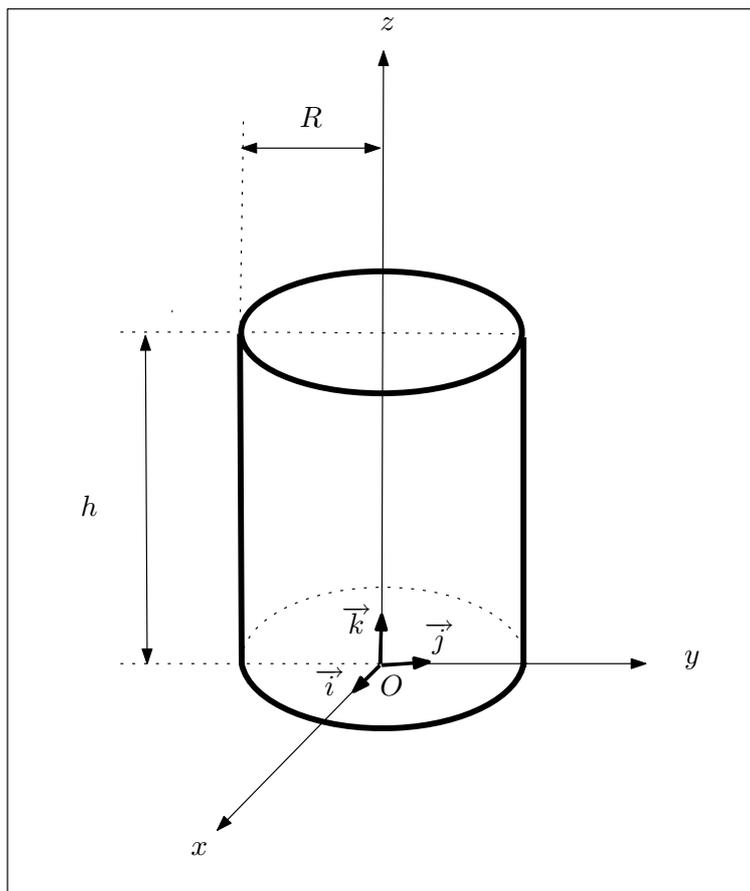
$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int \int \int_D x \, dm, \\ y_G &= \frac{1}{M} \int \int \int_D y \, dm, \\ z_G &= \frac{1}{M} \int \int \int_D z \, dm. \end{aligned}$$

Le volume du cylindre est décrit plus facilement en coordonnées cylindriques ; on travaille donc en coordonnées cylindriques (r, θ, z) et on prend comme axe (OZ) l'axe de révolution du cylindre, O étant le centre de la base du cylindre. La masse totale se calcule par l'intégrale

$$M = \rho \int \int \int_D dV.$$

L'intersection du plan $z = a$ tel que $0 < a < h$ et du cylindre plein est un disque de rayon $r = R$. Quelle que soit la hauteur $0 < a < h$ les disques ont le même rayon R (indépendamment de la hauteur a), ce qui fait que les intégrales sur les 3 variables r, θ et z soient indépendantes. Dans ce cas, l'intégrale précédente se calcule de la manière suivante :

$$M = \rho \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \rho(\pi R^2 h).$$

FIG. 2.19 – Cylindre plein d'axe (OZ) .

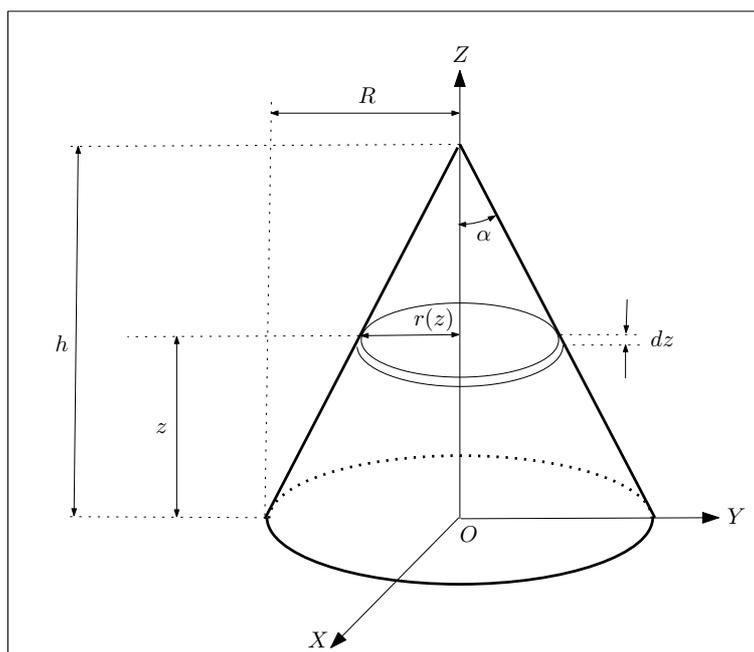
En utilisant les formules de passage entre coordonnées cylindriques et cartésiennes : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $z = z$, alors nous calculons les coordonnées du centre de masse comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\rho}{\rho(\pi R^2 h)} \int \int \int_D r \cos \theta \, dV = \frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R r^2 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{=0} \int_0^h dz = 0. \\ y_G = \frac{\rho}{\rho(\pi R^2 h)} \int \int \int_D r \sin \theta \, dV = \frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R r^2 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_{=0} \int_0^h dz = 0. \\ z_G = \frac{\rho}{\rho(\pi R^2 h)} \int \int \int_D z \, dV = \frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z \, dz = \frac{h}{2}. \end{array} \right.$$

Finalement

$$G(0, 0, h/2)$$

- Cône plein

FIG. 2.20 – Cône plein d'axe de révolution (OZ).1. **Volume du cône :**

Le volume total se calcule, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , par l'intégrale triple :

$$V = \int \int \int_D dV = \int \int \int_D r dr d\theta dz.$$

En fixant la hauteur à z , on intègre sur les variables $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$ et $r : 0 \rightarrow r(z)$,

$$V = \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^h dz \pi [r(z)]^2$$

avec $\tan \alpha = \frac{R}{h} = \frac{r(z)}{h-z}$, ce qui conduit à

$$r(z) = \frac{R}{h} (h-z).$$

Ainsi

$$V = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h dz (h-z)^2 = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{(-1)}{3} \left[(h-z)^3 \right]_0^h = -\frac{\pi R^2}{3h^2} (0 - h^3)$$

soit

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi R^2 h}{3}. \quad (2.65)$$

2. Masse du cône

Nous avons $M = \int \int \int_D dm = \rho_0 \int \int \int_D dV = \rho_0 V_{\text{cône}}$, ce qui donne, compte tenu de (2.65),

$$M = \frac{\rho_0 \pi R^2 h}{3} \quad (2.66)$$

3. Centre de masse :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int \int \int_D x \, dm, \\ y_G &= \frac{1}{M} \int \int \int_D y \, dm, \\ z_G &= \frac{1}{M} \int \int \int_D z \, dm. \end{aligned}$$

En utilisant les formules de passage entre coordonnées cylindriques et cartésiennes : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $z = z$, alors nous calculons les coordonnées du centre de masse comme suit :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\rho_0}{\rho_0 \frac{\pi R^2 h}{3}} \int \int \int_D x \, dV = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r^2 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{=0} = 0. \\ y_G &= \frac{\rho_0}{\rho_0 \frac{\pi R^2 h}{3}} \int \int \int_D y \, dV = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r^2 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{\rho_0}{\rho_0 \frac{\pi R^2 h}{3}} \int \int \int_D z \, dV = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h dz z \int_0^{r(z)} r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h dz z \pi [r(z)]^2 = \frac{3}{\pi R^2 h} \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h dz z (h-z)^2 \\ &= \frac{3}{h^3} \left\{ h^2 \int_0^h z \, dz - 2h \int_0^h z^2 \, dz + \int_0^h z^3 \, dz \right\} \\ &= \frac{3}{h^3} \left[h^2 \left(\frac{h^2}{2} \right) - 2h \left(\frac{h^3}{3} \right) + \left(\frac{h^4}{4} \right) \right] \\ &= 3h \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{h}{4} \end{aligned}$$

Finalement

$$G_{\text{cône}}(0, 0, h/4). \quad (2.67)$$

2.3 Angles d'euler

2.3.1 Exercice (Cosinus directeurs et Angles d'euler)

- **Partie A :** Dans le but de paramétrer l'orientation d'un repère orthonormé $R' = \{O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ attaché à un solide (corps rigide) par rapport à un repère absolu $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, nous allons utiliser, dans un premier temps les 9 cosinus directeurs.

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

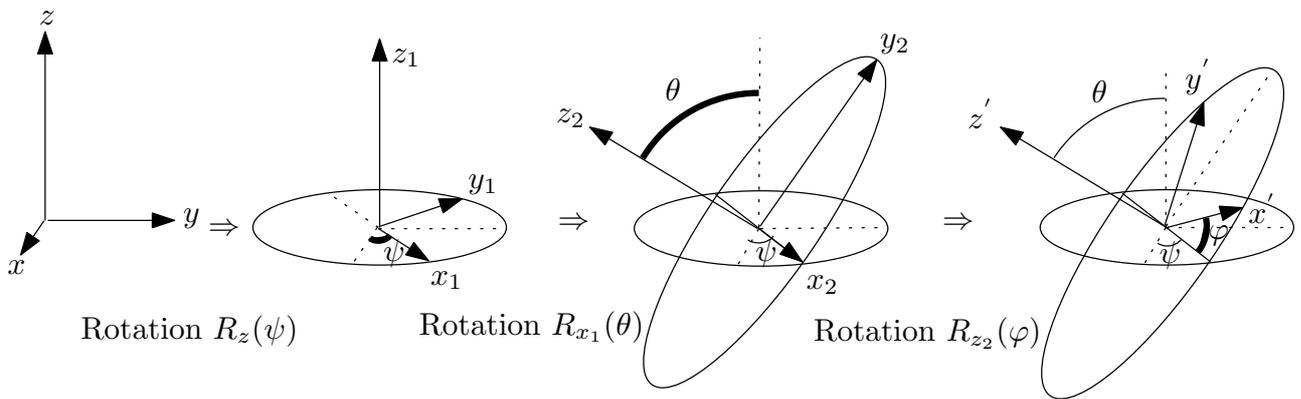


FIG. 2.21 – Angles d'Euler.

- Sachant que les deux repères R et R' sont orthonormés, écrire les contraintes sur les cosinus directeurs.
- Dédire le nombre de paramètres indépendants pour fixer l'orientation de R' par rapport à R .
- **Partie B :** Dans cette partie, nous allons choisir comme paramètres indépendants pour fixer l'orientation de R' par rapport à R les 3 angles d'euler ψ , θ et φ . Pour passer de R à R' , on définit 3 rotations successives $R_z(\psi)$, $R_{x_1}(\theta)$ et $R_{z_2}(\varphi)$ comme indiqué sur la figure.

- Sachant que $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = R_z(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = R_{x_1}(\theta) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_{z_2}(\varphi) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, déterminer les matrices de rotations $R_z(\psi)$, $R_{x_1}(\theta)$ et $R_{z_2}(\varphi)$.

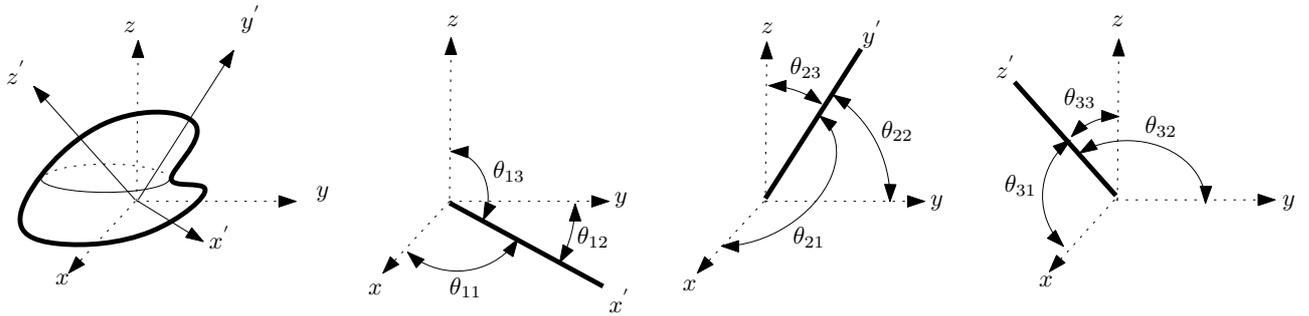


FIG. 2.22 – Cosinus directeurs des axes respectifs (OX') , (OY') et (OZ') .

- Déterminer la matrice de rotation complète $A = R_{z_2}(\varphi)R_{x_1}(\theta)R_z(\psi)$, qui permet de passer du repère R au repère R' et déterminer la matrice inverse A^{-1} .

2.3.2 Solution Exercice (Cosinus directeurs et Angles d'euler)

- **Partie A :** Dans le but de paramétrer l'orientation d'un repère orthonormé $R' = \{O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ attaché à un solide (corps rigide) par rapport à un repère absolu $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, nous allons utiliser, dans un premier temps les 9 cosinus directeurs.

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

- Sachant que les deux repères R et R' sont orthonormés, nous avons par conséquent d'une part

$$\begin{aligned} \vec{i}' \cdot \vec{i}' &= 1 \\ \vec{j}' \cdot \vec{j}' &= 1 \\ \vec{k}' \cdot \vec{k}' &= 1 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \vec{i}' \cdot \vec{j}' &= 0 \\ \vec{j}' \cdot \vec{k}' &= 0 \\ \vec{k}' \cdot \vec{i}' &= 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit respectivement aux contraintes

$$\cos^2 \theta_{11} + \cos^2 \theta_{12} + \cos^2 \theta_{13} = 1 \quad (2.70)$$

$$\cos^2 \theta_{21} + \cos^2 \theta_{22} + \cos^2 \theta_{23} = 1 \quad (2.71)$$

$$\cos^2 \theta_{31} + \cos^2 \theta_{32} + \cos^2 \theta_{33} = 1 \quad (2.72)$$

ainsi que

$$\cos \theta_{11} \cos \theta_{21} + \cos \theta_{12} \cos \theta_{22} + \cos \theta_{13} \cos \theta_{23} = 0 \quad (2.73)$$

$$\cos \theta_{21} \cos \theta_{31} + \cos \theta_{22} \cos \theta_{32} + \cos \theta_{23} \cos \theta_{33} = 0 \quad (2.74)$$

$$\cos \theta_{31} \cos \theta_{11} + \cos \theta_{32} \cos \theta_{12} + \cos \theta_{33} \cos \theta_{13} = 0. \quad (2.75)$$

- Dédouons le nombre de paramètres indépendants pour fixer l'orientation de R' par rapport à R :

Le nombre total de cosinus directeurs est 9 et le nombre total des contraintes est 6 [norme : relations (2.70), (2.71) et (2.72); orthogonalité : relations (2.73), (2.74) et (2.75)], ce qui donne un nombre de cosinus indépendants

$$9 - 6 = 3.$$

- **Partie B :** – Déterminons les matrices de rotations $R_z(\phi)$, $R_{x_1}(\theta)$ et $R_{z_2}(\psi)$:
Voir examen 2012, section (3.5).
- Déterminons la matrice de rotation complète $A = R_{z_2}(\psi)R_{x_1}(\theta)R_z(\phi)$, qui permet de passer du repère R au repère R' et déterminer la matrice inverse A^{-1} :
Voir examen 2012, section (3.5).

2.3.3 Démonstration que $A^{-1} = A^t$ pour une transformation orthogonale

- **Méthode 1 :**

Soit une rotation à 3D représentée par une matrice A , telle que

$$X' = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.76)$$

La rotation conserve les modules des vecteurs, avant et après rotation, de telle sorte que

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= \|X'\|^2 \\ (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 &= (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 \\ \sum_{i=1}^3 x_i x_i &= \sum_{i=1}^3 x'_i x'_i. \end{aligned} \quad (2.77)$$

En utilisant (2.76) dans (2.77), nous obtenons l'expression suivante

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_i x_i &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 A_{ik} x_k \right) \left(\sum_{l=1}^3 A_{il} x_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 A_{ik} A_{il} \right) x_l x_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 (A^t)_{ki} A_{il} \right] x_l x_k. \end{aligned} \quad (2.78)$$

L'expression du carré du module de x peut se mettre aussi sous la forme ⁽²⁾

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \delta_{kl} x_l x_k &= \delta_{11} x_1 x_1 + \delta_{12} x_1 x_2 + \delta_{13} x_1 x_3 \\ &\quad + \delta_{21} x_2 x_1 + \delta_{22} x_2 x_2 + \delta_{23} x_2 x_3 \\ &\quad + \delta_{31} x_3 x_1 + \delta_{32} x_3 x_2 + \delta_{33} x_3 x_3 \\ &= (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = \sum_{i=1}^3 x_i x_i. \end{aligned} \quad (2.79)$$

ou bien de façon plus "professionnelle"

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \delta_{kl} x_l x_k &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 \delta_{kl} x_l \right) x_k : \quad \text{tous les termes de la somme entre parenthèses sont nuls sauf quand } l = k \\ &= \sum_{k=1}^3 x_k x_k = \sum_{i=1}^3 x_i x_i : \quad \text{indices muets} \end{aligned} \quad (2.80)$$

L'identification entre (2.78) et (2.80) nous permet de montrer que le produit de A avec sa transposée est égal à l'unité

$$\sum_{i=1}^3 (A^t)_{ki} A_{il} = \delta_{kl} \quad \Leftrightarrow \quad A^t A = 1. \quad (2.81)$$

D'autre part, nous avons aussi

$$A^{-1} A = 1. \quad (2.82)$$

L'identification entre (2.81) et (2.82) nous permet finalement d'écrire

$$\boxed{A^{-1} = A^t}$$

• **Méthode 2 :** (Méthode équivalente à la précédente)

$$\underbrace{X^t X}_{\|X\|^2 = \|X'\|^2} = (X')^t X' = (A X)^t (A X) = (X^t A^t) (A X) = X^t \underbrace{(A^t A)}_{=1} X \Rightarrow A^t = A^{-1} \text{ car } A^{-1} A = 1 \quad (2.83)$$

²Symbôle de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

2.4 Moment d'inertie (par rapport à un axe)

2.4.1 Exercice (Moment d'inertie d'une tige linéaire)

Soit une tige linéaire de densité de masse constante λ_0 et dont les extrémités sont situées aux points $A(0, a/2, 0)$ et $B(0, -a/2, 0)$ ($a \in \mathbb{R}$).

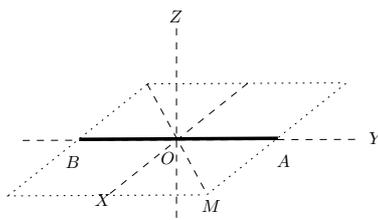


FIG. 2.23 – Une tige linéaire $[AB]$.

Déterminer les moments d'inertie de la tige, par rapport aux axes :

- (a) (OX) , (b) (OY) , (c) (OZ) , (d) $(OM) \in \text{plan}(XOY)$ et $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}) = \pi/4$.

2.4.2 Solution exercice (Moment d'inertie d'une tige linéaire)

Soit une tige linéaire de densité de masse constante λ_0 et dont les extrémités sont situées aux points $A(0, a/2, 0)$ et $B(0, -a/2, 0)$ ($a \in \mathbb{R}$).

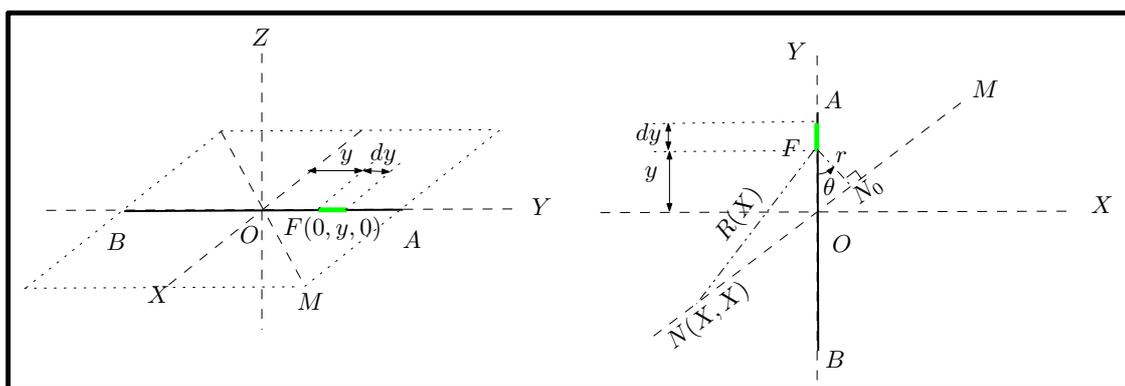


FIG. 2.24 – L'élément de longueur dy est situé aux distances y , 0 et r des axes respectifs (OX) , (OY) et (OM) .

Déterminons les moments d'inertie de la tige :

1. $I_{(ox)}$

Le moment d'inertie élémentaire par rapport à l'axe (ox) d'une masse infinitésimale

$dm(0, y, 0)$ est $dI_{(ox)} = dm r^2 = \lambda_0 dy y^2$ de sorte que le moment total soit $I_{(ox)} = \int_D dI_{(ox)}$, ainsi

$$I_{(ox)} = \lambda_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy = \frac{\lambda}{3} \left[y^3 \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\lambda_0}{12} a^3. \quad (2.84)$$

Nous pouvons écrire en fonction de la masse de la tige $M = \lambda_0 a$

$$I_{(ox)} = \frac{M}{12} a^2. \quad (2.85)$$

2. $I_{(oy)} = 0$ car la distance d'une masse infinitésimale dm , située au point $F(0, y, 0)$, à l'axe (oy) est nulle.
3. $I_{(oz)} = I_{(ox)}$ car la distance de la masse infinitésimale dm , située au point $F(0, y, 0)$, à l'axe (oz) est y .
4. $I_{(OM)}$

• **Méthode 1** : procédons par étapes

- (a) Choisissons un point quelconque $N(X, X)$ de la droite (OM) : $y = x$.
- (b) Calculons la distance

$$R = \|\overrightarrow{FN}\| = \sqrt{X^2 + (y - X)^2}$$

- (c) Pour calculer la distance $\|\overrightarrow{FN_0}\|$ (entre F et sa projection orthogonale $N_0(X_0, X_0)$ sur (OM)), minimisons la distance

$$\left(\frac{dR}{dX} \right)_{X=X_0} = \frac{X_0 - (y - X_0)}{\sqrt{X_0^2 + (y - X_0)^2}} = 0,$$

ce qui conduit à $X_0 = y/2$.

- (d) Calculer le carré de la distance

$$r^2 = R^2(X = X_0) = \left[\left(\frac{y}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{y}{2} \right)^2 \right] = \frac{y^2}{2}.$$

- (e) Le moment d'inertie est donné par

$$I_{(OM)} = \int_D dI_{(OM)} = \int_D dm r^2 = \lambda \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{y^2}{2} dy = \frac{I_{(ox)}}{2} = \frac{\lambda_0}{24} a^3. \quad (2.86)$$

• **Méthode 2** : Dans le triangle rectangle (OFN_0) nous avons $\sin \theta = r/y$ ainsi la distance est obtenue directement $r = y \sin \pi/4 = y(\sqrt{2}/2)$.

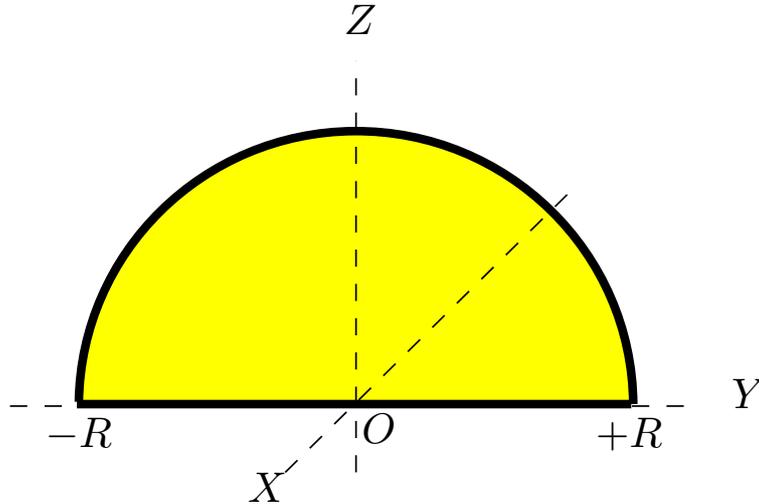


FIG. 2.25 – Demi-disque de densité de masse surfacique constante.

2.4.3 Exercice (Moment d'inertie d'un demi-disque)

Soit un demi-disque de densité de masse constante λ_0 et de rayon R .

Déterminer les moments d'inertie du demi-disque, par rapport aux axes :

- (a) (OX) , (b) (OY) , (c) (OZ) .

2.4.4 Solution exercice (Moment d'inertie d'un demi-disque)

Détermination des moments d'inertie du demi-disque :

1. $I_{(ox)}$

Le moment d'inertie élémentaire par rapport à l'axe (ox) d'une masse infinitésimale $dm(0, y, z) = dm(0, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ est $dI_{(ox)} = dm \rho^2 = \sigma_0 \rho d\rho d\theta \rho^2$ de sorte que le moment total soit $I_{(ox)} = \int_D dI_{(ox)}$, ainsi

$$I_{(ox)} = \sigma_0 \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi d\theta = \sigma_0 \frac{\pi R^4}{4}. \quad (2.87)$$

Nous pouvons écrire en fonction de la masse de la tige $M = \sigma_0 \pi R^2/2$

$$I_{(ox)} = \frac{M}{2} R^2. \quad (2.88)$$

2. $I_{(oy)}$

Le moment d'inertie élémentaire par rapport à l'axe (oy) d'une masse infinitésimale $dm(0, y, z) = dm(0, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ est $dI_{(oy)} = dm z^2 = \sigma_0 \rho d\rho d\theta (\rho \sin \theta)^2$ de sorte que le moment total soit $I_{(oy)} = \int_D dI_{(oy)}$, ainsi

$$I_{(oy)} = \sigma_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \sigma_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\theta d\theta = \sigma_0 \left(\frac{R^4}{4}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.89)$$

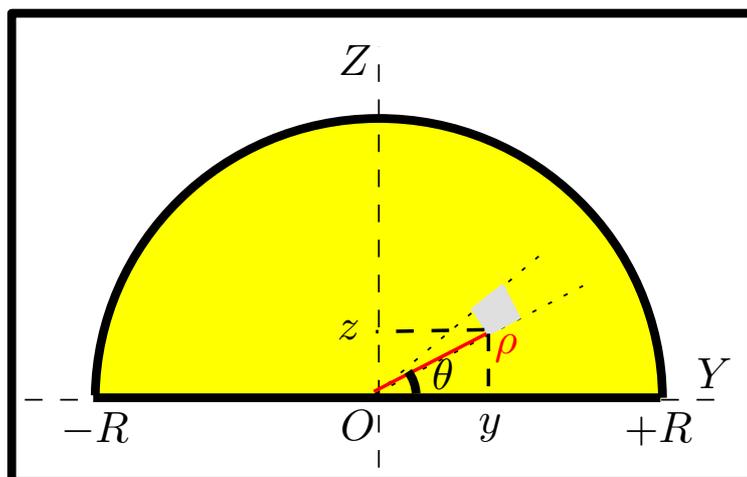


FIG. 2.26 – Demi-disque et élément de surface infinitésimal en coordonnées polaires.

3. $I_{(oz)}$

Le moment d'inertie élémentaire par rapport à l'axe (oz) d'une masse infinitésimale $dm(0, y, z) = dm(0, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ est $dI_{(oz)} = dm y^2 = \sigma_0 \rho d\rho d\theta (\rho \cos \theta)^2$ de sorte que le moment total soit $I_{(oz)} = \int_D dI_{(oz)}$, ainsi

$$I_{(oz)} = \sigma_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \sigma_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\theta d\theta = \sigma_0 \left(\frac{R^4}{4}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.90)$$

Nous remarquons que

$$I_{(oz)} = I_{(oy)}$$

et que

$$I_{(oz)} = I_{(ox)} + I_{(oy)}$$

car, en vertu du théorème de Pythagore, la distance de la masse infinitésimale dm , située au point $dm(0, y, z) = dm(0, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, à l'axe (ox) est telle que (voir Fig (2.26))

$$\rho^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow \int_D dm \rho^2 = \int_D dm y^2 + \int_D dm z^2.$$

2.4.5 Exercice (Moment d'inertie d'une boule)

Déterminer les moments d'inertie des volumes suivants :
par rapport aux trois axes :

- (a) (OX) , (b) (OY) , (c) (OZ) .

Remarque : Les masses sont uniformément réparties sur les trois volumes ($\rho_0 = \text{cte}$)

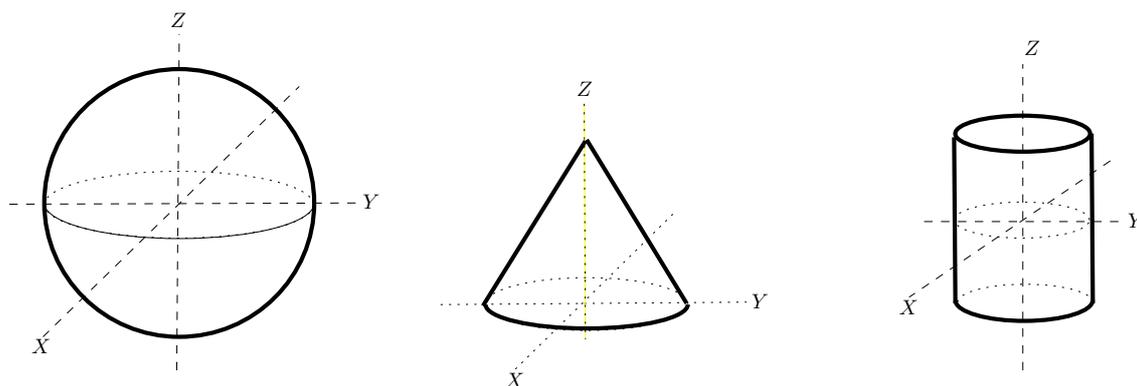


FIG. 2.27 – Boule, cône et cylindre pleins.

2.4.6 Solution exercice (Moment d'inertie d'une boule)

Déterminons les moments d'inertie, par rapport aux trois axes, d'une boule dont la masse est uniformément répartie (coordonnées sphériques) :

1. $I_{(oz)}$

Le moment d'inertie élémentaire par rapport à l'axe (oz) d'une masse infinitésimale $dm(x, y, z) = dm(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ est

$$dI_{(oz)} = dm r_{(ox)}^2 = \rho_0 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi (x^2 + y^2) = \rho_0 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi (r^2 \sin^2 \theta)$$

de sorte que le moment total soit $I_{(ox)} = \int_D dI_{(ox)}$, ainsi

$$I_{(oz)} = \rho_0 \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

En procédant à la linéarisation $\sin^3 \theta = (3 \sin \theta - \sin 3\theta)/4$, il est possible de montrer que

$$I_{(oz)} = \frac{2}{5} M R^2, \quad (2.91)$$

où la masse de la boule est donnée par

$$M = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Pour la boule de masse uniformément répartie, toutes les droites passant par l'origine sont équivalentes physiquement, ainsi nous pouvons déduire par symétrie que

$$I_{(ox)} = I_{(oy)} = I_{(oz)}.$$

Les étudiants motivés sont invités à faire les calculs (quelque peu fastidieux) pour vérifier un tel résultat.

Pour ce qui est du cylindre plein voir Examen 2009 (section (3.1)) et pour ce qui est du cône plein voir l'Examen Remplacement 2012 (section (3.7)) où un tronc cône est traité (le passage des moments d'inertie du tronc cône vers ceux du cône sont obtenus grâce à la prescription $a = b$).

2.4.7 Exercice Supplémentaire (Moment d'inertie d'un rectangle)

1. Soit le rectangle $ABCD$, de masse uniformément répartie, représenté sur la figure gauche de (2.28).

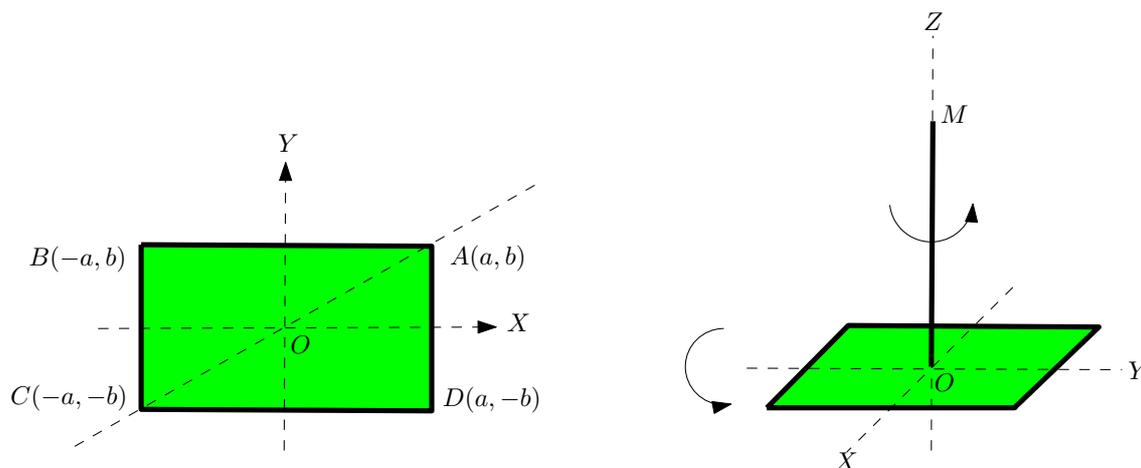


FIG. 2.28 – Rectangle de densité de masse surfacique constante. Balai constitué d'un rectangle et d'une tige linéaire.

Déterminer les moments d'inertie du rectangle, par rapport aux axes :

- (a) (OX) , (b) (OY) , (c) (AC) .

2. Soit un balai sous forme d'une tige OM , de masse linéaire $\lambda_0 = \text{cte}$ et de longueur $L = 8a$, et d'un rectangle de densité de masse $\sigma_0 = \text{cte}$ (voir figure droite (2.28)). Déterminer les moments d'inertie du balai, par rapport aux axes :

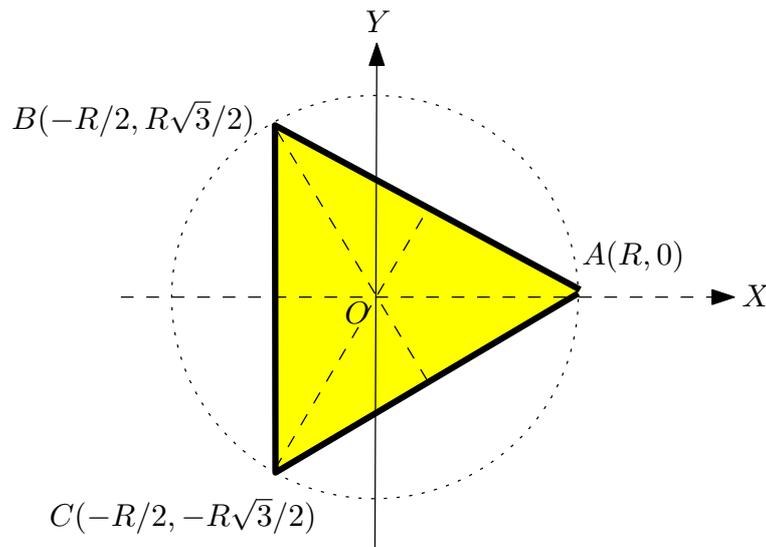
- (a) (OX) , (b) (OY) , (c) (OZ) .

3. Est ce que c'est plus facile de faire tourner le balai autour de l'axe (OZ) ou bien (OY) ?

2.4.8 Exercice Supplémentaire (Moment d'inertie d'un triangle)

Soit un triangle ABC , de masse uniformément répartie, représenté sur la figure (2.29). Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes :

- (a) (OX) , (b) (OY) , (c) (OZ) , (d) (OA) , (e) (OB) , (f) (OC) .

FIG. 2.29 – Triangle ABC dessiné à l'intérieur d'un cercle.

2.5 Tenseur d'inertie

2.5.1 Exercice (Tenseur d'inertie de solides continus)

Déterminer les tenseurs d'inertie en O , relativement au repère orthonormé (O, xyz) pour les solides de la section (2.2) pour les systèmes continus.

2.5.2 Solution exercice (Tenseur d'inertie de solides continus)

Les composantes du tenseur d'inertie en O , relativement au repère orthonormé (O, xyz) d'un solide (corp rigide) sont

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D dm(y^2 + z^2) & -\int_D dm xy & -\int_D dm xz \\ -\int_D dm xy & \int_D dm(x^2 + z^2) & -\int_D dm yz \\ -\int_D dm xz & -\int_D dm yz & \int_D dm(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

En vertu du Théorème de Pythagore, les distances $r_{(ox)}$, $r_{(oy)}$ et $r_{(oz)}$ respectives d'un point quelconque (x, y, z) aux axes (ox) , (oy) et (oz) sont telles que (voir Fig (2.30))

$$r_{(ox)}^2 = (y^2 + z^2) \quad (2.92)$$

$$r_{(oy)}^2 = (x^2 + z^2) \quad (2.93)$$

$$r_{(oz)}^2 = (x^2 + y^2) \quad (2.94)$$

ce qui permet de vérifier que les éléments diagonaux du tenseur d'inertie ne représentent en fait que les moments d'inertie

$$I_{xx} = \int_D dm (y^2 + z^2) = I_{(ox)} \quad (2.95)$$

$$I_{yy} = \int_D dm (x^2 + z^2) = I_{(oy)} \quad (2.96)$$

$$I_{zz} = \int_D dm (x^2 + y^2) = I_{(oz)} \quad (2.97)$$

- **Tige linéaire** : Par exemple déterminons le tenseur d'inertie de la tige $[AB]$ de la

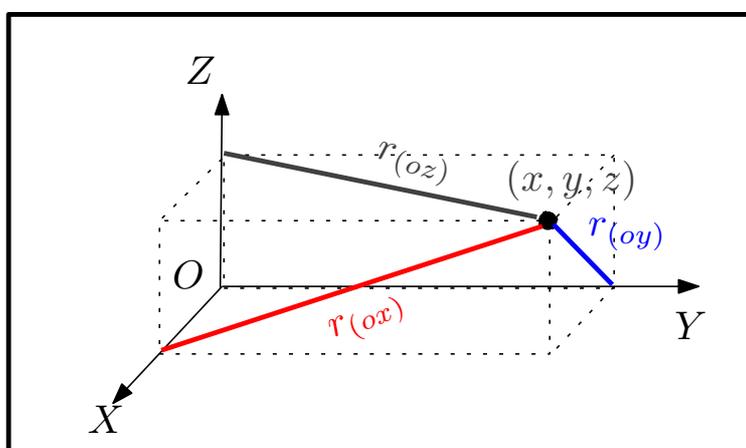


FIG. 2.30 –

section (2.4.2). Rappelons que l'élément de masse élémentaire $dm = \lambda_0 dy$ est placé au point $(x = 0, y, z = 0)$. Comme les éléments diagonaux ont déjà été déterminés, nous allons nous focaliser sur les éléments non diagonaux (Produits d'inertie)

$$I_{xy} = - \int_D dm xy = - \int_D (\lambda_0 dy) \underbrace{(x)}_{=0} y = 0$$

$$I_{xz} = - \int_D dm xz = - \int_D (\lambda_0 dy) \underbrace{(x)}_{=0} \underbrace{(z)}_{=0} = 0$$

$$I_{yz} = - \int_D dm yz = - \int_D (\lambda_0 dy) \underbrace{(z)}_{=0} y = 0$$

Finalement

$$I = \begin{pmatrix} \frac{M}{12} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12} a^2 \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Chapitre 3

Examens types avec solutions

3.1 Examen 2009-2010

3.1.1 Problème (12 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un cylindre plein de densité de masse constante ρ_0 , de hauteur h et de rayon de base R (voir Figure 3.1).

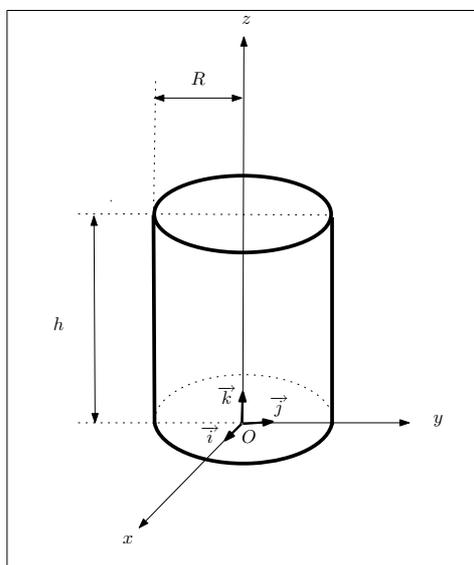


FIG. 3.1 –

1. Calculer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$.
2. Calculer les composantes du tenseur d'inertie en O , relativement au repère ortho-

normé (O, xyz)

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D dm(y^2 + z^2) & - \int_D dm xy & - \int_D dm xz \\ - \int_D dm xy & \int_D dm(x^2 + z^2) & - \int_D dm yz \\ - \int_D dm xz & - \int_D dm yz & \int_D dm(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

On demande d'exprimer les composantes de I en fonction de la masse totale M du cylindre.

3. En utilisant le Théorème de Huygens-Steiner, déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe (GX) , tel que $(GX) \parallel (Ox)$.
4. Dans le cas où le cylindre tourne avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe (Ox) , calculer dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
 - (a) L'énergie cinétique E_c du cylindre.
 - (b) Le moment cinétique \vec{L}_O du cylindre (par rapport à O).
 - (c) En fixant la masse M , que devient les deux grandeurs précédentes dans les cas suivants :
 - i. Cas où $R \rightarrow 0$.
 - ii. Cas où $h \rightarrow 0$.

Rappels :

$$dx dy dz = r dr d\theta dz, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

3.1.2 Exercice (08 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , considérons n particules ponctuelles, de masses identiques m , situées respectivement aux points $A_1(a, b)$, $A_2(2a, b)$, \dots , $A_n(na, b)$ et considérons la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{b}{a}x + b$, où a et b sont deux constantes strictement positives (voir Figure 3.2).

1. Dans le but de calculer la distance d_i , du $i^{\text{ème}}$ point $A_i(ia, b)$ à la droite (Δ) , procéder par étapes :
 - (a) Choisir un point arbitraire de la droite $C(X, -\frac{b}{a}X + b) \in (\Delta)$.
 - (b) Calculer la distance $R(X) = \|\overrightarrow{A_i C}\|$, entre C et $A_i(ia, b)$.
 - (c) Déterminer la valeur particulière X_0 qui minimise la distance R .

- (d) Déduire que $d_i = R(X_0)$ s'écrit sous la forme $(i \alpha_0)$, où α_0 est une constante à déterminer.
2. Calculer le moment d'inertie $I_{(\Delta)}$ du système des n masses ponctuelles, par rapport à la droite (Δ) .

On donne :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

3. Dans le cas où $n = 1$, que devient l'expression de $I_{(\Delta)}$?

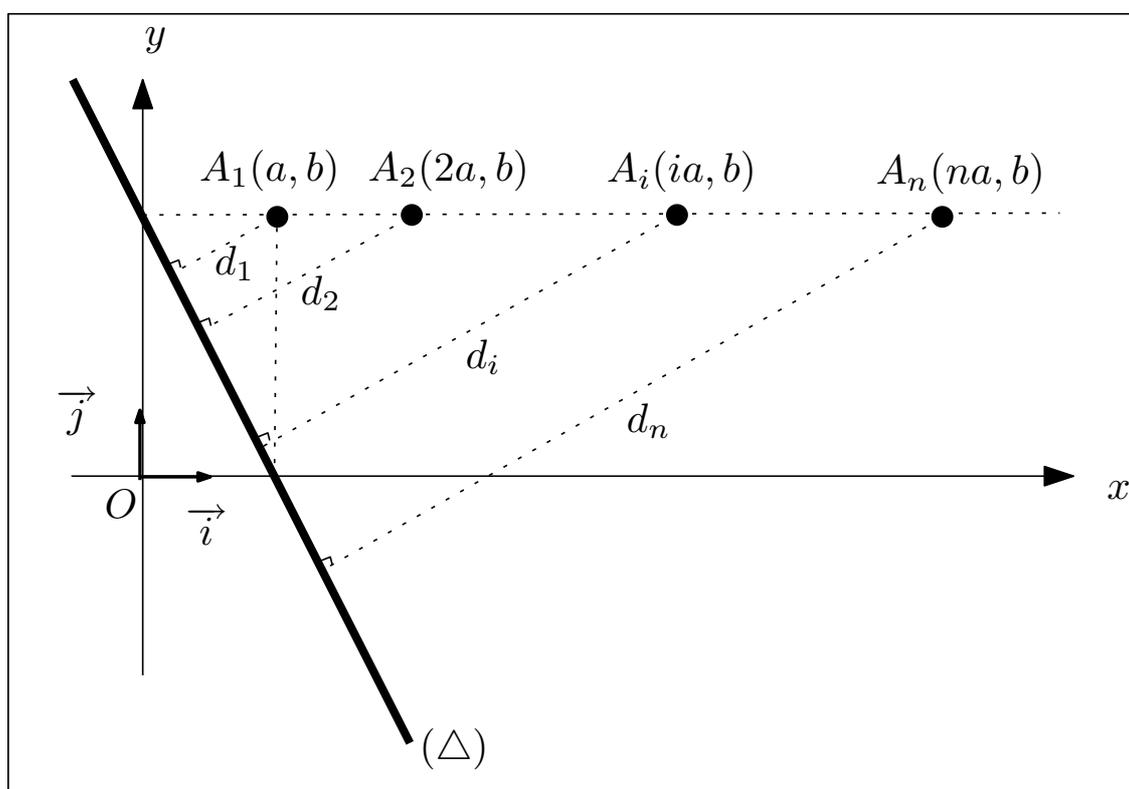


FIG. 3.2 –

3.2 Corrigé Examen 2009-2010

3.2.1 Problème (12 points)

1. Centre de masse :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y dm, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_D z dm.$$

En utilisant les coordonnées cylindriques :

$$M = \rho \int_D dV = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \rho(\pi R^2 h).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\rho}{\rho(\pi R^2 h)} \int_D r \cos \theta dV = \frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_{=0} \int_0^h dz = 0. \\ y_G = \frac{\rho}{\rho(\pi R^2 h)} \int_D r \sin \theta dV = \frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{=0} \int_0^h dz = 0. \\ z_G = \frac{\rho}{\rho(\pi R^2 h)} \int_D z dV = \frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z dz = \frac{h}{2}. \end{array} \right.$$

Finalement

$$G(0, 0, h/2)$$

2. Tenseur d'inertie :

(a) Éléments diagonaux :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_D dm(y^2 + z^2) = \int_D (\rho r dr d\theta dz) (r^2 \sin^2 \theta + z^2) \\ &= \rho \left(\int_0^h dz \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^h z^2 dz \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \right) = \underbrace{(\rho \pi R^2 h)}_{=M} \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_D dm(x^2 + z^2) = \int_D (\rho r dr d\theta dz) (r^2 \cos^2 \theta + z^2) \\ &= \rho \left(\int_0^h dz \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^h z^2 dz \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \right) = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_D dm(x^2 + y^2) = \int_D (\rho r dr d\theta dz) r^2 \\ &= \rho \int_0^h dz \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M R^2}{2} \end{aligned}$$

(b) Produits d'inertie :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \int_D dm xy = \int_D (\rho r dr d\theta dz) (r^2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= -\rho \int_0^h dz \int_0^R r^3 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$I_{xz} = - \int_D dm xz = \int_D (\rho r dr d\theta dz) (z r \cos \theta) = -\rho \int_0^h z dz \int_0^R r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_{=0} = 0$$

$$I_{yz} = - \int_D dm yz = \int_D (\rho r dr d\theta dz) (z r \sin \theta) = -\rho \int_0^h z dz \int_0^R r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{=0} = 0$$

Finalement

$$I = \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M R^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

3. Moment d'inertie par rapport à l'axe (GX) :

Théorème de Huygens-Steiner

$$I_{(Ox)} = I_{(GX)} + M \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$I_{(GX)} = I_{xx} - M \left(\frac{h}{2} \right)^2 = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) - M \left(\frac{h^2}{4} \right)$$

$$I_{(GX)} = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

4. Dans le cas où le cylindre tourne avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe (Ox), calculons dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

(a) L'énergie cinétique E_c du cylindre :

$$E_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M R^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega \vec{i}$

$$E_c = \frac{1}{2} (\omega \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{M\omega^2}{2} \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

(b) Le moment cinétique \vec{L}_O du cylindre (par rapport à O) :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= I \vec{\omega} \\ \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\omega \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{L}_O &= M\omega \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \vec{i} \end{aligned}$$

(c) Limites dans les cas :

i. Cas où $R \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{M\omega^2 h^2}{6} \\ \vec{L}_O &= M\omega \frac{h^2}{3} \vec{i} \end{aligned}$$

ii. Cas où $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{M\omega^2 R^2}{8} \\ \vec{L}_O &= M\omega \frac{R^2}{4} \vec{i} \end{aligned}$$

3.2.2 Exercice (08 points)

1. **Distance** d_i (du $i^{\text{ème}}$ point $A_i(ia, b)$ à la droite (Δ)) :

(a) Calcul de la distance entre $C(X, -\frac{b}{a}X + b) \in (\Delta)$ et $A_i(ia, b)$:

$$R(X) = \|\vec{A_i C}\| = \sqrt{(ia - X)^2 + \left(b + \frac{b}{a}X - b \right)^2} = \sqrt{(ia - X)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 X^2}.$$

(b) Valeur particulière X_0 qui minimise la distance R :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dX}\right)_{X=X_0} &= 0 \\ \frac{-2(ia - X_0) + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 X_0}{2\sqrt{(ia - X_0)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 X_0^2}} &= 0 \\ \Rightarrow (ia - X_0) &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 X_0 \\ X_0 &= \frac{ia}{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

(c) Distance d_i :

$$\begin{aligned} d_i &= R(X_0) \\ &= \left[\left(ia - \frac{ia}{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]} \right)^2 + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 (ia)^2}{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Finalement

$$d_i = i\alpha_0,$$

avec

$$\alpha_0 = \left[\left(a - \frac{a}{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]} \right)^2 + \frac{b^2}{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} \right]^{1/2} = \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

2. **Moment d'inertie** $I_{(\Delta)}$:

$$I_{(\Delta)} = m \sum_{i=1}^n (d_i)^2 = m \sum_{i=1}^n (i\alpha_0)^2 = m(\alpha_0)^2 \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right)$$

or

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6},$$

$$\begin{aligned} I_{(\Delta)} &= m(\alpha_0)^2 \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \\ &= m \left(\frac{b^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right) \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \end{aligned}$$

Finalement

$$I_{(\Delta)} = m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

3. Le cas où $n = 1$:

$$I_{(\Delta)} = m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right).$$

3.3 Rattrapage 2009-2010

3.3.1 Problème (10 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons une plaque **rectangulaire** de densité de masse constante σ_0 et de sommets $A_1(a/2, b/2, 0)$, $A_2(-a/2, b/2, 0)$, $A_3(-a/2, -b/2, 0)$, $A_4(a/2, -b/2, 0)$ où a et b sont des constantes réelles et positives (La plaque est contenue dans le plan (OXY)).

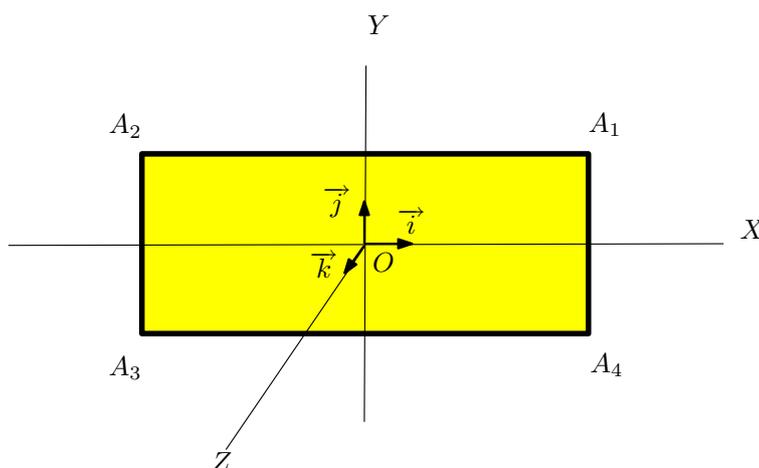


FIG. 3.3 –

1. Calculer la masse M de la plaque.
2. Calculer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$.
3. Calculer les composantes du tenseur d'inertie en O , relativement au repère orthonormé (O, XYZ)

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D dm(y^2 + z^2) & - \int_D dm xy & - \int_D dm xz \\ - \int_D dm xy & \int_D dm(x^2 + z^2) & - \int_D dm yz \\ - \int_D dm xz & - \int_D dm yz & \int_D dm(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

On demande d'exprimer les composantes de I en fonction de la masse totale M de la plaque rectangulaire.

4. Dans le cas où, la plaque tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire ω , calculer dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
 - (a) L'énergie cinétique E_c de la plaque.
 - (b) Le moment cinétique \vec{L}_O , par rapport à O .

3.3.2 Exercice (10 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) :

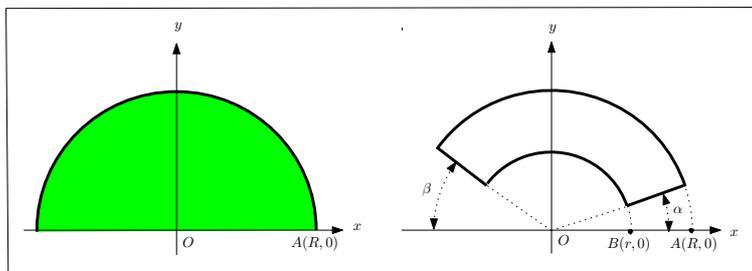


FIG. 3.4 –

1. Déterminer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G)$ de la plaque à droite, de densité de masse constante σ . (Exprimer le résultat en fonction de R, r, α et β)
2. Dédire les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g)$ de la plaque sous forme d'un demi-disque de densité de masse constante σ (figure située à gauche).

Rappel :

$$dx dy = \rho d\rho d\theta, \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \text{ et } \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

3.4 Corrigé Rattrapage 2009-2010

3.4.1 Problème (10 points)

1. Centre de masse :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y dm, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_D z dm.$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes :

$$M = \sigma \int_D ds = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy = \sigma(ab).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\sigma}{\sigma(ab)} \int_D x ds = \frac{\sigma}{\sigma(ab)} \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} x dx}_{=0} \int_{-b/2}^{b/2} dy = 0. \\ y_G = \frac{\sigma}{\sigma(ab)} \int_D y ds = \frac{\sigma}{\sigma(ab)} \int_{-a/2}^{a/2} \underbrace{dx}_{=0} \int_{-b/2}^{b/2} y dy = 0. \\ z_G = \frac{\sigma}{\sigma(ab)} \int_D \underbrace{z}_{=0} ds = 0. \end{array} \right.$$

Finalement

$$G(0, 0, 0)$$

2. Tenseur d'inertie :

(a) Eléments diagonaux :

$$I_{xx} = \int_D dm(y^2 + \underbrace{z^2}_{=0}) = \int_D (\sigma dx dy) y^2 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \underbrace{(\sigma ab)}_{=M} \left(\frac{b^2}{12} \right) = \frac{M b^2}{12},$$

$$I_{yy} = \int_D dm(y^2 + \underbrace{z^2}_{=0}) = \int_D (\sigma dx dy) x^2 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy = \frac{M a^2}{12},$$

$$I_{zz} = \int_D dm(x^2 + y^2) = I_{xx} + I_{yy} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

(b) Produits d'inertie :

$$I_{xy} = - \int_D dm xy = \int_D (\sigma dx dy) (xy) = -\sigma \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} x dx}_{=0} \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} y dy}_{=0} = 0$$

$$I_{xz} = - \int_D dm x \underbrace{z}_{=0} = 0$$

$$I_{yz} = - \int_D dm y \underbrace{z}_{=0} = 0$$

Finalement

$$I = \begin{pmatrix} \frac{M b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

3. Dans le cas où la plaque rectangulaire tourne avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe (OZ) , calculons dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

(a) L'énergie cinétique E_c de la plaque :

$$E_c = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \begin{pmatrix} \frac{M b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega \vec{k}$

$$E_c = \frac{1}{2} (0 \ 0 \ \omega) \begin{pmatrix} \frac{M b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{M \omega^2}{24} (a^2 + b^2)$$

(b) Le moment cinétique \vec{L}_O de la plaque (par rapport à O) :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= I \vec{\omega} \\ \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{M b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M \omega}{12} (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \\ \vec{L}_O &= \frac{M \omega}{12} (a^2 + b^2) \vec{k}\end{aligned}$$

3.4.2 Exercice (10 points)

1. Centre de masse $G(x_G, y_G)$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x \, dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y \, dm.$$

$$M = \int_D dm = \sigma \int_r^R \rho \, d\rho \int_\alpha^{\pi-\beta} d\theta = \sigma \underbrace{\left[\frac{1}{2} (R^2 - r^2) \right]}_{=S} (\pi - \beta - \alpha) = \sigma S$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x (\sigma \underbrace{dx dy}_{=\rho \, d\rho \, d\theta}) = \frac{\sigma}{\sigma S} \int_r^R \rho^2 \, d\rho \int_\alpha^{\pi-\beta} \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{3} (R^3 - r^3) \right] [\sin(\pi - \beta) - \sin \alpha]$$

$$x_G = \frac{2}{3} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \right) \left(\frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\pi - \beta - \alpha} \right)$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_D y (\sigma \underbrace{dx dy}_{=\rho \, d\rho \, d\theta}) = \frac{\sigma}{\sigma S} \int_r^R \rho^2 \, d\rho \int_\alpha^{\pi-\beta} \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{3} (R^3 - r^3) \right] (-1) [\cos(\pi - \beta) - \cos \alpha]$$

$$y_G = \frac{2}{3} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \right) \left(\frac{\cos \beta + \cos \alpha}{\pi - \beta - \alpha} \right)$$

2. Centre de masse $g(x_g, y_g)$

Le demi-disque correspond au cas où $r \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ et $\beta \rightarrow 0$:

$$x_G \rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{R}{\pi} \right) \underbrace{(\sin 0 - \sin 0)}_{=0} = 0 = x_g$$

$$y_G \rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{R}{\pi} \right) \underbrace{(\cos 0 + \cos 0)}_{=2} = \frac{4R}{3\pi} = y_g$$

3.5 Examen 2012

3.5.1 Problème (12 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un **cylindre non plein** de densité de masse surfacique constante σ_0 , de hauteur h et de rayon de base R (voir Figure 3.5).

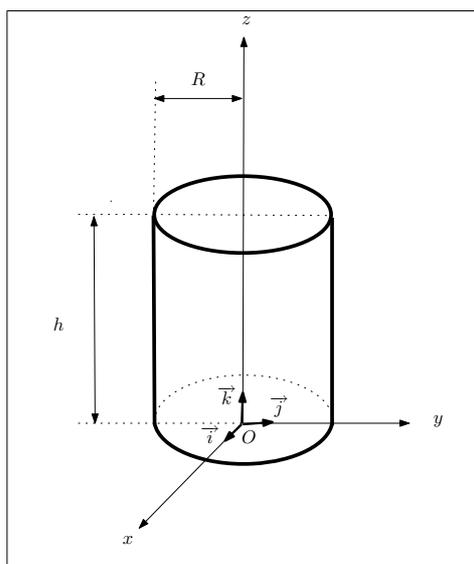


FIG. 3.5 –

1. Calculer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$.
2. Calculer les composantes du tenseur d'inertie en O , relativement au repère orthonormé (O, xyz)

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D dm(y^2 + z^2) & - \int_D dm xy & - \int_D dm xz \\ - \int_D dm xy & \int_D dm(x^2 + z^2) & - \int_D dm yz \\ - \int_D dm xz & - \int_D dm yz & \int_D dm(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

On demande d'exprimer les composantes de I en fonction de la masse totale M du cylindre.

3. En utilisant le Théorème de Huygens-Steiner, déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe (GY) , tel que $(GY) \parallel (Oy)$.

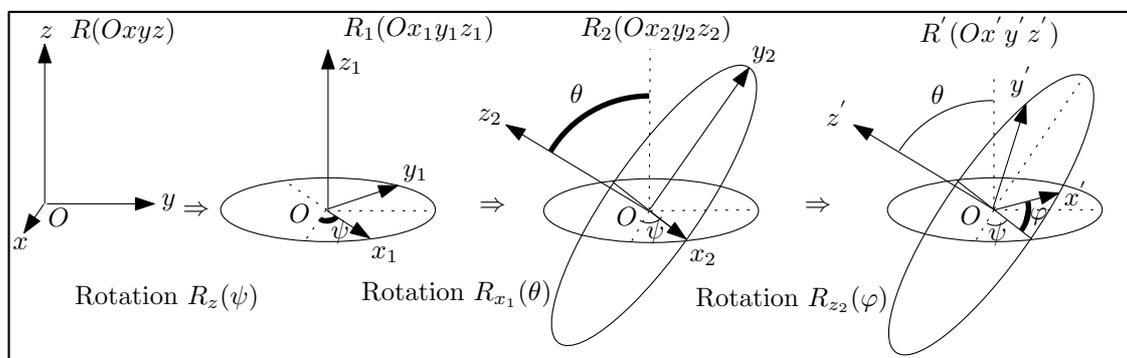
4. Dans le cas où le cylindre tourne avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oy) , calculer dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
- L'énergie cinétique E_c du cylindre.
 - Le moment cinétique \vec{L}_O du cylindre (par rapport à O).
 - En fixant la masse M , que devient les deux grandeurs précédentes dans les cas suivants :
 - Cas où $R \rightarrow 0$.
 - Cas où $h \rightarrow 0$.

Rappels :

$$ds = R d\theta dz, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

3.5.2 Exercice (08 points)

Pour fixer l'orientation de deux repères orthonormés de même origine, R' par rapport à R , nous utilisons les 3 angles d'Euler ψ , θ et φ . Pour passer de R à R' , on définit 3 rotations successives $R_z(\psi)$, $R_{x_1}(\theta)$ et $R_{z_2}(\varphi)$ comme indiqué sur la figure.



Soit un vecteur quelconque $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ de composantes successives (x, y, z) dans $R(Oxyz)$, et (x_1, y_1, z_1) dans $R_1(Ox_1y_1z_1)$, et (x_2, y_2, z_2) dans $R_2(Ox_2y_2z_2)$, et (x', y', z') dans $R'(Ox'y'z')$.

- Sachant que $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = R_z(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = R_{x_1}(\theta) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_{z_2}(\varphi) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, déterminer les matrices de rotations $R_z(\psi)$, $R_{x_1}(\theta)$ et $R_{z_2}(\phi)$.
- Exprimer la matrice de rotation complète A , qui permet de passer du repère R au repère R' , sous forme d'un produit de 3 matrices et calculer A .

3. Sachant qu'une rotation conserve les modules des vecteurs (transformation orthogonale), calculer A^{-1} .

Rappels :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

3.6 Corrigé Examen 2012

3.6.1 Exercice (12 points)

1. Centre de masse :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x \, dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y \, dm, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_D z \, dm.$$

En utilisant les coordonnées cylindriques :

$$M = \int_D dm = \sigma \int_D ds = \sigma R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \sigma(2\pi Rh).$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sigma}{\sigma(2\pi Rh)} \int_D R \cos \theta \, ds = \frac{R^2}{(2\pi Rh)} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{=0} \int_0^h dz = 0. \\ y_G = \frac{\sigma}{\sigma(2\pi Rh)} \int_D R \sin \theta \, ds = \frac{R^2}{(2\pi Rh)} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_{=0} \int_0^h dz = 0. \\ z_G = \frac{\sigma}{\sigma(2\pi Rh)} \int_D z \, ds = \frac{R}{(2\pi Rh)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z \, dz = \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Finalement

$$G(0, 0, h/2)$$

2. Tenseur d'inertie :

(a) Éléments diagonaux :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_D dm(y^2 + z^2) = \int_D (\sigma R \, d\theta \, dz) (R^2 \sin^2 \theta + z^2) \\ &= \sigma \left(R^2 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta + \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \right) = \underbrace{(\sigma 2\pi Rh)}_{=M} \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_D dm(x^2 + z^2) = \int_D (\sigma R \, d\theta \, dz) (R^2 \cos^2 \theta + z^2) \\ &= \sigma \left(R^2 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta + \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \right) = M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right), \end{aligned}$$

$$I_{zz} = \int_D dm(x^2 + y^2) = \int_D dm R^2 = R^2 \int_D dm = MR^2$$

(b) Produits d'inertie :

$$I_{xy} = - \int_D dm xy = - \int_D (\sigma R d\theta dz) (R^2 \sin \theta \cos \theta) = -\sigma R^3 \int_0^h dz \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta}_{=0} = 0$$

$$I_{xz} = - \int_D dm xz = - \int_D (\sigma R d\theta dz) (z R \cos \theta) = -\sigma R^2 \int_0^h z dz \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_{=0} = 0$$

$$I_{yz} = - \int_D dm yz = - \int_D (\sigma R d\theta dz) (z R \sin \theta) = -\sigma R^2 \int_0^h z dz \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{=0} = 0$$

Finalement

$$I = \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & M R^2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3. Moment d'inertie par rapport à l'axe (GY) :

Théorème de Huygens-Steiner

$$I_{(Oy)} = I_{(GY)} + M \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$I_{(GY)} = I_{yy} - M \left(\frac{h}{2} \right)^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) - M \left(\frac{h^2}{4} \right)$$

$$I_{(GY)} = M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right)$$

4. Dans le cas où le cylindre tourne avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oy), calculons dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

(a) L'énergie cinétique E_c du cylindre :

$$E_c = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & M R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega \vec{j}$

$$E_c = \frac{1}{2} (0 \ \omega \ 0) \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & M R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{M\omega^2}{2} \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right)$$

(b) Le moment cinétique \vec{L}_O du cylindre (par rapport à O) :

$$\vec{L}_O = I \vec{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M\omega \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O = M\omega \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \vec{j} = \vec{L}_{(oy)}$$

(c) Limites dans les cas :

i. Cas où $R \rightarrow 0$:

$$E_c = \frac{M\omega^2 h^2}{6}$$

$$\vec{L}_O = M\omega \frac{h^2}{3} \vec{j}$$

ii. Cas où $h \rightarrow 0$:

$$E_c = \frac{M\omega^2 R^2}{4}$$

$$\vec{L}_O = M\omega \frac{R^2}{2} \vec{j}$$

3.6.2 Exercice (08 points)

1. Détermination des matrices de rotation :

(a) Rotation d'angle ψ par rapport à l'axe (Oz)

Soit un vecteur $\vec{OM} = \vec{r} = (x, y, z)_{(R)} = (x_1, y_1, z_1)_{(R_1)}$. Lors de la rotation par rapport à (Oz), la troisième composante est invariante $z = z_1$. Nous avons dans le plan (XOY)

$$x = \|\vec{ON}\| \cos \alpha = R \cos \alpha$$

$$y = \|\vec{ON}\| \sin \alpha = R \sin \alpha$$

Or

$$x_1 = R \cos(\alpha - \psi) = R (\cos \alpha \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi)$$

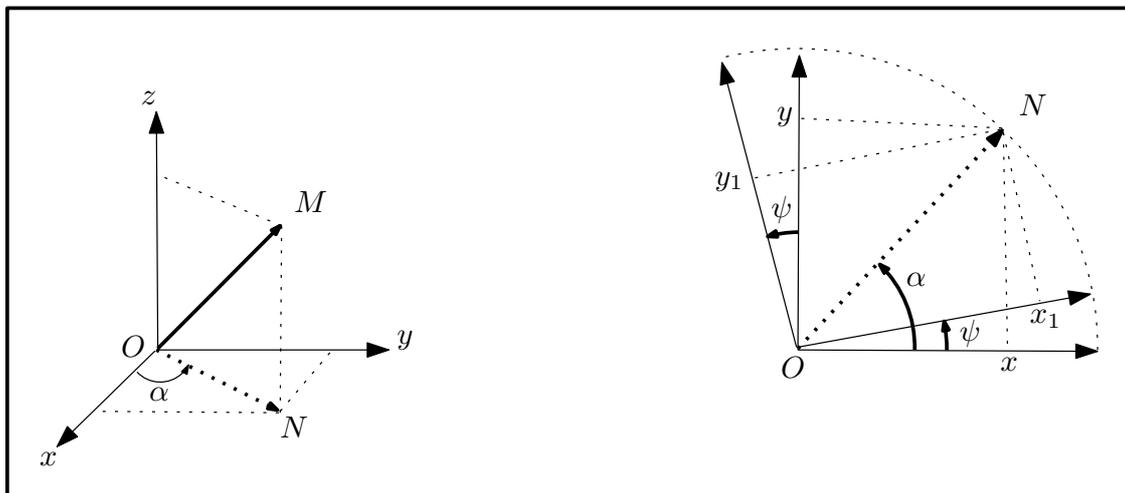
$$y_1 = R \sin(\alpha - \psi) = R (\sin \alpha \cos \psi - \cos \alpha \sin \psi)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \psi + y \sin \psi \\ y_1 = -x \sin \psi + y \cos \psi \\ z_1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ainsi nous avons

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$



(b) Rotation d'angle θ par rapport à l'axe (Ox_1)

Soit $\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1, z_1)_{(R_1)} = (x_2, y_2, z_2)_{(R_2)}$. Lors de la rotation par rapport à (Ox_1) , la première composante est invariante $x_1 = x_2$. Sans refaire de calculs nous pouvons déduire à partir de (3.4) que

$$R_{x_1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(c) Rotation d'angle ϕ par rapport à l'axe (Oz_2)

Soit $\overrightarrow{OM} = (x_2, y_2, z_2)_{(R_2)} = (x', y', z')_{(R')}$. Lors de la rotation par rapport à (Oz_2) , la troisième composante est invariante $z_2 = z'$. Nous déduisons donc, à partir de (3.4), que

$$R_{z_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de rotation complète

Nous avons successivement

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_{z_2}(\phi) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = R_{z_2}(\phi) R_{x_1}(\theta) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = R_{z_2}(\phi) R_{x_1}(\theta) R_z(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ce qui montre que la matrice de rotation complète A , permettant de passer du repère (R) à (R') , est donnée par le produit des matrices

$$A = R_{z_2}(\phi)R_{x_1}(\theta)R_z(\psi). \quad (3.5)$$

Nous avons explicitement

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & \cos \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \sin \phi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \cos \phi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3. La transformation inverse

Une transformation A ne conserve les modules des vecteurs

$$\underbrace{X^t X}_{\|X\|^2 = \|X'\|^2} = (X')^t X' = (AX)^t (AX) = (X^t A^t) (AX) = X^t \underbrace{(A^t A)}_{=1} X$$

que si $A^{-1} = A^t$, car $A^{-1}A = \mathbf{1}$.

Donc pour calculer l'inverse de la matrice orthogonale A , il faut juste calculer sa transposée avec

$$(A^{-1})_{ij} = (A^t)_{ij} = A_{ji}$$

pour $i, j = 1, 2, 3$.

3.7 Examen Remplacement 2012

3.7.1 Problème (12 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un **tronc conique plein** de densité de masse volumique constante ρ_0 , de hauteur h , de rayons de base inférieure a et supérieure b (voir Figure 3.6).

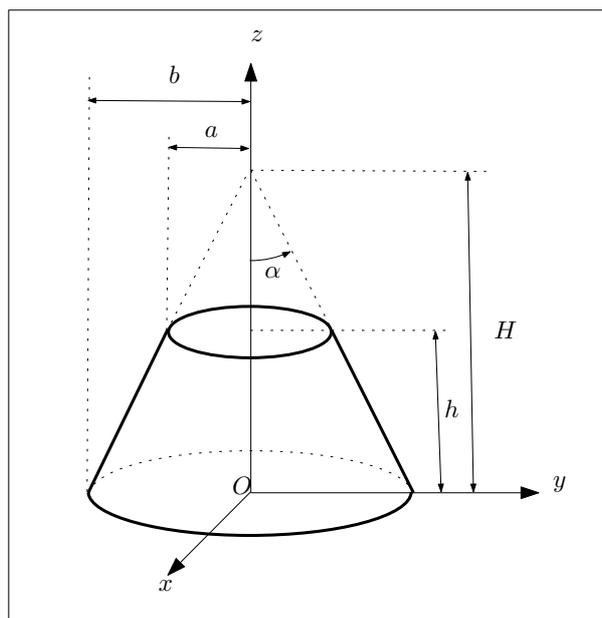


FIG. 3.6 –

1. Montrer que $H = bh/(b - a)$.
2. Calculer le volume du tronc conique.
 - (a) Dédire la masse M du tronc conique.
 - (b) Dans le cas où $a = b$, retrouver le volume du cylindre de rayon b et de hauteur h .
 - (c) Dans le cas où $a = 0$, retrouver le volume du cône de rayon b et de hauteur h .
3. Calculer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$ du tronc conique.
 - (a) Quand $a = b$ déduire les coordonnées du centre de masse d'un cylindre de rayon b et de hauteur h .
 - (b) Quand $a = 0$ déduire les coordonnées du centre de masse d'un cône de rayon b et de hauteur h .
4. Calculer le moment d'inertie I_{zz} par rapport à l'axe (Oz) du tronc conique (On demande d'exprimer I_{zz} en fonction de M).

5. Dans le cas où le tronc conique tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire ω , calculer :

(a) L'énergie cinétique E_c du tronc conique.

(b) Le moment cinétique \vec{L}_O par rapport à l'origine O du tronc conique.

Rappels :

$$dV = r dr d\theta dz, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

3.7.2 Exercice (08 points)

1. Énoncer et démontrer le premier Théorème de Kœnig.
2. Énoncer et démontrer le second Théorème de Kœnig.

3.8 Corrigé Examen Remplacement 2012

3.8.1 Problème (12 points)

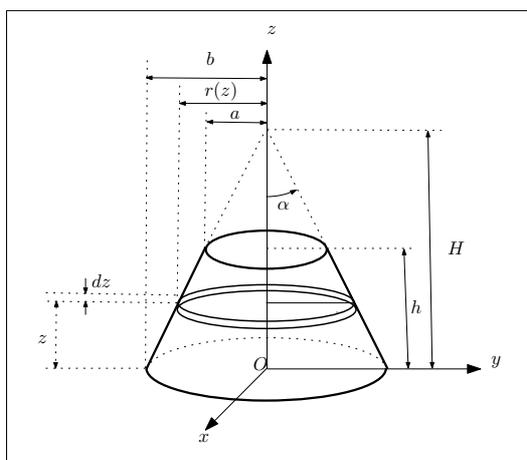


FIG. 3.7 –

1. **Relation entre H et h :**

Nous avons, compte tenu de la figure 3.7

$$\tan \alpha = \frac{b}{H} = \frac{a}{H - h},$$

ce qui conduit à

$$H = \frac{bh}{b - a}. \quad (3.7)$$

2. Volume du tronc conique :

Le volume total sera calculé en coordonnées cylindriques

$$V = \int_D dV = \int_D r dr d\theta dz.$$

En fixant la hauteur à z , on intègre sur les variables $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$ et $r : 0 \rightarrow r(z)$,

$$V = \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^h dz \pi [r(z)]^2$$

avec $\tan \alpha = \frac{b}{H} = \frac{r(z)}{H-z}$, ce qui conduit à

$$r(z) = \frac{b}{H} (H - z).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi b^2}{H^2} \int_0^h dz (H - z)^2 = \frac{\pi b^2}{H^2} \frac{(-1)}{3} \left[(H - z)^3 \right]_0^h = \frac{\pi b^2}{3H^2} \left[H^3 - (H - h)^3 \right] \\ &= \frac{\pi b^2 H}{3} - \frac{\pi b^2 (H - h)^3}{3H^2} \end{aligned}$$

Or d'après (3.7), nous avons $H - h = Ha/b$, ce qui permet d'écrire finalement

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi b^2 H}{3} - \frac{\pi a^2 (aH/b)}{3} = \frac{\pi b^2 H}{3} - \frac{\pi a^2 (H - h)}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} [(b^2 - a^2)H + a^2h] \end{aligned}$$

D'après (3.7)

$$V = \frac{\pi}{3} \left[(b^2 - a^2) \frac{bh}{b-a} + a^2h \right] = \frac{\pi}{3} [(b+a)bh + a^2h]$$

Finalement

$$V_{\text{tronc}} = \frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2). \quad (3.8)$$

(a) Masse du tronc conique

Nous avons $M = \int_D dm = \rho_0 \int_D dV = \rho_0 V_{\text{tronc}}$, ce qui donne, compte tenu de (3.8),

$$M = \frac{\pi h \rho_0}{3} (a^2 + ab + b^2) \quad (3.9)$$

(b) Volume du cylindre

Quand $a = b$, nous avons, d'après (3.8), $V = \frac{\pi h}{3} (3b^2)$, ce qui conduit à

$$V_{\text{cylindre}} = \pi b^2 h. \quad (3.10)$$

(c) **Volume du cône**

Quand $a = 0$, nous avons, d'après (3.8), $V = \frac{\pi h}{3} (0 + 0 + b^2)$, ce qui conduit à

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi b^2 h}{3}. \quad (3.11)$$

3. **Centre de masse :**

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x \, dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y \, dm, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_D z \, dm.$$

En utilisant les coordonnées cylindriques :

$$x_G = \frac{\rho_0}{\rho_0 \frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2)} \int_D x \, dV = \frac{3}{\pi h (a^2 + ab + b^2)} \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r^2 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{=0} = 0.$$

$$y_G = \frac{\rho_0}{\rho_0 \frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2)} \int_D y \, dV = \frac{3}{\pi h (a^2 + ab + b^2)} \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r^2 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_{=0} = 0$$

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{\rho_0}{\rho_0 \frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2)} \int_D z \, dV = \frac{3}{\pi h (a^2 + ab + b^2)} \int_0^h dz z \int_0^{r(z)} r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{3}{\pi h (a^2 + ab + b^2)} \int_0^h dz z \pi [r(z)]^2 = \frac{3}{\pi h (a^2 + ab + b^2)} \frac{\pi b^2}{H^2} \int_0^h dz z (H - z)^2 \\ &= \frac{3b^2}{h (a^2 + ab + b^2)} \frac{1}{H^2} \left\{ H^2 \int_0^h z \, dz - 2H \int_0^h z^2 \, dz + \int_0^h z^3 \, dz \right\} \\ &= \frac{3b^2}{h (a^2 + ab + b^2)} \frac{1}{H^2} \left[H^2 \left(\frac{h^2}{2} \right) - 2H \left(\frac{h^3}{3} \right) + \left(\frac{h^4}{4} \right) \right] \\ &= \frac{3b^2}{h (a^2 + ab + b^2)} \left[\left(\frac{h^2}{2} \right) - \frac{2}{H} \left(\frac{h^3}{3} \right) + \frac{1}{H^2} \left(\frac{h^4}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

Or d'après (3.7), nous avons

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{3b^2}{h (a^2 + ab + b^2)} \left[\left(\frac{h^2}{2} \right) - \frac{2(b-a)}{bh} \left(\frac{h^3}{3} \right) + \frac{(b-a)^2}{b^2 h^2} \left(\frac{h^4}{4} \right) \right] \\ &= \frac{3b^2 h}{(a^2 + ab + b^2)} \left[\frac{1}{2} - \frac{2(b-a)}{3b} + \frac{(b-a)^2}{4b^2} \right] \end{aligned}$$

Finalement

$$G_{\text{tronc}} \left(0, 0, \frac{3b^2h}{(a^2 + ab + b^2)} \left[\frac{1}{2} - \frac{2(b-a)}{3b} + \frac{(b-a)^2}{4b^2} \right] \right). \quad (3.12)$$

(a) **Centre de masse cylindre**

Quand $a = b$, d'après (3.12), nous avons $z_G = \frac{3b^2h}{3b^2} \left(\frac{1}{2} + 0 + 0 \right) = h/2$, ainsi

$$G_{\text{cylindre}}(0, 0, h/2) \quad (3.13)$$

(b) **Centre de masse du cône**

Quand $a = 0$, d'après (3.12), nous avons $z_G = \frac{3b^2h}{b^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3h}{12} = h/4$, ainsi

$$G_{\text{cône}}(0, 0, h/4) \quad (3.14)$$

4. **Le moment d'inertie par rapport à (Oz) :**

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_D dm(x^2 + y^2) = \rho_0 \int_D (r dr d\theta dz)(r^2) = \rho_0 \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \rho_0 \int_0^h dz \left(\frac{[r(z)]^4}{4} 2\pi \right) = \frac{\pi\rho_0}{2} \int_0^h [r(z)]^4 dz = \frac{\pi\rho_0}{2} \frac{b^4}{H^4} \int_0^h (H-z)^4 dz \\ &= \frac{\pi\rho_0}{2} \frac{b^4}{H^4} \frac{(-1)}{5} [(H-z)^5]_0^h = \frac{\pi\rho_0}{2} \frac{b^4}{5H^4} [H^5 - (H-h)^5] \\ &= \frac{\pi\rho_0}{10} \left\{ b^4 H - [b^4(H-h)^4/H^4](H-h) \right\} \end{aligned}$$

Or d'après (3.7), nous avons

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \frac{\pi\rho_0}{10} [b^4 H - a^4(H-h)] = \frac{\pi\rho_0}{10} [H(b^4 - a^4) + a^4 h] \\ &= \frac{\pi\rho_0}{10} \left[\left(\frac{bh}{b-a} \right) (b^4 - a^4) + a^4 h \right] = \frac{\pi\rho_0 h}{10} [b(b^3 + b^2 a + ba^2 + a^3) + a^4] \\ &= \frac{\pi\rho_0 h}{10} (b^4 + b^3 a + b^2 a^2 + ba^3 + a^4) \end{aligned}$$

Or d'après (3.9)

$$I_{zz} = \left[\frac{\pi h \rho_0}{3} (a^2 + ab + b^2) \right] \frac{3}{10} \left(\frac{b^4 + b^3 a + b^2 a^2 + ba^3 + a^4}{a^2 + ab + b^2} \right)$$

ou encore finalement

$$I_{zz} = \frac{3}{10} M \left(\frac{b^4 + b^3 a + b^2 a^2 + ba^3 + a^4}{a^2 + ab + b^2} \right). \quad (3.15)$$

(a) **Produits d'inertie**

Montrons que les produits d'inertie sont nuls

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \int_D dm xy = -\rho_0 \int_D (r dr d\theta dz) (r^2 \cos \theta \sin \theta) \\ &= -\rho_0 \int_0^h dz \int_0^{r(z)} r^4 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$I_{xz} = - \int_D dm xz = -\rho_0 \int_D (r dr d\theta dz) (r \cos \theta z) = -\rho_0 \int_0^h z dz \int_0^{r(z)} r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_{=0} = 0$$

$$I_{yz} = - \int_D dm yz = -\rho_0 \int_D (r dr d\theta dz) (r \sin \theta z) = -\rho_0 \int_0^h z dz \int_0^{r(z)} r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{=0} = 0$$

(b) **Eléments diagonaux**

Par symétrie, nous avons $I_{xx} = I_{yy} = I_1$ (les axes (Ox) et (Oy) sont équivalents), ainsi le tenseur d'inertie du tronc conique a la forme diagonale suivante

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

5. Dans le cas où le tronc conique tourne avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe (OZ) , calculons dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

(a) L'énergie cinétique E_c :

$$E_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega \vec{k}$

$$E_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$$

Finalement

$$E_c = \frac{3}{20} M \omega^2 \left(\frac{b^4 + b^3 a + b^2 a^2 + b a^3 + a^4}{a^2 + ab + b^2} \right) \quad (3.17)$$

(b) Le moment cinétique \vec{L}_O de la plaque (par rapport à O) :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= I \vec{\omega} \\ \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz}\omega \end{pmatrix} \\ \vec{L}_O &= \frac{3}{10} M \omega \left(\frac{b^4 + b^3 a + b^2 a^2 + b a^3 + a^4}{a^2 + ab + b^2} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

3.8.2 Exercice (08 points)

Premier Théorème de Kœnig : Dans un repère $R(OXYZ)$, considérons un ensemble de N particules (une particule quelconque i a une masse m_i , un vecteur position \vec{r}_i et une vitesse \vec{v}_i). Dans R , le moment cinétique par rapport à l'origine O donné par $\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$, se simplifie considérablement

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(\vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}'_i) \wedge (\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{\text{CM}} \wedge \vec{V}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{\text{CM}} \wedge \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \wedge \vec{V}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \wedge \vec{v}'_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) (\vec{r}_{\text{CM}} \wedge \vec{V}_{\text{CM}}) + \vec{r}_{\text{CM}} \wedge \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \wedge \vec{V}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \wedge \vec{v}'_i\end{aligned}$$

car dans le Référentiel du centre de masse où $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0}$, nous aboutissons finalement à

$$\vec{L} = M \vec{r}_{\text{CM}} \wedge \vec{V}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \wedge \vec{v}'_i. \quad (3.18)$$

Second Théorème de Kœnig : L'énergie cinétique totale du système précédent $E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$ se simplifie aussi

$$\begin{aligned}E_c &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{\text{CM}}^2 + 2 \vec{v}'_i \cdot \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i{}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{V}_{\text{CM}}^2 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i \right)}_{=\vec{0}} \cdot \vec{V}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i{}^2\end{aligned}$$

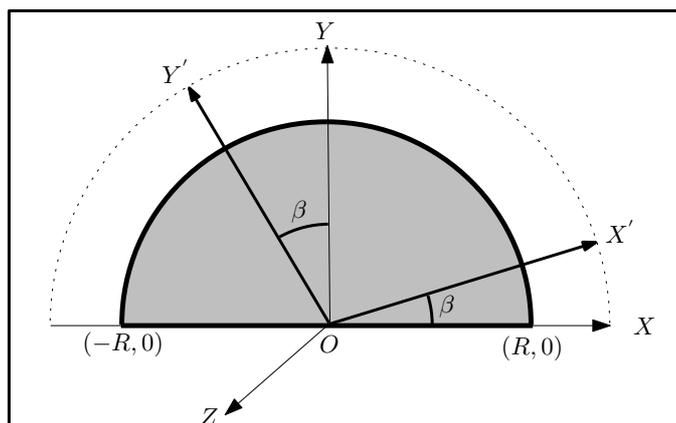
Finalement

$$E_c = \frac{1}{2} M \vec{V}_{\text{CM}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i{}^2. \quad (3.19)$$

3.9 Examen 2013

3.9.1 Exercice (10 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un **demi-disque** de densité de masse constante σ , de centre O et de rayon R (La plaque est contenue dans le plan (OXY)).



1. Calculer la masse M de la plaque.
2. Calculer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$.
3. Calculer les composantes du tenseur d'inertie en O , relativement au repère orthonormé (O, XYZ)

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D dm(y^2 + z^2) & - \int_D dm xy & - \int_D dm xz \\ - \int_D dm xy & \int_D dm(x^2 + z^2) & - \int_D dm yz \\ - \int_D dm xz & - \int_D dm yz & \int_D dm(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

On demande d'exprimer les composantes de I en fonction de la masse totale M de la plaque.

4. Dans le cas où, la plaque tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire ω , calculer dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
 - (a) L'énergie cinétique E_c de la plaque.
 - (b) Le moment cinétique \vec{L}_O , par rapport à O .

5. En utilisant la matrice de rotation $R_{OZ}(\beta)$ permettant de passer du repère $OXYZ$ au repère $OX'Y'Z$, calculer le moment d'inertie $I_{x'x'}$ de la plaque par rapport à l'axe (OX') en fonction de I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} et β . Exprimer finalement $I_{x'x'}$ en fonction de la masse M et le rayon R . (**Indication** : La masse est invariante dans les deux repères $OXYZ$ et $OX'Y'Z$).

Rappels :

$$ds = r dr d\theta, \quad \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta, \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$R_{OZ}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.9.2 Exercice (10 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , considérons n particules ponctuelles, de masses identiques m , situées respectivement aux points $A_1(a, b)$, $A_2(2a, b)$, \dots , $A_n(na, b)$ et considérons la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{b}{a}x + b$, où a et b sont deux constantes strictement positives (voir Figure 3.8).

1. Calculer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G)$.

On donne :

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Dans le but de calculer la distance d_i , du $i^{\text{ème}}$ point $A_i(ia, b)$ à la droite (Δ) , procéder par étapes :
- Calculer la valeur de $\sin \theta$ dans le triangle rectangle (ON_0A_0) .
 - Calculer la valeur de $\sin \theta$ dans le triangle rectangle $(A_0A_iB_i)$.
 - Déduire que d_i s'écrit sous la forme $d_i = i \alpha_0$, où α_0 est une constante à déterminer.
3. Calculer le moment d'inertie $I_{(\Delta)}$ du système des n masses ponctuelles, par rapport à la droite (Δ) .

On donne :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

4. En utilisant le Théorème d'Huygens-Steiner, déduire la valeur du moment d'inertie $I_{(\Delta')}$ du système, par rapport à la droite (Δ') , telle que $(\Delta') // (\Delta)$ et $G \in (\Delta')$.

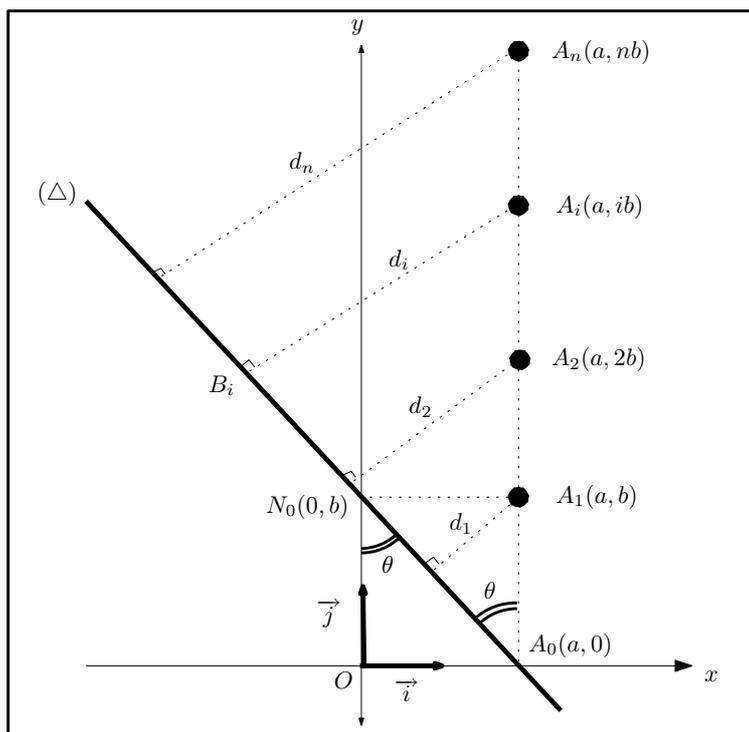


FIG. 3.8 –

3.10 Corrigé Examen 2013

3.10.1 Exercice (10 points)

1. La masse :

$$M = \int_D dm = \sigma \int_D ds = \sigma \int_0^R r dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \pi R^2 / 2$$

2. Centre de masse :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y dm, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_D z dm.$$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\sigma}{\sigma(\pi R^2/2)} \int_D r \cos \theta ds = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \underbrace{\int_0^\pi \cos \theta d\theta}_{=0} = 0. \\ y_G = \frac{\sigma}{\sigma(\pi R^2/2)} \int_D r \sin \theta ds = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} [(-1)(\cos \pi - \cos 0)] = \frac{4R}{3\pi}. \\ z_G = \frac{\sigma}{\sigma(\pi R^2/2)} \int_D \underbrace{z}_{=0} ds = 0. \end{array} \right.$$

Finalement

$$G(0, 4R/3\pi, 0) \quad (3.20)$$

3. Tenseur d'inertie :

(a) Eléments diagonaux :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_D dm(y^2 + z^2) = \int_D (\sigma r dr d\theta) (r^2 \sin^2 \theta + 0) \\ &= \sigma \left(\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right) = \sigma(R^4/4)(\pi/2) = MR^2/4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_D dm(x^2 + z^2) = \int_D (\sigma r dr d\theta) (r^2 \cos^2 \theta + 0) \\ &= \sigma \left(\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \right) = \sigma(R^4/4)(\pi/2) = MR^2/4, \end{aligned}$$

$$I_{zz} = \int_D dm(x^2 + y^2) = \int_D dm x^2 + \int_D dm y^2 = I_{yy} + I_{xx} = MR^2/2.$$

(b) Produits d'inertie :

$$I_{xy} = - \int_D dm xy = - \int_D (\sigma r dr d\theta) (r^2 \sin \theta \cos \theta) = -\sigma \int_0^R r^3 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta}_{=0} = 0$$

$$I_{xz} = - \int_D dm x \underbrace{z}_{=0} = 0$$

$$I_{yz} = - \int_D dm y \underbrace{z}_{=0} = 0$$

Finalement

$$I = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

(c) L'énergie cinétique E_c du cylindre :

$$E_c = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega \vec{k}$

$$E_c = \frac{1}{2} (0 \ 0 \ \omega) \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2 = \frac{MR^2 \omega^2}{4} \quad (3.22)$$

(d) Le moment cinétique \vec{L}_O du cylindre (par rapport à O) :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= I \vec{\omega} \\ \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{MR^2\omega}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement

$$\vec{L}_O = \frac{MR^2\omega}{2} \vec{k}. \quad (3.23)$$

(e) Calcul du moment d'inertie $I_{x'x'}$:

L'élément de masse infinitésimale est invariant par rotation $dm = dm'$. Dans le repère $OXYZ$, cet élément est repéré par $(x, y, 0)$ alors que dans le nouveau repère $OX'Y'Z$, il possède les coordonnées suivantes $(x', y', 0)$. Compte tenu de la matrice de rotation $R_{OZ}(\beta)$, les coordonnées sont reliées par les relations

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \beta + y \sin \beta \\ y' = -x \sin \beta + y \cos \beta \\ z' = z = 0 \end{cases}$$

Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} I_{x'x'} &= \int_D dm' (y'^2 + z'^2) = \int_D dm' (y'^2 + 0) \\ &= \int_D dm (-x \sin \beta + y \cos \beta)^2 = \int_D dm (x^2 \sin^2 \beta + y^2 \cos^2 \beta - 2xy \sin \beta \cos \beta) \\ &= \sin^2 \beta \left(\int_D dm x^2 \right) + \cos^2 \beta \left(\int_D dm y^2 \right) + 2 \sin \beta \cos \beta \left(- \int_D dm xy \right) \end{aligned}$$

ou encore finalement

$$I_{x'x'} = I_{yy} \sin^2 \beta + I_{xx} \cos^2 \beta + 2I_{xy} \sin \beta \cos \beta$$

Sachant que $I_{xx} = I_{yy}$ et que $I_{xy} = 0$, dans ce cas

$$I_{x'x'} = I_{yy} \sin^2 \beta + I_{xx} \cos^2 \beta = I_{xx} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = I_{xx} = MR^2/4. \quad (3.24)$$

3.10.2 Exercice (10 points)

1. Centre de masse

Par définition, nous avons

$$x_G = \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \text{ et } y_G = \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n m_i \right).$$

Or la masse du système est donnée par $M = nm$, alors que les coordonnées d'un point quelconque A_i sont $x_i = a$ et $y_i = ib$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{nm} \left(m \sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a \right) = \frac{a}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) = \frac{an}{n} = a \\y_G &= \frac{1}{nm} \left(m \sum_{i=1}^n y_i \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n ib \right) = \frac{b}{n} \left(\sum_{i=1}^n i \right) = \frac{b}{n} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{b(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Finalement

$$G(a, b(n+1)/2) \quad (3.25)$$

2. **Distance d_i** (du $i^{\text{ème}}$ point $A_i(ia, b)$ à la droite (Δ)) :

(a) Calcul de la valeur de $\sin \theta$ dans le triangle rectangle (ON_0A_0) :

$$\sin \theta = \frac{\| \overrightarrow{OA_0} \|}{\| \overrightarrow{N_0A_0} \|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.26)$$

(b) Calcul de la valeur de $\sin \theta$ dans le triangle rectangle $(A_0A_iB_i)$:

$$\sin \theta = \frac{\| \overrightarrow{B_iA_i} \|}{\| \overrightarrow{A_0A_i} \|} = \frac{d_i}{ib} \quad (3.27)$$

(c) Distance d_i :

A partir de (3.26) et (3.27), nous avons

$$\frac{d_i}{ib} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ce qui permet de mettre la distance d_i sous la forme

$$d_i = i\alpha_0 = i \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \quad (3.28)$$

3. **Moment d'inertie $I_{(\Delta)}$** :

$$I_{(\Delta)} = \sum_{i=1}^n m_i (d_i)^2 = m \sum_{i=1}^n (d_i)^2 = m \sum_{i=1}^n (i\alpha_0)^2 = m(\alpha_0)^2 \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right)$$

or

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6},$$

$$I_{(\Delta)} = m(\alpha_0)^2 \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} = m \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Finalement

$$I_{(\Delta)} = m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \quad (3.29)$$

4. Moment d'inertie $I_{(\Delta')}$:

La droite (Δ') est définie de telle sorte que $(\Delta') // (\Delta)$ et $G \in (\Delta')$. En vertu du Théorème de d'Huygens-Steiner, nous avons

$$I_{(\Delta)} = I_{(\Delta')} + M(d_G)^2, \quad (3.30)$$

où M est la masse totale et d_G est la distance du centre de masse G à la droite (Δ) . Calculons d_G ; pour ce faire, considérons G' la projection orthogonale de G sur (Δ) de telle sorte que $d_G = \|\overrightarrow{GG'}\|$. Dans ce cas, la détermination de $\sin \theta$ dans les triangles (ON_0A_0) et (OGG')

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{d_G}{[b(n+1)/2]},$$

nous permet de déduire que

$$d_G = \frac{(n+1)}{2} \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (3.31)$$

En vertu de (3.30) et (3.31), nous avons

$$\begin{aligned} I_{(\Delta')} &= I_{/(\Delta)} - M(d_G)^2 \\ &= m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} - nm \left[\frac{(n+1)}{2} \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]^2 \\ &= m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} - nm \left[\frac{(n+1)^2}{4} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right] \\ &= n(n+1)m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \left[\frac{(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)}{4} \right], \end{aligned}$$

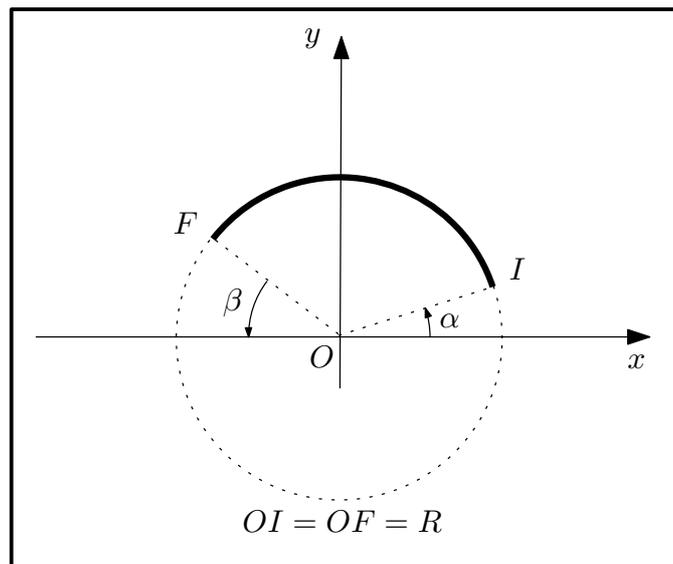
ou encore finalement

$$I_{(\Delta')} = m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \left[\frac{n(n+1)(n-1)}{12} \right]. \quad (3.32)$$

3.11 Examen 2014

3.11.1 Exercice (10 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un arc de cercle, de centre O et de rayon R , sous-tendu par l'angle \widehat{IOF} où $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ et $0 \leq \beta \leq \pi/2$ sont des constantes réelles et positives. La masse de l'arc est uniformément répartie sur l'arc de sorte que la densité de masse linéique λ soit constante.



Partie A : Cas général (α et β quelconques)

1. Calculer la masse M de l'arc. (0.5 pt)
2. Calculer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$. (3 pts)
3. Déduire les coordonnées du centre de masse dans les cas particuliers suivants :
 - (a) Cas où $\alpha = \beta$. (0.5 pts)
 - (b) Cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. (0.5 pts)

Partie B : Dans cette partie, on fixe $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

4. Calculer les composantes du tenseur d'inertie en O , relativement au repère orthonormé (O, XYZ)

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D dm(y^2 + z^2) & - \int_D dm xy & - \int_D dm xz \\ - \int_D dm xy & \int_D dm(x^2 + z^2) & - \int_D dm yz \\ - \int_D dm xz & - \int_D dm yz & \int_D dm(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

On demande d'exprimer les composantes de I en fonction de la masse totale M du demi-cercle. (1.5 pts + 1.5 pts)

5. Comparer I_{zz} avec I_{xx} . (0.5 pt)
6. Dans le cas où le demi-cercle tourne autour de l'axe (OY) avec une vitesse angulaire Φ , calculer dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ son moment cinétique \vec{L}_O , par rapport à O . (1 pt)
7. Dans le cas où le demi-cercle tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire ω , calculer dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ son énergie cinétique $E_c^{(oz)}$. (1 pt)

Rappels :

$$dm = \lambda_0 dl, \quad dl = R d\theta, \quad \sin(\pi - \beta) = \sin \beta \text{ et } \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta, \quad \cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2, \\ \sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2, \quad x_G = \frac{1}{M} \int_D x dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y dm \quad \text{et} \\ z_G = \frac{1}{M} \int_D z dm.$$

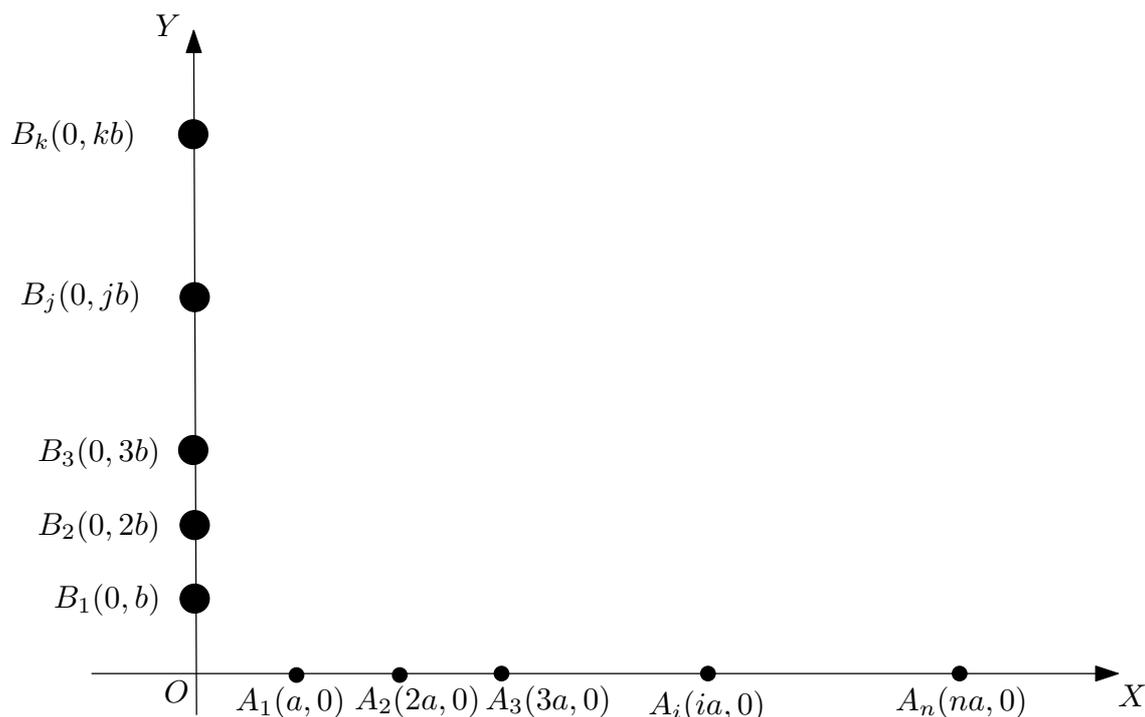
3.11.2 Exercice (10 points)

Soit n particules identiques, de masses respectives m , disposées aux points $A_1(a, 0)$, $A_2(2a, 0), \dots, A_n(na, 0)$, et soit k particules identiques, de masses respectives M , disposées aux points $B_1(0, b)$, $B_2(0, 2b), \dots, B_k(0, kb)$, où a et b sont deux constantes. ($n \neq k$, $m \neq M$ et $a \neq b$)

1. Déterminer les coordonnées du centre de masse $G_1(x_1, y_1)$ de l'ensemble des particules disposées suivant l'axe (OX) . (1 pt)
2. Déterminer les coordonnées du centre de masse $G_2(x_2, y_2)$ de l'ensemble des particules disposées suivant l'axe (OY) . (1 pt)
3. Déterminer les coordonnées du centre de masse $G(x_G, y_G)$ du système total de particules. (2 pts)
4. Montrer que le centre de masse $G(x_G, y_G) \in (G_1G_2)$; autrement-dit G appartient à la droite qui passe par G_1 et G_2 . (2 pts)
5. Déterminer le moment d'inertie $I_{(OX)}$ du système total de particules par rapport à l'axe (OX) . (2 pts)
6. Déterminer le moment d'inertie $I_{(OY)}$ du système total de particules par rapport à l'axe (OY) . (2 pts)

Rappel :

$$\sum_{\ell=1}^s \ell = 1 + 2 + \dots + s = \frac{s(s+1)}{2} \text{ où } s \text{ est entier } (s \in \mathbb{N}) \\ \sum_{\ell=1}^s \ell^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + s^2 = \frac{(2s+1)(s+1)s}{6}.$$



3.12 Corrigé Examen 2014

3.12.1 Exercice (10 points)

Partie A : Cas général (α et β quelconques)

1. La masse :

$$M = \int_D dm = \lambda \int_D dl = \lambda R \int_{\alpha}^{\pi-\beta} d\theta = \lambda R [\pi - (\alpha + \beta)].$$

2. Centre de masse :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_D x dm, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_D y dm, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_D z dm.$$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\lambda}{\lambda R [\pi - (\alpha + \beta)]} \int_D R \cos \theta dl = \frac{R}{[\pi - (\alpha + \beta)]} \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \cos \theta d\theta = \frac{R (\sin \beta - \sin \alpha)}{[\pi - (\alpha + \beta)]}. \\ y_G = \frac{\lambda}{\lambda R [\pi - (\alpha + \beta)]} \int_D R \sin \theta dl = \frac{R}{[\pi - (\alpha + \beta)]} \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \sin \theta d\theta = \frac{R (\cos \beta + \cos \alpha)}{[\pi - (\alpha + \beta)]}. \\ z_G = \frac{\lambda}{\lambda R [\pi - (\alpha + \beta)]} \int_D \underbrace{z}_{=0} dl = 0. \end{array} \right.$$

Finalement

$$G \left(\frac{R(\sin \beta - \sin \alpha)}{[\pi - (\alpha + \beta)]}, \frac{R(\cos \beta + \cos \alpha)}{[\pi - (\alpha + \beta)]}, 0 \right) \quad (3.33)$$

3. Centres de masses pour les cas particuliers :

(a) Cas où $\alpha = \beta$: $G \left(0, \frac{2R \cos \alpha}{\pi - 2\alpha}, 0 \right)$.

(b) Cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$: $G \left(0, \frac{2R}{\pi}, 0 \right)$.

Partie B : Dans cette partie, on fixe $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

4. Tenseur d'inertie :

(a) Éléments diagonaux :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_D dm(y^2 + z^2) = \int_D (\lambda R d\theta) (R^2 \sin^2 \theta + 0) \\ &= \lambda R^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = (\lambda R^3)(\pi/2) = (\lambda R \pi)R^2/2 = MR^2/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_D dm(x^2 + z^2) = \int_D (\lambda R d\theta) (R^2 \cos^2 \theta + 0) \\ &= \lambda R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = (\lambda R^3)(\pi/2) = (\lambda R \pi)R^2/2 = MR^2/2, \end{aligned}$$

$$I_{zz} = \int_D dm(x^2 + y^2) = \int_D dm x^2 + \int_D dm y^2 = I_{yy} + I_{xx} = MR^2.$$

(b) Produits d'inertie :

$$I_{xy} = - \int_D dm xy = - \int_D (\lambda R d\theta) (R^2 \sin \theta \cos \theta) = -\lambda R^3 \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta}_{=0} = 0$$

$$I_{xz} = - \int_D dm x \underbrace{z}_{=0} = 0$$

$$I_{yz} = - \int_D dm y \underbrace{z}_{=0} = 0$$

Finalement

$$I = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

5. Comparaison : Compte tenu du théorème de Pythagore, nous avons $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$, or $I_{xx} = I_{yy}$, donc $I_{zz} = 2I_{xx} > I_{xx}$.

6. Le moment cinétique \vec{L}_O du cylindre (par rapport à O) :

$$\vec{L}_O = I \vec{\Phi}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{MR^2\Phi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\vec{L}_O = \frac{MR^2\Phi}{2} \vec{j}. \quad (3.35)$$

7. L'énergie cinétique E_c du cylindre :

$$E_c = \frac{1}{2} (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z) \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega \vec{k}$

$$E_c = \frac{1}{2} (0 \ 0 \ \omega) \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2 = \frac{MR^2 \omega^2}{2} \quad (3.36)$$

3.12.2 Exercice (10 points)

1. **Centre de masse** $G_1(x_1, y_1)$

Par définition, nous avons

$$\vec{OG}_1 = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{OA}_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \quad (3.37)$$

ce qui implique, compte tenu du fait $A_i(x_i, y_i) = (ia, 0)$,

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{ia}}{m \sum_{i=1}^n 1} = \frac{a \sum_{i=1}^n i}{\sum_{i=1}^n 1} = \frac{a [n(n+1)/2]}{n} = \frac{a(n+1)}{2}$$

$$y_1 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n 0 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = 0$$

finalement

$$G_1(a(n+1)/2, 0).$$

2. **Centre de masse** $G_2(x_2, y_2)$

Par définition, nous avons

$$\overrightarrow{OG_2} = \left(\sum_{j=1}^k M_j \overrightarrow{OB_j} \right) / \left(\sum_{j=1}^k M_j \right) \quad (3.38)$$

ce qui implique, compte tenu du fait $B_j(x_j, y_j) = (0, jb)$,

$$x_2 = \frac{\sum_{j=1}^k M_j x_j}{\sum_{j=1}^k M_j} = \frac{\sum_{j=1}^k 0 M_j}{\sum_{j=1}^k M_j} = 0$$

$$y_2 = \frac{\sum_{j=1}^k M_j y_j}{\sum_{j=1}^k M_j} = \frac{M \sum_{j=1}^k \underbrace{y_j}_{jb}}{M \sum_{j=1}^k 1} = \frac{b \sum_{j=1}^k j}{\sum_{j=1}^k 1} = \frac{[b k(k+1)/2]}{k} = \frac{b(k+1)}{2}$$

finalemt

$$G_2(0, b(k+1)/2).$$

3. **Centre de masse** $G(x_G, y_G)$ **du système total**

Le système total est équivalent à deux masses ponctuelles $M_1 = nm$ et $M_2 = kM$, situées respectivement aux points G_1 et G_2 . Dans ce cas là nous avons

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_1 \overrightarrow{OG_1} + M_2 \overrightarrow{OG_2}}{M_1 + M_2} = \frac{(nm) \overrightarrow{OG_1} + (kM) \overrightarrow{OG_2}}{nm + kM}$$

ce qui implique

$$x_G = \frac{(nm)x_1 + (kM)x_2}{nm + kM} = \frac{(nm)[(n+1)a/2] + 0(kM)}{nm + kM} = \frac{mn(n+1)a/2}{nm + kM}$$

$$y_G = \frac{(nm)y_1 + (kM)y_2}{nm + kM} = \frac{0(nm) + (kM)[(k+1)b/2]}{nm + kM} = \frac{Mk(k+1)b/2}{nm + kM}$$

finalemt

$$G\left(\frac{mn(n+1)a/2}{nm + kM}, \frac{Mk(k+1)b/2}{nm + kM}\right)$$

4. $\mathbf{G}(\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G) \in (\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2)$?

(a) Méthode analytique :

Il suffit de montrer que les coordonnées de G vérifient l'équation cartésienne de la droite (G_1G_2) . En effet, sachant que les coordonnées des points G_1 et G_2 vérifient l'équation $y = \alpha x + \beta$ (où α et β sont 2 constantes à déterminer),

$$\begin{aligned}y_1 &= \alpha x_1 + \beta \\y_2 &= \alpha x_2 + \beta\end{aligned}$$

nous obtenons par résolution du système linéaire précédent $\alpha = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ et $\beta = y_1 - \alpha x_1$, ce qui conduit finalement à

$$(G_1G_2) : y = \left[-\frac{b}{a} \left(\frac{k+1}{n+1} \right) \right] x + \left[\frac{b(k+1)}{2} \right]$$

Un calcul simple

$$\begin{aligned}\left[-\frac{b}{a} \left(\frac{k+1}{n+1} \right) \right] x_G + \left[\frac{b(k+1)}{2} \right] &= \left[-\frac{b}{a} \left(\frac{k+1}{n+1} \right) \right] \left[\frac{mn(n+1)a/2}{nm+kM} \right] + \left[\frac{b(k+1)}{2} \right] \\&= \frac{b(k+1)}{2} \left(1 - \frac{nm}{nm+kM} \right) \\&= \frac{b(k+1)}{2} \left(\frac{kM}{nm+kM} \right) \\&= y_G\end{aligned}$$

montre clairement que $G(x_G, y_G) \in (G_1G_2)$.

(b) Méthode géométrique :

Il suffit de montrer par exemple que $\overrightarrow{G_2G} // \overrightarrow{G_2G_1}$. Pour ce faire, la définition

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_1 \overrightarrow{OG_1} + M_2 \overrightarrow{OG_2}}{M_1 + M_2}$$

peut s'écrire sous la forme

$$(M_1 + M_2)(\overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{G_2G}) = M_1(\overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{G_2G_1}) + M_2 \overrightarrow{OG_2},$$

compte tenu de la relation de Chales. Une simplification des deux membres de l'équation précédente, par $(M_1 + M_2)\overrightarrow{OG_2}$, permet d'aboutir à la relation vectorielle

$$\overrightarrow{G_2G} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \overrightarrow{G_2G_1},$$

qui montre clairement que $\overrightarrow{G_2G} // \overrightarrow{G_2G_1}$.

5. **Moment d'inertie** $I_{(OX)}$:

Le domaine D du système total est l'union des deux domaines D_1 et D_2 représentant respectivement l'ensemble des masses disposées selon les axes (OX) et (OY) .

Par définition, le moment d'inertie $I_{(OX)}$ du système total est la somme des produits de chaque masse m_s par sa distance $d_s^{(ox)}$ au carré à l'axe (OX)

$$\begin{aligned} I_{(OX)} &= \sum_{D=D_1 \cup D_2} m_s (d_s^{(ox)})^2 = \left[\sum_{D_1} m (d_i^{(ox)})^2 \right] + \left[\sum_{D_2} M (d_j^{(ox)})^2 \right] \\ &= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^n m 0^2 \right]}_0 + M \sum_{j=1}^k (d_j^{(ox)})^2 = M \sum_{j=1}^k (d_j^{(ox)})^2 = M \left[\sum_{j=1}^k (bj)^2 \right] = Mb^2 \left(\sum_{j=1}^k j^2 \right) \end{aligned}$$

or

$$\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6},$$

ainsi nous avons finalement

$$I_{(OX)} = Mb^2 \left[\frac{(2k+1)(k+1)k}{6} \right]. \quad (3.39)$$

6. **Moment d'inertie** $I_{(OY)}$:

Par définition, le moment d'inertie $I_{(OY)}$ du système total est la somme des produits de chaque masse m_s par sa distance $d_s^{(oy)}$ au carré à l'axe (OY)

$$\begin{aligned} I_{(OY)} &= \sum_{D=D_1 \cup D_2} m_s (d_s^{(oy)})^2 = \left[\sum_{D_1} m (d_i^{(oy)})^2 \right] + \left[\sum_{D_2} M (d_j^{(oy)})^2 \right] \\ &= \left[m \sum_{i=1}^n (d_i^{(oy)})^2 \right] + \underbrace{\left[\sum_{j=1}^k M 0^2 \right]}_0 = m \sum_{i=1}^n (d_i^{(oy)})^2 = m \left[\sum_{i=1}^n (ai)^2 \right] \\ &= ma^2 \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \end{aligned}$$

finalement

$$I_{(OY)} = ma^2 \left[\frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \right]. \quad (3.40)$$

3.13 Examen de Rattrapage 2014

3.13.1 Exercice (05 points)

1. Donner la définition d'un solide (corps rigide).
2. Donner la définition du nombre de degrés de libertés d'un système physique.
3. Spécifier le nombre de degrés de libertés d'un solide.
4. Dans quels cas, le moment cinétique de translation d'un solide $\vec{L}_O^T = M \vec{OG} \wedge \vec{V}_O$, par rapport à un point O , est nul ?
5. Montrer que le centre de masse G de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 , situées respectivement aux points A_1 et A_2 , appartient à la droite (A_1A_2) .

3.13.2 Problème (15 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons quatre masses $m, 2m, m$ et $2m$ disposées sur le cercle de rayon R et de centre O du plan XOY tel que $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = R$ (voir Figure 3.9)

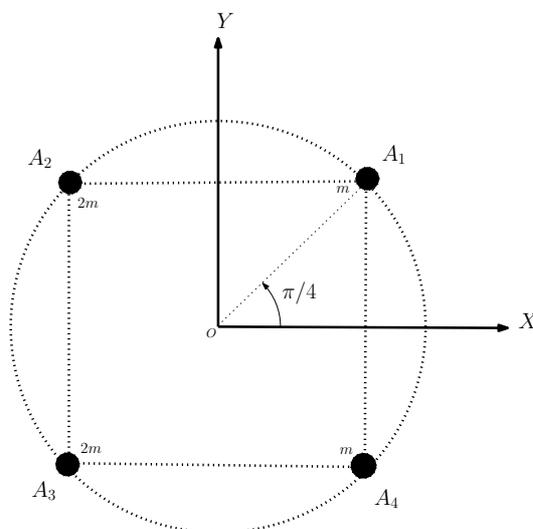


FIG. 3.9 –

1. Déterminer les coordonnées des points A_1, A_2, A_3 et A_4 où les 4 masses sont disposées.
2. Déterminer les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g, z_g)$ de l'ensemble des 4 masses.
3. Calculer le moment d'inertie $I_{/(ox)}$ des 4 masses par rapport à l'axe (Ox) .
4. Calculer le moment d'inertie $I_{/(oy)}$ des 4 masses par rapport à l'axe (Oy) .

5. Dédurre la valeur du moment d'inertie $I_{/(oz)}$ par rapport à l'axe (Oz) , en fonction de $I_{/(ox)}$ et $I_{/(oy)}$.
6. Comparer I_{zz} avec I_{xx} .
7. Calculer le moment d'inertie $I_{/(A_1A_3)}$ des 4 masses par rapport à l'axe (A_1A_3) .
8. Dans ce qui suit, on rajoute une masse M située sur un point $N(x, y, 0)$ du cercle. Déterminer la position et la valeur de M pour que le centre de masse du système à 5 masses soit $G(0, 0, 0)$.

3.14 Corrigé de l'Examen de Rattrapage 2014

3.14.1 Exercice (05 points)

1. Un corps rigide est un système de points matériels dont les distances mutuelles demeurent constantes sous l'action de n'importe quelle force extérieure.
2. Le degrés de libertés d'un système physique est le nombre minimal de paramètres pour déterminer univoquement la position de tous les points du système.
3. Le nombre de degrés de libertés d'un solide est 6. On peut choisir 3 coordonnées d'un point quelconque A du solide avec 3 angles d'Euler pour fixer l'orientation d'un repère orthonormé $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ lié au solide.
4. Le moment cinétique de translation d'un solide $\vec{L}_O^T = M \vec{OG} \wedge \vec{V}_O$, par rapport à un point O , est nul dans les cas particuliers suivants

$$\vec{V}_O = \vec{0} \quad (3.41)$$

$$O \equiv G \quad (3.42)$$

$$\vec{OG} // \vec{V}_O \quad (3.43)$$

5. Par définition, le centre de masse G est repéré par le vecteur position

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2}{m_1 + m_2}$$

autrement-dit

$$(m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 (\vec{OG} + \vec{GA}_1) + m_2 (\vec{OG} + \vec{GA}_2)$$

ce qui conduit à la relation

$$\vec{0} = m_1 \vec{GA}_1 + m_2 \vec{GA}_2$$

ou encore finalement à

$$\vec{GA}_1 = - \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \vec{GA}_2. \quad (3.44)$$

Cette dernière relation montre clairement que les trois points G, A_1 et A_2 sont alignés.

3.14.2 Problème (15 points)

1. Détermination des coordonnées des points

$$A_1 (x_1 = R\sqrt{2}/2, y_1 = R\sqrt{2}/2, z_1 = 0) \quad A_3 (x_3 = -R\sqrt{2}/2, y_3 = -R\sqrt{2}/2, z_3 = 0)$$

$$A_2 (x_2 = -R\sqrt{2}/2, y_2 = R\sqrt{2}/2, z_2 = 0) \quad A_4 (x_4 = R\sqrt{2}/2, y_4 = -R\sqrt{2}/2, z_4 = 0)$$

2. Les coordonnées du centre de masse $g(x_g, y_g, z_g)$ de l'ensemble des 4 masses.

Par définition, le centre de masse est repéré par le vecteur position

$$\vec{Og} = \frac{m \vec{OA}_1 + 2m \vec{OA}_2 + 2m \vec{OA}_3 + m \vec{OA}_4}{m + 2m + 2m + m},$$

ce qui conduit après simplification à

$$\vec{Og} = \frac{1}{6} \left[(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_4) + 2(\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3) \right],$$

de sorte que les coordonnées soient données par

$$x_g = \frac{1}{6} [(x_1 + x_4) + 2(x_2 + x_3)] \quad (3.45)$$

$$y_g = \frac{1}{6} [(y_1 + y_4) + 2(y_2 + y_3)] \quad (3.46)$$

$$z_g = \frac{1}{6} [(z_1 + z_4) + 2(z_2 + z_3)] \quad (3.47)$$

Finalement

$$g(x_g = -R\sqrt{2}/6, y_g = 0, z_g = 0). \quad (3.48)$$

3. Le moment d'inertie $I_{/(ox)}$:

Nous avons par définition

$$I_{/(ox)} = \sum_{i=1}^4 m_i [d_i^{(ox)}]^2 = m(y_1)^2 + 2m(y_2)^2 + 2m(y_3)^2 + m(y_4)^2$$

$$= (y_1)^2 (m + 2m + 2m + m) = 6m(y_1)^2$$

ce qui conduit finalement au résultat

$$I_{/(ox)} = 3m R^2 \quad (3.49)$$

4. Calculer le moment d'inertie $I_{/(oy)}$:

Nous avons par définition

$$I_{/(oy)} = \sum_{i=1}^4 m_i [d_i^{(oy)}]^2 = m(x_1)^2 + 2m(x_2)^2 + 2m(x_3)^2 + m(x_4)^2$$

$$= (x_1)^2 (m + 2m + 2m + m) = 6m(x_1)^2$$

ce qui conduit finalement au résultat

$$I_{/(oy)} = 3m R^2 \quad (3.50)$$

5. Dédurre la valeur du moment d'inertie $I_{/(oz)}$:

Nous avons par définition

$$\begin{aligned} I_{/(oz)} &= \sum_{i=1}^4 m_i \left[d_i^{(oz)} \right]^2 = \sum_{i=1}^4 m_i \left\| \overrightarrow{OA_i} \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 m_i \left[(x_i)^2 + (y_i)^2 \right] = \sum_{i=1}^4 m_i (x_i)^2 + \sum_{i=1}^4 m_i (y_i)^2 \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement au résultat

$$I_{/(oz)} = I_{/(oy)} + I_{/(ox)} \quad (3.51)$$

6. Comparaison de I_{zz} avec I_{xx} :

D'après les relations (3.49), (3.50) et (3.51), nous déduisons que

$$I_{/(oz)} = 2 I_{/(ox)} \quad (3.52)$$

7. Le moment d'inertie $I_{/(A_1A_3)}$:

Nous avons par définition

$$\begin{aligned} I_{/(A_1A_3)} &= \sum_{i=1}^4 m_i \left[d_i^{(A_1A_3)} \right]^2 \\ &= (m \times 0^2) + (2m \times R^2) + (2m \times 0^2) + (m \times R^2) \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement au résultat

$$I_{/(A_1A_3)} = 3m R^2. \quad (3.53)$$

8. Dans ce qui suit, on rajoute une masse M située sur un point $N(x, y, 0)$ du cercle. Déterminer la position et la valeur de M pour que le centre de masse du système à 5 masses soit $G(0, 0, 0)$.

Nous avons par définition

$$\overrightarrow{OG} = \frac{6m \overrightarrow{OG} + M \overrightarrow{ON}}{6m + M},$$

autrement-dit

$$0 = x_G = \frac{6m x_g + M x}{6m + M} \implies x = -6m x_g / M > 0 \quad (3.54)$$

$$0 = y_G = \frac{6m y_g + M y}{6m + M} \implies y = 0 \quad (3.55)$$

$$0 = z_G = \frac{6m z_g + M z}{6m + M} \implies 0 = 0 \text{ (évidence)} \quad (3.56)$$

L'équation cartésienne du cercle (c) est $x^2 + y^2 = R^2$, donc nous devons résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{R^2 - y^2} \\ y = 0 \\ x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm R \\ x > 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

ce qui conduit à

$$x = R.$$

Or d'après (3.54), ainsi

$$R = -\left(\frac{6m}{M}\right) \left(-\frac{R\sqrt{2}}{6}\right)$$

Finalement

$$M = \sqrt{2}m.$$

Bibliographie

- [1] A. Bouda, La Mécanique : Notions de bases et Applications, Chapitre 7 : Système de Particules, Office des Publications Universitaires, édition 2, 2013.
- [2] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Classical Mechanics, Chapter 4 : The Kinetics of Rigid Body Motion, Chapter 5 : The Rigid Body Equations of Motion, Addison Wesley, Third edition, 2000.
- [3] P. Amiot, L. Marleau, Mécanique Classique II, Chapitre 6 : Mouvement du Solide, 2009.
- [4] P.K. Nayak, Mechanics : Newtonian, Classical, Relativistic : Theory, Problems and Application, Chapter 3 : Mechanics of Particles, Chapter 9 : Rigid Body Motion, Asian Books Private Limited, 2008.
- [5] C. Taraphdar, The Classical Mechanics, Chapter 3 : Rotational Motion Rigid Body Rotation, Asian Books Private Limited, 2007.
- [6] J.B. Tatum, Classical Mechanics, Chapter 1 : Center of Mass, Chapter 2 : Moment of Inertia, Chapter 3 : Systems of particles, Chapter 4 : Rigid Body Motion. <http://orca.phys.uvic.ca/~tatum/classmechs.html>
- [7] Arya, Classical Mechanics, Chapter 8 : System of Particles (Conservation Laws and Collisions), Chapter 9 : Rigid Body Motion I, Chapter 13 : Rigid Body Motion II, Prentice Hall International Paperback Editions (janvier 1990).
- [8] E. Poisson, Advanced Mechanics (Phys*3400), University of Guelph, 2008.
- [9] C. Dufetrelle, V. Gaggioli, Intégration : 114 exercices corrigés Aide Mémoire et Mémento, Nickel, Vuibert universitaire.
- [10] N. Piskounov, Calcul différentiel et Intégral, Mir.
- [11] G. Baranenkov, B. Demidovitch, H. Damadian, Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique, Mir.