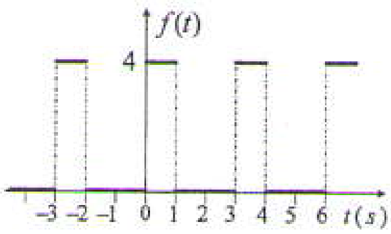
Université A. Mira de Béjaia.
Faculté de Technologie.
Département $2^{ème}$ Année ST.

Année: 2011/2012.
Module: Physique 3.
Durée: 02 Heures.

EXAMEN DE MOYENNE DURÉE

Exercice 1 Série de Fourier. $\boxed{\text{4 Points}}$

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.

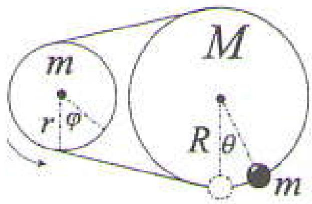


1. Quelle est la période T de cette fonction.
2. Trouver le développement en série de Fourier de la fonction.

> *Rappel: La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:*
> $$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right).$$

Exercice 2 Système non amorti. $\boxed{\text{5 Points}}$

Deux disques, de tailles différentes et reliés par un fil *non glissant* et *inextensible*, peuvent tourner librement autour de leurs axes *fixes*.
Le grand disque porte à sa périphérie une masse ponctuelle m.
À l'équilibre la masse était à la verticale (*représentée en pointillé*).

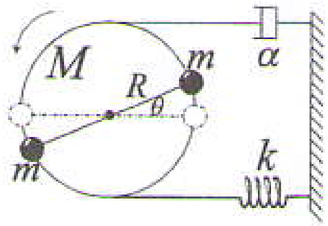


1. Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U du système en termes de la variable $\theta \ll 1$.
2. Déduire le Lagrangien puis l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0.
3. Écrire l'équation de conservation de l'énergie et retrouver l'équation du mouvement.

> *Rappels: Les moments d'inertie des disques autour de leurs axes sont $I_1=\frac{1}{2}MR^2$ et $I_2=\frac{1}{2}mr^2$.*
> *Pour $\theta \ll 1$:* $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3 Système amorti. $\boxed{\text{8 Points}}$

Un disque, de masse M et de rayon R, peut tourner librement autour de son axe *fixe*. Il porte à sa périphérie deux masses m ponctuelles.
Les frottements sont symbolisés par l'amortisseur de coefficient α.
À l'équilibre (*représenté en pointillé*), le ressort n'était *pas* déformé.



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, ainsi que la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. ($\theta \ll 1$.)
2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.
3. Sachant que α=5N.s/m, $M=m$=1kg, k=5N/m : trouver la nature du mouvement.
4. Calculer le temps τ au bout duquel l'amplitude diminue à **1/9** de sa valeur.
5. Quelle est la valeur de α qui ne faut pas dépasser pour avoir encore des oscillations.

> *Rappels: Le moment d'inertie du disque autour de son axe est $I=\frac{1}{2}MR^2$.*
> *Pour $\theta \ll 1$:* $\sin\theta \approx \theta$.
> *L'équation de Lagrange du système amorti est* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot\theta}$.

Questions de cours. $\boxed{\text{3 Points}}$

1. La *forme générale* de l'équation du mouvement d'un système linéaire forcé est: $\ddot q+$..........=....?
2. Qu'est-ce qu'une *pulsation de résonance* ? (Donner la définition, pas la formule.)
3. Quelle est l'*équation* à résoudre pour trouver cette pulsation: A=0, ou $\frac{\partial A}{\partial\Omega}$=0, ou $\frac{\partial^2 A}{\partial\Omega^2}$=0 ?

Bonnes vacances !

Université A. Mira de Béjaia. Année: 2010/2011.
Faculté de Technologie. Module: Physique 3.
Département $2^{ème}$ Année ST. **CORRIGÉ DE L'EXAMEN**

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{T=3s.}$ 1

2. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{1}{3}\left[\int_0^1 4.\mathrm{d}t + \int_1^3 0.\mathrm{d}t\right] = \frac{4}{3}.$ 0,5

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 4.\cos\frac{2\pi n t}{3}\mathrm{d}t + \int_1^3 0.\cos\frac{2\pi n t}{3}\mathrm{d}t\right] = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}.$ 0,5

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 4.\sin\frac{2\pi n t}{3}\mathrm{d}t + \int_1^3 0.\sin\frac{2\pi n t}{3}\mathrm{d}t\right] = \frac{4}{\pi n}\left(1-\cos\frac{2\pi n}{3}\right).$ 0,5

Donc, $f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}\cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\left(1-\cos\frac{2\pi n}{3}\right)\sin n\omega t.$ ($\omega = \frac{2\pi}{3}$ **rad/s.**)

Exercice 2

1. Puisque le fil est non glissant et inextensible on a $\boxed{r\varphi = R\theta.}$ 0,5 (Donc, $r\dot{\varphi} = R\dot{\theta}$.)

$T = T_M + T_m + T_m = \boxed{\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $+ \boxed{\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $+ \boxed{\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2}$ 0,5 $= \frac{1}{4}(M+3m)R^2\dot{\theta}^2.$

$U = U_m = mg(R - R\cos\theta) \approx \boxed{\frac{1}{2}mgR\theta^2.}$ 0,5

2. Avec le Lagrangien : $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(M+3m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgR\theta^2.$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0} \ 0,5 \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2mg}{(M+3m)R}\theta = 0.} \ 0,5 \ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg}{(M+3m)R}}} \ 0,5$$

3. Avec l'équation de conservation : $E = T + U = \frac{1}{4}(M+3m)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgR\theta^2$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0} \ 0,5 \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}(M+3m)R^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgR\dot{\theta}\theta = 0} \ 0,5 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2mg}{(M+3m)R}\theta = 0.$$

Exercice 3

1. $T = T_M + T_m + T_m = \boxed{\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $+ \boxed{\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $= \frac{1}{4}(M+4m)R^2\dot{\theta}^2.$

$U = U_k + U_m + U_m = \boxed{\frac{1}{2}kR^2\theta^2}$ 0,5 $+ \boxed{mg\sin\theta - mg\sin\theta}$ 0,5 $= \frac{1}{2}kR^2\theta^2.$

$\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(M+4m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2.$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M+4m}\dot{\theta} + \frac{2k}{M+4m}\theta = 0.}$ 0,5

3. L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{M+4m}.}$ 0,5 $\boxed{\omega_0^2 = \frac{2k}{M+4m}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $= \boxed{-1 < 0.}$ 0,5 Le mouvement est donc $\boxed{\textbf{pseudo-périodique.}}$ 0,5

4. $\boxed{Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{9}Ae^{-\lambda t}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\lambda\tau = \ln 9}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{\ln 9}{\lambda} \approx \mathbf{2{,}2s.}}$ 0,5

5. Pour avoir des oscillations il faut $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2 < 0}$ 0,5 $\Rightarrow \lambda < \omega_0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{2k(M+4m)}$: $\boxed{\alpha < 5\sqrt{2}\,\mathrm{Nm/s.}}$ 0,5

Questions de cours

1. $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F}{a}.$ 1 (Bien que moins général, $\frac{F_0\cos\Omega t}{a}$ ou $\frac{F_0\sin\Omega t}{a}$ sera aussi accépété.)
2. C'est la pulsation d'excitation pour laquelle l'*amplitude* du système devient *maximale*. 1
3. $\frac{\partial A}{\partial\Omega} = 0.$ 1