Université A.Mira
Faculté de la technologie
Département ST2

Examen de Maths 03

07/04/2012

Exercice 1 (4pts)

Etudier la nature de chacune des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n+1}$ 1 pt
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+5n}{4n^4+\sin n+\ln n}$ 1 pt
3. $\sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}}$ 1 pt
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{10n+1}{2n}$ 1 pt

Exercice 2 (4pts)

En utilisant les développements limités étudier la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$$

Rappel : $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$.

Exercice 3 (8pts) :

Soit $U_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \quad \forall n \in N ; \forall x \in R$

3 pts (2 + 1)
1. Soit $a > 0$. Montrer la convergence normale de la série de fonction de terme général $U_n(x)$ sur $[a, +\infty[$. Cette série est-elle normalement convergente sur R^+ ?
2. Soit U sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur R_+^* 2 pts
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur R_+^* et que sa dérivée est donnée par : 2 pts
   $\forall x \in R_+^* \quad U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}}$
4. Que se passe-t-il si $x < o$.
   1 pt

Exercice 4 (4pts) : Choisir entre 1 et 2.

1. Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$

a. Déterminer le rayon de convergence de cette série. 1 pt

b. En déduire son domaine de convergence. 2 pts (1 + 0,5 + 0,5)

c. Calculer la somme de cette série. 1 pt

2. a) Calculer la somme S de la série de terme général : $U_n = \frac{an^2+bn+c}{n!}$ sachant que $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

b) Déterminer $a, b, et\ c\ pour\ que\ S = 0$.

Corrigé de l'examen de Maths 03

Ex 1. (4 pts)

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n+1}$ on a $\frac{n}{2^n+1} \sim \frac{n}{2^n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ cv donc $\sum \frac{n}{2^n+1}$ cv

pt $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ cv d'après la règle de d'Alembert $\left(\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+5n}{4n^2+\sin n+\ln n}$

pt car $\frac{n^2+5n}{4n^2+\sin n+\ln n} \sim \frac{1}{4n^2}$ $\sum \frac{1}{4n^2}$ cv $\Rightarrow \sum U_n$ cv

3. $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}}$ on a $\sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ cv

(car c'est une série de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

1 pt et donc $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}}$ cv.

4. $\sum \frac{10n+1}{2n}$ dv car $\frac{10n+1}{2n} \longrightarrow \frac{10}{2} = 5 \neq 0$

Ex 2 (4 pts)

$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$?

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad 1\text{pt}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ cv car c'est une série alternée où $\left(\frac{1}{n}\right) \searrow 0$ (Leibniz) 1 pt
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ cv (Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) 0,5
- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ cv car $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ cv. $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ CA et donc elle cv. 0,5

ici aussi on peut utiliser le critère de Leibniz.

$\left(\frac{1}{n^2}\right) \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ cv

$\sum_{n\geq 1} o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ cv car $o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est majoré par le t.g. d'une serie cv.

ie $\exists M > 0$ tq $\left|o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \leq \frac{M}{n^2}$

$\cdot)\ \cdot\cdot)\ \cdot\cdot\cdot)$ et $\text{iv}) \Rightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ cv.

Ex 3 (8 pts)

1. Montrons la c.n de la serie de t.g $U_n(x)$ sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

en effet $a>0$ et $x\geq a \rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$.

$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$ car (la fn exp est $\nearrow$)

et $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0$ tq $e^{-a\sqrt{n}} < \frac{M}{n^2}$ $\forall n>0$

~~donc~~ d'où la cv de la $\sum e^{-a\sqrt{n}}$

$U_n(x)$ est donc majoré par le t.g d'une serie numerique convergente. ce qui entraine la convergence normale de la $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$. pour $x=0$ la serie dv $\Rightarrow \sum$ ne cv pas $n\in \mathbb{R}^+$

2. soit $U(x) = \sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ $x\in]0,+\infty[$. soit $a\in]0,+\infty[$

. on a d'après 1: $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ c.n sur $[a,+\infty[\Rightarrow \sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ c.u sur $[a,+\infty[$

.. la fn $x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[a,+\infty[$ pour chaque n.

. | et ..) entraine que U est continue sur $[a,+\infty[$

ie que U est continue au point a $\forall a\in]0,+\infty[$

$\Rightarrow U$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrons que U est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

• d'après 1. $\sum U_n(x)$ CS sur $[a,+\infty[$

•• les fonctions $(U_n)_n$ sont de classe C^1 sur $[a,+\infty[$.

••• $\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ cu sur $[a,+\infty[$ pour les mêmes raisons que dans 2.

ie $\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$ et $\sum \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$ cv

$\Rightarrow \sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ C ~~cv~~ normalement sur $[a,+\infty[$

$\Rightarrow$ U est dérivable sur $[a,+\infty[$.

on a : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ U est dérivable au point a.

$\Rightarrow$ U est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $U'(x) = -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

4. Si $x<0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = +\infty \Rightarrow \sum\limits_n e^{-x\sqrt{n}}$ dV.

<u>Ex 4</u>

1.| a. Calcul du rayon de CV

Soit $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 \Rightarrow R = 1$.

b. d'après a) la $\sum \dfrac{n+2}{n+1} x^n$ cv $\forall x \in]-1,1[$

pour $x = 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} x^n = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum \dfrac{n+2}{n+1} x^n$ dV pour $x=1$

pour $x = -1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} (-1)^n$ n'existe pas $\Rightarrow \sum \dfrac{n+2}{n+1} x^n$ dV pour $x=-1$

le domaine de cv est donc l'intervalle $]-1,1[$.

c. Calcul de la somme de la série

R/ ~~on a~~ : $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n+2}{n+1} x^n = \sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{n+1+1}{n+1} x^n \right) = \sum\limits_{n\geq 0} \left(x^n + \dfrac{x^n}{n+1} \right)$

On sait que $\sum_{n\geq 0} x^n$ cv $\forall x \in]-1,1[$ et $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ cv sur $[-1,1[$ et $\sum \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ si $x \neq 0$

$= 0$ si $x = 0$

$\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de la fonction $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

$$\Rightarrow \sum \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

d'où $\sum \frac{n+2}{n+1} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \ x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. $S = \sum U_n$ avec $U_n = \frac{an^2+bn+c}{n!}$

a)

$$U_n = \frac{a(n^2-n+n)+bn+c}{n!} = \frac{a(n^2-n)}{n!} + \frac{an+bn}{n!} + \frac{c}{n!}$$

$$= \frac{an(n-1)}{n!} + \frac{(a+b)n}{n!} + \frac{c}{n!}$$

$$= \frac{a}{(n+2)!} + \frac{a+b}{(n-1)!} + \frac{c}{n!}$$

$\Rightarrow \sum U_n = a e + (a+b)e + c e$ car $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$

$= e(2a+b+c)$ pour $x=1$ on a $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$

$$\Rightarrow S = e(2a+b+c)$$

b) Si $2a+b+c = 0 \Rightarrow S = 0$.