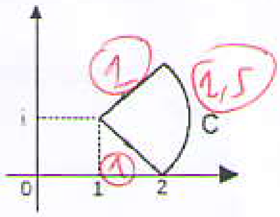
جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Bejaia

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2
Maths 5

2011/2012

Examen de remplacement

Exo 1 : (05 pts)



En utilisant la paramétrisation adéquate calculer, $\oint_C (z+i)\bar{z}dz$

où C est la courbe ci-contre. 0,5 1

– Peut-on utiliser le théorème fondamentale de Cauchy ? Justifier votre réponse.

Exo 2 : (05 pts)

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Posons

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

où $z = x + iy$, $u(x,y) = Ref$ et $v(x,y) = Imf$. On donne u(x,y) → 2 (avec C(y))

$$v(x,y) = x^2 - y^2 - e^x \sin y$$

u(x,y) → 1

1. Déterminer $u(x,y)$.
2. Ecrire f en fonction de z. → 2

Exo 3 : (03 pts)

Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}$$

Décomp → 1

dans le domaine $1 < |z| < 2$. fin → 2

Exo 4 : (07 pts)

Soit f une fonction complexe d'une variable complexe, définie par

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^4 - 1}$$

1. Déterminer le domaine d'holomorphie de f. → 1
2. Donner les points singuliers de f, et préciser la nature de chacun d'entre eux. → 2
3. Soit C le cercle défini par $|z - (1+i)| = \frac{3}{2}$. Calculer

hyp → 1

$$\oint_C f(z)dz$$

shéma → 0,5

calculs → 2,5

Bon travail.

corrigé :
Examen de Remplacement.

Exo 1 :

$$\oint_C (z+i)\bar{z}\, dz = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} (z+i)\,\bar{z}\, dz = \int_{\gamma_1} (z+i)\bar{z}\,dz + \int_{\gamma_2} (z+i)\bar{z}\,dz + \int_{\gamma_3} (z+i)\bar{z}\,dz$$

où,
. γ_1 st la droite d'équation $y = x$.
γ_2 " " " " $y = -x+2$
γ_3 st un arc du cercle d'équation : $\varphi(\theta) = 1+i+e^{i\theta}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

on a : 1) $y = x \Rightarrow dx = dy$.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} (z+i)\bar{z}\, dz = \int_{\gamma_1} (x+i(y+1))(x-iy)(dx+idy).$$

$$= \int_1^2 2x^2 dx + i\int_1^2 (x^2+2x)\, dx.$$

$$= x^3\Big|_1^2 + i\left|\frac{x^3}{3} + x^2\right|_1^2$$

$$= 7 - i\left[\left(\frac{8}{3}+4\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right] = 7 - \frac{16}{3}i$$ 1

2) $y = -x+2 \Rightarrow dy = -dx$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} (z+i)\,\bar{z}\,dz = \int_1^2 (3x^2 - 6x + 6)\,dx + i\int_1^2 (-x^2+4x-6)\,dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + 6x\Big|_1^2 + i\left|-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6x\right|_1^2$$

$$= 4 - \frac{7}{3}i$$

3) $\varphi(\theta) = (1+i) + e^{i\theta}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$$\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\varphi(\theta))\cdot\varphi'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left((1+2i)+e^{i\theta}\right)\left((1-i)+e^{-i\theta}\right) i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \int (4+i)\, ie^{i\theta} + (i+1)\, e^{2i\theta} + i\cancel{e^{i\theta}} + i - 2\, d\theta$$

$$= (4+i)e^{i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} + \frac{(1+i)}{2i}\, e^{2i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} + i\theta - 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} =$$

$(4+i)\left(i\sqrt{2}\right) + \frac{(1+i)}{\cancel{2i}}\left[\cancel{2i}\right] + \frac{i\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$.

$= 4\sqrt{2}i - \sqrt{2} + (1+i) + i\frac{\pi}{4} - \pi/4$.

$= 4\sqrt{2}i - \sqrt{2} + 1 + i + i\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = i\left(4\sqrt{2} + 1 + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$.

Exo2 : 5 pts

f est holomorphe sur alors les conditions de Cauchy - Riemann, suivantes, sont vérifiées.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ——— } (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ ——— } (2) \end{cases}$$

on a, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2y - (e^x \cos y) = \frac{\partial u}{\partial x}$

ce qui implique que $u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx$

$= \int -2y - e^x \cos y \, dx$

$= -2yx - \cos y \, e^x + c(y)$

$u(x,y) = -2yx - \cos y \, e^x + C(y)$ (2)

∂ * $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x + e^x \sin y + c'(y) = -\frac{\partial v}{\partial y}$.

$-\frac{\partial v}{\partial x} = -2x + \sin y \, e^x$

de la 2ème condition (2) on a

$-2x + e^x \sin y + c'(y) = -2x - \sin y \, e^x$

$\Rightarrow \int -2x + e^x \sin y + c'(y) \, dy = \int -2x + e^x \sin y \, dy$

$\Rightarrow \int c'(y) dy = \int 0 \, dy = K \in \mathbb{R}$,

Donc $u(x,y) = -2yx - \cos y \, e^x + K$, $K \in \mathbb{R}$. (1)

2). Ecrire f en fonction de z

on a $f(z) = -2yx - \cos y \, e^x + i\left(x^2 - y^2 - e^x \sin y\right) + K$

(2)

$$f(z) = i(x^2 + i2xy - y^2) + (\cos e^x - ie^x \sin y) + K.$$
$$= i z^2 + e^x (\cos y + i \sin y) + K.$$
$$= i z^2 + e^x e^{iy} + K.$$
2
$$= i z^2 + e^{x+iy} + K = i z^2 + z + K.$$

Exo 3 : 3pts

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 4z - 5}$$

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+5)} = \frac{1}{6}\left[\frac{z+1}{z-1} - \frac{z+1}{z+5}\right].$$ 1

sur $1 < |z| < 2 \Rightarrow |z| < 2 \Rightarrow \left|\frac{z}{5}\right| < \frac{2}{5} < 1$

$|z| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1.$

$$f(z) = \frac{1}{6}(z+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{z+1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n+1} + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$$

$$= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n} z^{n+1} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right) z^n$$ 2

Exo 4 :

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^4 - 1}.$$

f est rationnelle holomorphe sur son Domaine de définition D_f.

$D_f = \{z \in \mathbb{C} : z^4 - 1 \neq 0\}.$

$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \vee z = -1 \vee z = i \vee z = -i$

D'où, $D_{hol} = D_f = \mathbb{C} - \{1, -1, i, -i\}$ 1 les points singuliers de f sont $z_0=1$, $z_1=i$, $z_2=-1$, $z_3=-i$

qui sont tous des pôles simples. En effet,

$$\lim_{z\to 1}(z-i)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\cos z}{(z-i)(z+1)(z+i)} = \frac{\cos 1}{(1-i)2(1+i)} = \frac{\cos 1}{4}\neq 0$$

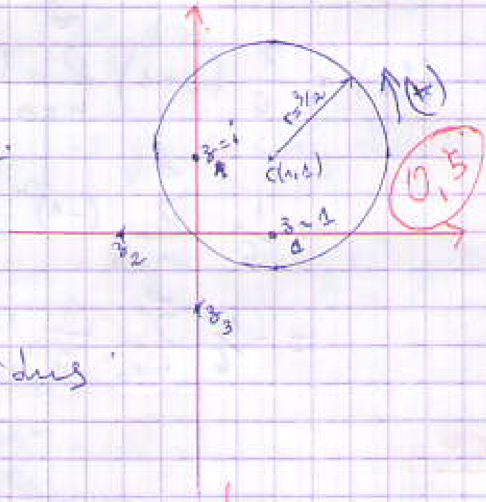
$$\lim_{z\to i}(z-i)(f(z) = \lim_{z\to i}\frac{\cos z}{(z-1)(z+1)(z+i)} = \frac{\cos i}{-4i}$$

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{\cos z}{(z-1)(z-1)(z+i)} = \frac{\cos(-1)}{-4} = \frac{\cos(-1)}{-4} = \frac{\cos(1)}{-4}$$

$$\lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{\cos z}{(z-1)(z-i)(z+1)} = \frac{\cos(i)}{4i}$$

3) Calculer $\int_C f(z)\,dz$.

C: $|z-(1+i)| = 3/2$.



f est holomorphe sur et à l'intérieur de C sauf en $z_0=1$ et $z_1=i$ N

qui sont entourés par C.

Alors d'après le théorème des résidus

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{2} Res(f,z_i)$$

$Res(f,z_0)=\frac{\cos 1}{4}$, $Res(f,z_1)=\frac{\cos i}{-4i}$.

D'où, $$\int f(z)\,dz = 2\pi i\left[\frac{\cos(1)}{4}+\frac{\cos(i)}{-4i}\right]$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos 1}{4}+\frac{i\cos(i)}{4}\right)$$

$$= \frac{i\pi}{2}\left(\cos 1 + i\cos(i)\right)$$

2,5