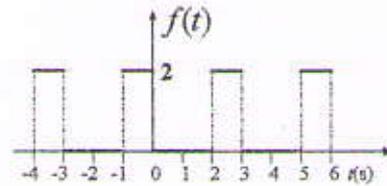


EXAMEN DE RATRAPAGE

Exercice 1 Série de Fourier. 4 Points

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.

1. Quelle est la période T de cette fonction.
2. Trouver le développement en série de Fourier de la fonction.

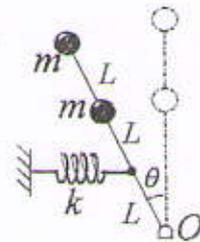


Rappel: La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right).$$

Exercice 2 Système non amorti. 5 Points

Une tige de longueur $3L$ et de masse négligeable, porte deux masses ponctuelles m : une à l'extrémité supérieure et une autre à une distance L de celle-ci. À une distance L de l'extrémité inférieure est attaché un ressort de raideur k . Le système peut tourner librement autour du point fixe O . À l'équilibre (représenté en pointillés) le ressort n'était pas déformé.

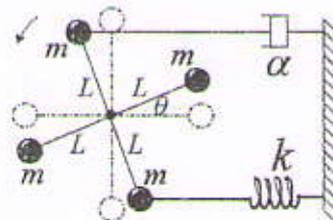


1. Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U en termes de $\theta \ll 1$.
2. Trouver la condition d'oscillation.
3. Déduire le Lagrangien puis l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0 .

Rappels: Pour $\theta \ll 1$: $\sin \theta \approx \theta$. $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3 Système amorti. 9 Points

Deux tiges, de longueurs $2L$ (de masses négligeables), sont soudées ensemble à angle droit. Elles portent à leurs extrémités des masses ponctuelles et peuvent tourner librement autour de l'axe horizontal fixe passant par le point de soudure. Les frottements sont symbolisés par l'amortisseur de coefficient α .



À l'équilibre (représenté en pointillés) le ressort n'était pas déformé.

1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U , ainsi que la fonction de dissipation \mathcal{D} . ($\theta \ll 1$.)
2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.
3. Sachant que $\alpha=16\text{N.s/m}$, $m=1\text{kg}$, $k=16\text{N/m}$: trouver la nature du mouvement.
4. Quelle est la valeur de α qui ne faut pas dépasser pour avoir des oscillations.
5. Pour quelle valeur de α l'amplitude diminue à $1/7$ de sa valeur après 2 oscillations complètes.

Rappels: Pour $\theta \ll 1$: $\sin \theta \approx \theta$.

L'équation de Lagrange du système amorti est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}$.

Questions de cours. 2 Points

Si l'équation du mouvement d'un système forcé est de la forme $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_0}{a} \cos \Omega t$, la solution permanente est $q(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$. Compléter la représentation complexe ci-dessous, puis déduire A et $\tan \phi$:

$$\begin{aligned} q(t) &= A \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow \underline{q(t)} = \dots\dots \\ F(t) &= F_0 \cos \Omega t \rightarrow \underline{F(t)} = \dots\dots \\ \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q &= \frac{F_0}{a} \cos \Omega t \rightarrow \dots\dots \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A = \dots\dots \\ \tan \phi = \dots\dots \end{cases}$$

CORRIGÉ DU RATTRAPAGE

Exercice 1

- La période de la fonction est $T = 3s$. (1)
- $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ (0,5) $= \frac{1}{3} \left[\int_0^2 0 \cdot dt + \int_2^3 2 \cdot dt \right] = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt = \frac{1}{3} \left[\int_{-1}^0 2 \cdot dt + \int_0^2 0 \cdot dt \right] = \frac{2}{3}$ (0,5)
 $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt$ (0,5) $= \frac{2}{3} \left[\int_{-1}^0 2 \cdot \cos \frac{2\pi n t}{3} \cdot dt + \int_0^2 0 \cdot dt \right] = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3}$ (0,5) $= \frac{2}{\pi n} \sin \frac{4\pi n}{3}$
 $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$ (0,5) $= \frac{2}{3} \left[\int_{-1}^0 2 \cdot \sin \frac{2\pi n t}{3} \cdot dt + \int_0^2 0 \cdot dt \right] = \frac{2}{\pi n} (-1 + \cos \frac{2\pi n}{3})$ (0,5) $= \frac{2}{\pi n} (-1 + \cos \frac{4\pi n}{3})$
 Donc, $f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3} \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (-1 + \cos \frac{2\pi n}{3}) \sin n\omega t$.

Exercice 2

- $T = T_m + T_m = \frac{1}{2} m (2L)^2 \dot{\theta}^2$ (0,5) $+ \frac{1}{2} m (3L)^2 \dot{\theta}^2$ (0,5) $= \frac{13}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$ (0,5)
 $U = U_k + U_m + U_m \approx \frac{1}{2} k (L \sin \theta)^2$ (0,5) $+ -mg(2L - 2L \cos \theta)$ (0,5) $+ -mg(3L - 3L \cos \theta)$ (0,5)
 $\approx \frac{1}{2} k L^2 \theta^2 - mgL\theta^2 - \frac{3}{2} mgL\theta^2 = \frac{1}{2} k L^2 \theta^2 - \frac{5}{2} mgL\theta^2$ (0,5)
- La condition d'oscillation est $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow kL^2 - 5mgL > 0$ (0,5) $\Leftrightarrow k > \frac{5mg}{L}$.
- Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{13}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (kL^2 - 5mgL)\theta^2$.
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kL - 5mg}{13mL} \theta = 0$ (0,5) $\omega_0 = \sqrt{\frac{kL - 5mg}{13mL}}$ (0,5)

Exercice 3

- $T = T_m + T_m + T_m + T_m = 4 \times \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 = 2mL^2 \dot{\theta}^2$ (0,5) $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha L^2 \dot{\theta}^2$ (0,5)
 $U = U_k + U_m + U_m + U_m + U_m$
 $= \frac{1}{2} k (L \sin \theta)^2$ (0,5) $+ mg(L - L \cos \theta) + mgL \sin \theta - mg(L - L \cos \theta) - mgL \sin \theta$ (0,5) $\approx \frac{1}{2} k L^2 \theta^2$.
- Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = 2mL^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k L^2 \theta^2$.
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m} \dot{\theta} + \frac{k}{4m} \theta = 0$ (0,5)
- L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$: avec $\lambda = \frac{\alpha}{8m}$ (0,5) $\omega_0^2 = \frac{k}{4m}$ (0,5)
 A.N: $\lambda^2 - \omega_0^2$ (0,5) $= 0$ (0,5) Le mouvement est donc en régime critique. (0,5)
- Pour avoir des oscillations il faut que $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ (0,5) $\Rightarrow \frac{\alpha}{8m} < \sqrt{\frac{k}{4m}} \Rightarrow \alpha < \sqrt{16mk} = 16N \cdot s/m$ (0,5)
- $Ae^{-\lambda(t+2T)} = \frac{1}{7} Ae^{-\lambda t}$ (0,5) $\Rightarrow 2\lambda T = \ln 7$ (0,5) $\Rightarrow \frac{4\pi \lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \ln 7$ (0,5)
 $\Rightarrow \lambda = \frac{\omega_0 \ln 7}{\sqrt{(4\pi)^2 + (\ln 7)^2}}$ (0,5) A.N: $\lambda \approx 0,3 s^{-1}$ (0,5) $\Rightarrow \alpha = 8m\lambda \approx 2,4 N \cdot s/m$ (0,5)

Questions de cours $q(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow \underline{q}(t) = Ae^{j(\Omega t + \phi)} = \underline{A}e^{j\Omega t}$ (0,25)

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \rightarrow \underline{F}(t) = F_0 e^{j\Omega t} \quad (0,25)$$

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_0}{a} \cos \Omega t \rightarrow \ddot{\underline{q}} + 2\lambda \dot{\underline{q}} + \omega_0^2 \underline{q} = \frac{F_0}{a} e^{j\Omega t} \quad (0,5)$$

$$(-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega + \omega_0^2) \underline{A} = \frac{F_0}{a} \Rightarrow \underline{A} = \frac{F_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega} \Rightarrow A = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \quad (0,5) \quad \tan \phi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (0,5)$$