Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A/MIRA de Béjaia

Faculté de la Technologie

Département ST 2

2012/2013

Examen de Maths 3

Exercice 1 :(04pts)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}$ (b) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n^n}{n!}\right)$

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{-n+1}{4n+5}$ (d) $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

Exercice 2 :(06pts)

On considère la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^n \qquad (*)$$

1. Déterminer le rayon de convergence R et l'intervalle de convergence I de la série entière $(*)$.
2. Etudier la nature des séries suivantes :

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$, (b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$.
3. En déduire le domaine de convergence de la série $(*)$.

Exercice 3(05pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par,

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$$

1. Développer en série entière la fonction f ainsi que sa dérivée f'.
2. En se servant de la première question, déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!}$$

Exercice 4 :(05pts)

Calculer la somme de chacune des séries entières suivantes :

(a) $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n$ (b) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{2n}$

Solution de l'EMD "Maths 3"

Exercice 1

Étudier la nature de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}.$$

1 pt

(a) :

On pose :

$$U_n = \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}$$

on a :

$$U_n \sim^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1 pt

Comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ est convergente,il en est de même pour $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n}{n^4+3n^3+1}$.

(b) :

En utilisant le critère de D'Alembert :

On pose $U_n = \frac{n^n}{n!}$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$

La série en question est divergente.

1 pt

(c) :

1 pt

$U_n = \frac{-n+1}{4n+5}$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = \frac{-1}{4} \neq 0$

La condition nécessaire n'est pas satisfaite,la série en question est divergente.

(d) :

La série est alternée,on pose :

$$v_n = \frac{1}{\ln n}$$

On a $v_n \searrow$ car $\ln n \nearrow$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$.

D'après le critère de Leibnitz la série alternée est convergente.

exercice 2 :

1)

On pose :

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

$$R = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

1,5 pt

Car

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Remarque :
L'étudiant peut écrire $\ln(n+1) \sim \ln n$ quand n est assez grand. 0,5 pt

$$I =]-1,1[$$

2)
On a pour tout $n > 0$:

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente,d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente. 1,5 pt

La série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ est absolument convergente, donc elle est convergente. 1,5 pt

Remarque :
L'étudiant peut utiliser le critère de Leibnitz pour la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$.

En fin
Le domaine de convergence est $D = [-1,1]$. 1 pt

Exercice 3 :
1)
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$ 0,5 pt

ce qui implique

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$ 1 pt

On déduit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}}$$ 0,5 pt

Donc

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!} x^{2n-2}}$$ 1 pt

2)
On a :

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!} x^{2n-1}$$

0,5 pt

$$(xf'(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!} x^{2n-2}$$

0,5 pt

Ce qui donne,pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) + xf''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!} x^{2n-2}$$

0,5 pt

Pour $x = 1$

$$\boxed{f'(1) + f''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^2}{n!}}$$

0,5 pt

Exercice 4 :
(a)
On a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

0,5 pt

par dérivation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

0,75 pt

En multipliant les deux membres de cette équation par x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} = x + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n$$

0,75 pt

d'où

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} - x}$$

0,5 pt

(b)
On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

1 pt

On substitue x par x^2,on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{2n} = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}}$$

1,5 pt