Maths 04

Université A.MIRA–Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie-2ème Année

® 2012–2013

✠–Examen Final de Probabilités et Statistiques–✠

Exercice 1 (07.00 points) :
La mesure en cm^3 du volume des éléments figurant dans 100 cm^3 de sang a été effectuée chez 100 sujets. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Classes	[38.5, 39.5[	[39.5, 40.5[	[40.5, 41.5[	[41.5, 42.5[	[42.5, 43.5[	[43.5, 44.5[	[44.5, 45.5[
n_i	3	10	23	28	20	11	5

1. Tracer le polygône des fréquences.
2. Donner la fonction de répartition et tracer son graphe.
3. Calculer la moyenne, l'écart-type et l'intervalle interquartile.
4. Quelle est la proportion des individus ayant un volume entre 40 et 44.5 cm^3.

♣–Barème Détaillé de l'Exercice 1 : 01.25+02.75+02.00+01.00–♣

Exercice 2 (07.00 points) :
Le tableau suivant donne la distribution conjointe de deux variables statistiques X et Y.

$X \backslash Y$	0	2	4	6	$f_{i\bullet}$
1	0.2	0.12	0	0.08	0.4
2	0.05	0.08	0.02	0.15	
3	0.1	0.1	0.08	0.02	0.3
$f_{\bullet j}$	0.35		0.1	0.25	

1. Les deux variables sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la distribution conditionnelle de $Y/X = x_2$ et calculer sa variance.
3. Déterminer la distribution conditionnelle de $X/Y = y_2$ et calculer sa variance.
4. Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Conclure.

♣–Barème Détaillé de l'Exercice 2 : 00.50+01.50+01.50+02.50+01.00–♣

Exercice 3 (06.00 points) :
Le tableau suivant donne la série statistique de type $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,10}}$:

x_i	4	16	25	49	100	121	196	196	289	324
y_i	0	1	1	2	6	5	9	11	14	17

1. Déterminer le centre de gravité du nuage $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,10}}$ et calculer $V(Y)$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.
3. Soient $U = \sqrt{X}$ et $V = Y$.
   a- Déterminer le coefficient de corrélation ρ_{UV}.
   b- Vous parait-il raisonnable d'ajuster au nuage de points $(u_i, v_i)_{i=\overline{1,10}}$ une droite de régression de V en U ? Justifier.

♣–Barème Détaillé de l'Exercice 3 : 01.50+01.50+03.00–♣

Bonne Chance

Le 25-01-2013

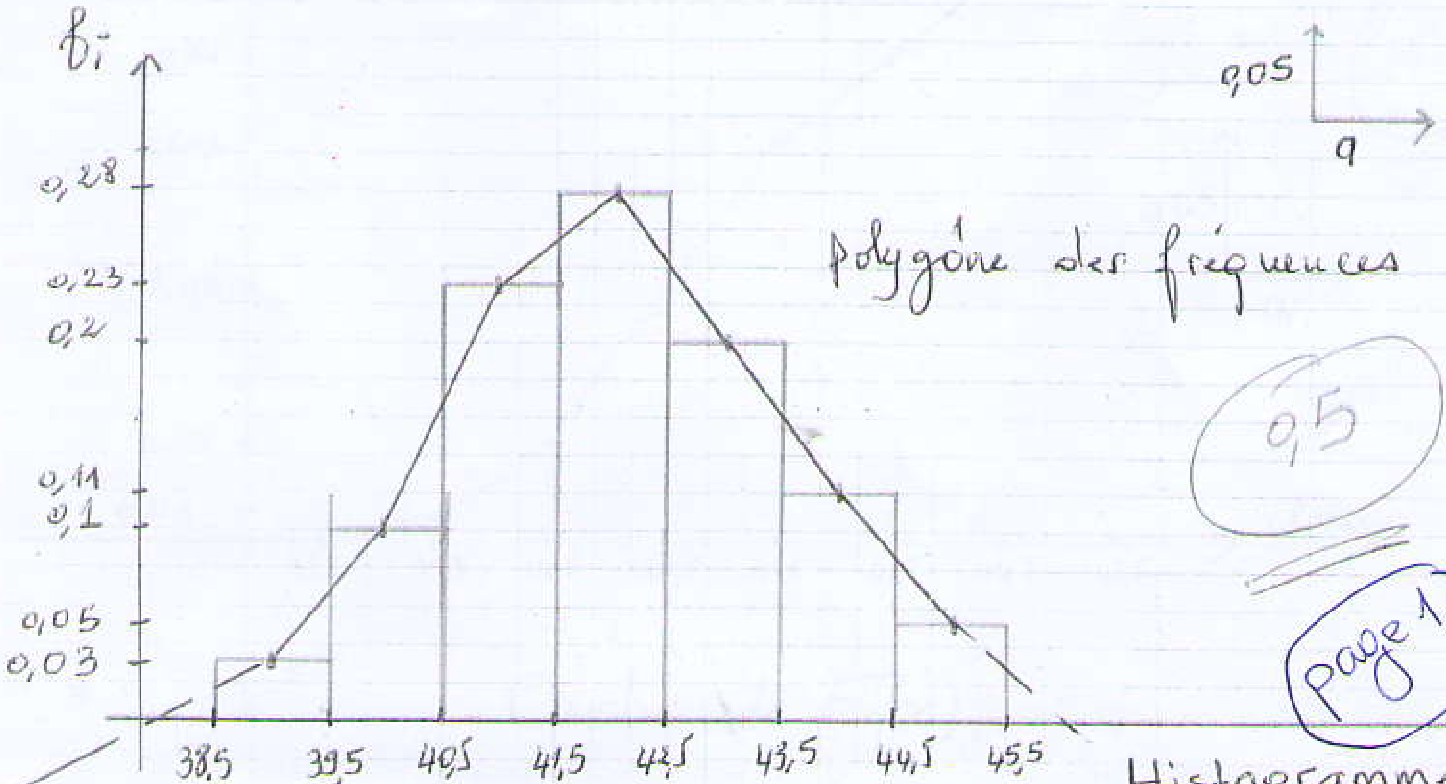
Corrigé de l'examen Final MATHS 04

Exercice N° 1

Classes	x_i	n_i	f_i	$F_i \nearrow$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[38,5 , 39,5[	39	3	0,03	0,03	117	4563
[39,5 40,5[	40	10	0,1	0,13	400	16000
[40,5 , 41,5[	41	23	0,23	0,36	943	38663
[41,5 , 42,5[	42	28	0,28	0,64	1176	49392
[42,5 , 43,5[	43	20	0,2	0,84	860	36980
[43,5 , 44,5[	44	11	0,11	0,95	484	21296
[44,5 , 45,5[	45	5	0,05	1	225	10125
TOTAL	//	100	1		4205	177019

0,75

1°) Le Polygone



0,5

page 1

Histogramme

Fonction de Répartition

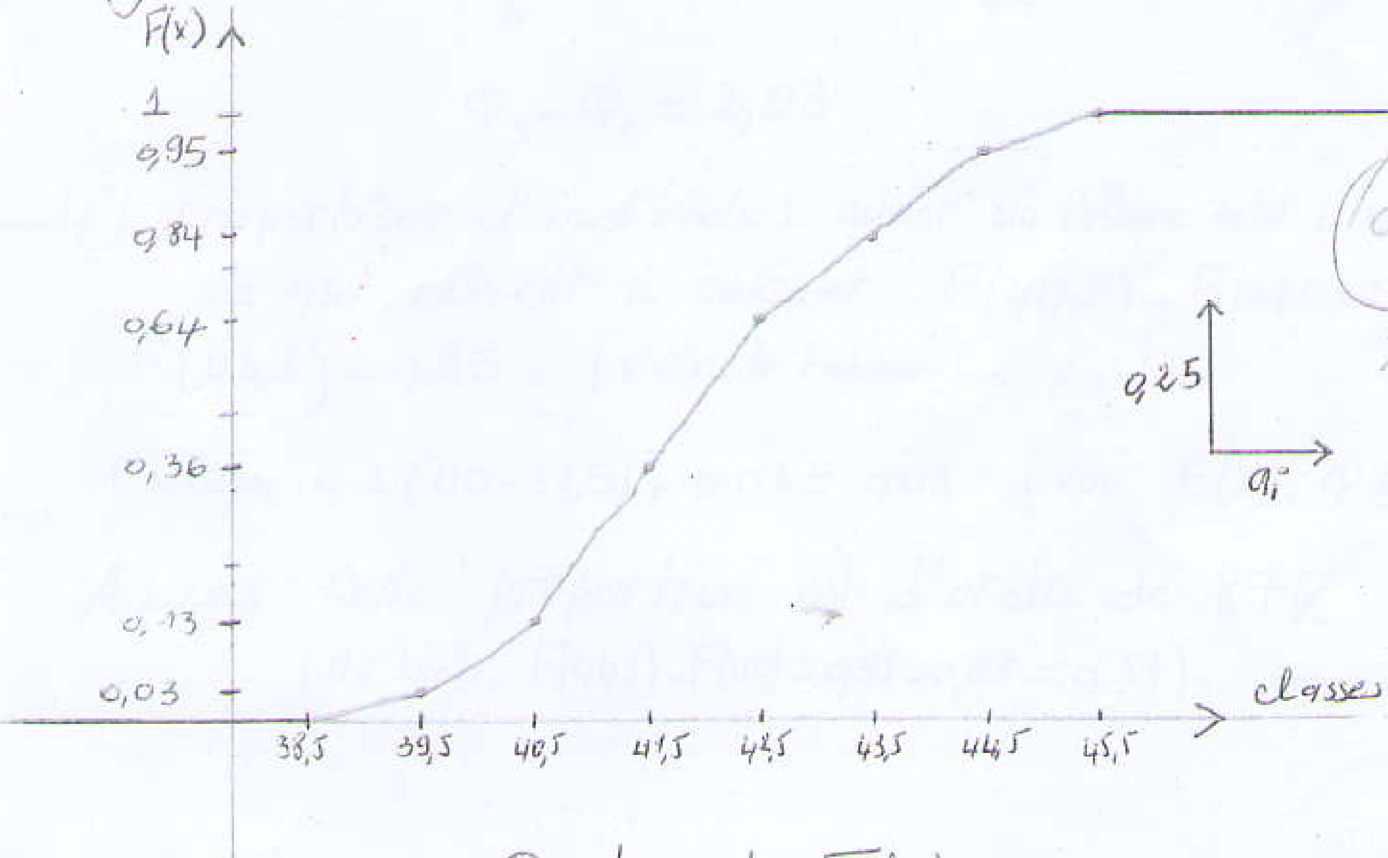
$$F(x) = F(e_{i-1}) + \frac{f_i}{a_i}(x - e_{i-1}), \quad x \in [e_{i-1}, e_i[$$

Amplitude égale des classes : $a_i = e_i - e_{i-1} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 38,5 \\ 0,03(x - 38,5) & \text{si } x \in [38,5 , 39,5[\\ 0,1(x - 39,5) + 0,03 & \text{si } x \in [39,5 , 40,5[\\ 0,23(x - 40,5) + 0,13 & \text{si } x \in [40,5 , 41,5[\\ 0,28(x - 41,5) + 0,36 & \text{si } x \in [41,5 , 42,5[\\ 0,2(x - 42,5) + 0,64 & \text{si } x \in [42,5 , 43,5[\\ 0,11(x - 43,5) + 0,84 & \text{si } x \in [43,5 , 44,5[\\ 0,05(x - 44,5) + 0,95 & \text{si } x \in [44,5 , 45,5[\\ 1 & \text{si } x \geq 45,5 \end{cases}$$

0,25

Le graphe de F(x) :



Courbe de F(x)

0,5

3°) La moyenne:

- $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{7} n_i x_i = \frac{1}{100}(4205) = 42,05$ 0,5

- Ecart-type:

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{100}(177019) - (42,05)^2 = 1,9875$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 1,4097$$ 0,5

- Intervalle interquartile: $Q_3 - Q_1 = ?$

* $Q_1 \in [40,5 \, , \, 41,5[= [e_{i-1}, e_i[$

$$Q_1 = e_{i-1} + \frac{0,25 - F(e_{i-1})}{f_i} a_i = 40,5 + \frac{0,25 - 0,13}{0,23} \times 1 = 41,021$$ 0,5

* $Q_3 \in [42,5 \, , \, 43,5[$

$$Q_3 = e_{i-1} + \frac{0,75 - F(e_{i-1})}{f_i} a_i = 42,5 + \frac{0,75 - 0,64}{0,2} \times 1 = 43,05$$ 0,5

$$Q_3 - Q_1 = 2,03$$

4°) Proportion d'individus ayant un Volume entre 40 et 44,5

ce qui revient à calculer $F(44,5) - F(40) = ?$

$F(44,5) = 0,95$ (voir le tableau) 0,5

$F(40) = 0,1(40 - 39,5) + 0,03 = 0,08$ (voir $F(x)$, Q 2°) 0,5

Alors cette proportion est d'ordre de 87%

(ou bien, $F(44,5) - F(40) = 0,95 - 0,08 = 0,87$).

P

Exercice N° 2 :

1°) les deux Variables sont independantes $\Leftrightarrow f_{ij} = f_{i\cdot} \times f_{\cdot j}, \forall i, j$

Pour $(i, j) = (1, 4)$:

$$\left.\begin{array}{l} f_{14} = 0 \\ f_{1\cdot} \times f_{\cdot 4} = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{14} \neq f_{1\cdot} \times f_{\cdot 4}$$ 0,5

Alors les deux variables sont Dépendantes.

2°) Distribution Cond. de $Y / X = x_2 = 2$.

Rappel : $\begin{cases} f_{i/j} = \dfrac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} = \dfrac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} & (j \text{ fixé}, \forall i) \\ f_{j/i} = \dfrac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} = \dfrac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} & (i \text{ fixé}, \forall j) \end{cases}$

Y_j	$f_{j/2}$	$f_{j/2}\, Y_j$	$f_{j/2}\, Y_j^2$
0	$f_{21}/f_{2\cdot} = 0{,}166$	0	0
2	$f_{22}/f_{2\cdot} = 0{,}266$	0,532	1,064
4	$f_{23}/f_{2\cdot} = 0{,}066$	0,264	1,056
6	$f_{24}/f_{2\cdot} = 0{,}5$	3	18
TOTAL	1	3,796	20,12

0,5

Moyenne Condi.

$$\bar{Y}_2 = \sum_{j=1}^{4} f_{j/2}\, Y_j = 3{,}796$$ 0,5

Variance Condi

$$V_2(Y) = \sum_{j=1}^{4} f_{j/2}\, Y_j^2 - \bar{Y}_2^2$$

$$= 20{,}12 - 14{,}409$$

$$= 5{,}710$$ 0,5

P4

Dist Cond de $X/Y=y_2=2$

x_i	$f_{i/2}$	$f_{i/2}\,x_i$	$f_{i/2}\,x_i^2$
1	0,4	0,4	0,4
2	0,266	0,532	1,064
3	0,333	0,999	2,997
TOTAL	1	1,931	4,461

0,5

Moyenne Condi

$$\overline{X}_2 = \sum_{i=1}^{3} f_{i/2}\,x_i = 1{,}931$$ 0,5

Variance Condi:

$$V_2(X) = \sum f_{i/2}\,x_i^2 - \overline{X}_2^{\,2}$$
$$= 4{,}461 - 3{,}728$$
$$= 0{,}732$$ 0,5

4°/ Equation de la droite de x en Y:

(D') : $x = \alpha y + \beta$, avec $\begin{cases} \alpha = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(Y)} \\ \beta = \overline{X} - \alpha\overline{Y} \end{cases}$

Calculs intermédaires :

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{3} f_{i\cdot}\,x_i = 1{,}9 \;;\quad V(X) = \sum f_{i\cdot}\,x_i^2 - \overline{X}^2 = 0{,}69$$
$$\overline{Y} = \sum_{j=1}^{4} f_{\cdot j}\,y_j = 2{,}5 \;;\quad V(Y) = \sum f_{\cdot j}\,y_j^2 - \overline{Y}^2 = 5{,}55$$
1

$$Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} f_{ij}\,x_i y_j - \overline{X}\,\overline{Y} = 4{,}92 - 4{,}75 = 0{,}17$$ 0,5

Alors $\alpha = 0{,}03$ 0,5 et $\beta = 1{,}825$ 0,5

$$(D')\quad x = 0{,}03\,y + 1{,}825$$

5°/ Le Coefficient de Corrélation : $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$

$$\rho_{XY} = \frac{0{,}17}{(0{,}83)(2{,}355)} = 0{,}08$$ 0,5

La laison linéaire est presque Abscente. 0,5

P5

Exercice N° 3

											TOTAL
x_i	4	16	25	49	100	121	196	196	289	324	1320
y_i	0	1	1	2	6	5	9	11	14	17	66
x_i^2	16	256	625	2401	10000	14641	38416	38416	83521	104976	293268
y_i^2	0	1	1	4	36	25	81	121	196	289	754
x_iy_i	0	16	25	98	600	605	1764	2156	4046	5508	14818

1°/ • le Centre de gravité $G(\overline{X}, \overline{Y})$

$$\left.\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(1320) = 132 \\ \overline{Y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10}(66) = 6{,}6.\end{aligned}\right\} \Rightarrow G(132; 6{,}6) \quad 1$$

• Calcul de $V(Y)$

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \overline{Y}^2 = \frac{1}{10}(754) - (6{,}6)^2 = 31{,}84 \quad 0{,}5$$

2°/ Equation de la droite Y en X.

$$(D):\ y = ax + b, \text{ avec } \begin{cases} a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}\,; \\ b = \overline{Y} - a\overline{X}. \end{cases}$$

$$\bullet\ V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{10}(293268) - (132)^2 = 11902{,}8 \quad 0{,}5$$

$$\bullet\ Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} = \frac{1}{10}(14818) - (132)(6{,}6) \quad 0{,}5$$

$$= 610{,}6$$

$$a = \frac{610,6}{1190,2,8} = 0,051$$ (0,25)

$$b = 6,6 - (0,051)(132) = -0,132$$ (0,25)

D'où :

$$(D) : y = 0,051 . x - 0,132$$

3°/ $U = \sqrt{X}$ et $V = Y$

U_i	2	4	5	7	10	11	14	14	17	18	102
V_i	0	1	1	2	6	5	9	11	14	17	66
U_i^2	4	16	25	49	100	121	196	196	289	324	1320
$U_i V_i$	0	4	5	14	60	55	126	154	238	306	962

a/1° Coefficient de Corrélation ρ_{UV} = ?

$$\rho_{UV} = \frac{Cov(U, V)}{\sigma_U \ \sigma_V}$$

- $\overline{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} U_i = \frac{1}{10} (102) = 10,2$ (0,5)

- $V(U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} U_i^2 - \overline{U}^2 = 27,96$ (0,5)

$\overline{V} = \overline{Y} = 6,6$; $V(V) = V(Y) = 31,84$

- $Cov(U, V) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} U_i V_i - \overline{U} \ \overline{V} = 28,88$ (0,5)

$$\rho_{UV} = \frac{28.88}{(5,287)(5,642)} = 0.968.$$ (0,5)

Conclusion : 7) La Corrélation entre U et V est très forte (car $\rho_{UV} = 0,968$), mais il n'est pas de tout raisonnable de lui Ajuster une droite de régression de V en U car les points de nuages ne sont pas alignés

La Preuve :

La droite de Y en X est Donnée par :

$$(D) : \boxed{y = 0,051\, x - 9,132}$$

et comme $U = \sqrt{X} \Rightarrow X = U^2$, alors la droit de V en U est une équation non-linéaire :

$$\boxed{V = 0,051\, U^2 - 0,132}$$

Le 25 - 01 - 2013 à 17H00

Rédigé par Mr BOUALEM