Chapitre 2 : Analyse combinatoire.

2.1 <u>Principe fondamental de dénombrement :</u>(Principe De Multiplication. (PDM)).

Si une expérience (ou procédure) peut être décomposée en k étapes telles que :

- La première étape peut produire n_1 résultats possibles.
- Pour chaque résultat de la première étape, il y a n_2 résultats possibles pour la deuxième étape.
- Pour chaque résultat des deux premières étapes, il y a n_3 résultats possibles pour la troisième étape.
- Et ainsi de suite.

Alors le nombre de résultats possibles de l'expérience est égale à :

$$\boxed{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k}$$

2.2 <u>Arrangements Sans Répétition</u> : (A.S.R.)

Soit $E = \{e_1, e_2, e_3, \ \dots, e_n\}$ un ensemble de n éléments distincts.Soit $1 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement sans répétition d'ordre p de E, toute suite <u>ORDONNEE</u> de p éléments <u>DISTINCTS</u> de E.

<u>Proposition :</u> Leur nombre est égale à :

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

2.3 <u>Arrangements Avec Répétition</u> : (A.A.R.)

Soit $E = \{e_1, e_2, e_3, \ \dots, e_n\}$ un ensemble de n éléments distincts. Soit $p \geq 1$.

On appelle arrangement avec répétition d'ordre p de E, toute suite <u>ORDONNEE</u> de p éléments <u>NON NECESSAIREMENT DISTINCTS</u> de E.

<u>Proposition :</u> Leur nombre est égale à :

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{A}}_n^p = n^p}$$

2.4 <u>Permutation Sans Répétition</u> : (P.S.R.)

Soit $E = \{e_1, e_2, e_3, \ \dots, e_n\}$ un ensemble de n éléments distincts.

On appelle permutation sans répétition de E, toute suite <u>ORDONNEE</u> des n éléments <u>DISTINCTS</u> de E.

<u>Proposition :</u> Leur nombre est égale à :

$$\boxed{P_n = n!}$$

2.5 <u>Combinaison Sans Répétition</u> : (C.S.R.)

Soit $E = \{e_1, e_2, e_3, \ \dots, e_n\}$ un ensemble de n éléments distincts.Soit $1 \leq p \leq n$.

On appelle combinaison sans répétition d'ordre p de E, toute suite <u>NON ORDONNEE</u> de p éléments <u>DISTINCTS</u> de E.

<u>Proposition :</u> Leur nombre est égale à :

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$$

2.6 <u>Permutation Avec Répétition</u> : (P.A.R.)

Soit $F = [e_1, e_1, \dots, e_1, \ e_2, e_2, \dots, e_2, \ \dots, \ e_n, e_n, \dots, e_{\cancel{n}\,k}]$ une collection de p éléments $\cancel{(p \geq n)}$ dont : $\sum_{i=1}^{k} p_i = n.$

p_1 fois l'élément e_1, p_2 fois l'élément e_2, ..., p_n fois l'élément e_n.

On appelle permutation avec répétition de F, toute suite <u>ORDONNEE</u> des p éléments de F.

<u>Proposition :</u> Leur nombre est égale à : Pl.

$$\boxed{\widetilde{P}_{p_1 p_2 \cdots p_n} = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_{\cancel{n}\,k}!}}$$

2.7 <u>Combinaison Avec Répétition</u> : (C.A.R.)

Soit $E = \{e_1, e_2, e_3, \ \dots, e_n\}$ un ensemble de n éléments distincts. Soit $p \geq 1$.

On appelle combinaison avec répétition d'ordre p de E, toute suite <u>NON ORDONNEE</u> de p éléments <u>NON NECESSAIREMENT DISTINCTS</u> de E.

<u>Proposition :</u> Leur nombre est égale à :

$$\boxed{K_n^p = C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^{p}}$$

Chapitre 3 : Calcul des probabilités.

Partie 1 : Espaces probabilisés.

Définition 1 :
On appelle expérience aléatoire toute expérience dont le résultat dépend du Hasard.

Définition 2 :
On appelle ensemble fondamental (ou univers) de l'expérience aléatoire, l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience, il est noté par Ω.

Définition 3 :
Un événement lié à une expérience est un sous ensemble de l'ensemble fondamental Ω.
Un événement de la forme $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{w}\}$, où $w \in \Omega$, est appelé événement élémentaire.

Définition 4 :
L'événement A est dit réalisé si le résultat de l'expérience est un élément de A.

Remarque :

- Ω est dit événement certain.
- ∅ est dit événement impossible.

Opérations sur les événements :

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.

a) Union (disjonction) :
L'événement $A \cup B$ est réalisé ⇔ l'un au moins des événements A et B est réalisé.

b) Intersection (injonction) :
L'événement $A \cap B$ est réalisé ⇔ les événements A et B sont réalisés simultanément.

Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont incompatibles.

c) Evénement complémentaire : noté $\overline{A}$ (ou encore A^c).
L'événement $\overline{A}$ est réalisé ⇔ l'événement A n'est pas réalisé.

d) Inclusion :
$A \subset B$ ⇔ la réalisation de l'événement A entraine celle de l'événement B.

Système complet d'événements :

Définition :
Soit Ω un ensemble fondamental d'une expérience aléatoire.
On appelle système complet d'événements de Ω, toute famille de événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vérifiant les 2 propriétés suivantes :

1) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad , \forall i \neq j$.

2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Tribu (ou σ-Algèbre) :

Soit Ω un ensemble fondamental d'une expérience aléatoire et soit $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ un ensemble de parties de Ω (**$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$**).
$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est dit tribu sur **Ω** si :

1) $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{A}$.
2) **si $\boldsymbol{A}$** $\in \mathcal{A}$ alors $\overline{\boldsymbol{A}} \in \mathcal{A}$.
3) Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements de $\mathcal{A}$

on a : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Où $I \subseteq \mathbb{N}$.

Remarque :
Le couple $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.