Avant – Propos

Ce cours de **Probabilités** est destiné surtout aux étudiants de L2 Mathématiques (dans le cadre du système L.M.D.), il couvre le programme officiel. Le contenu de ce cours est consacrée au programme du module Probabilités, à savoir :

1) Rappels sur les probabilités.

2) Variables aléatoires à une dimension.

3) Lois de probabilités absolument continues usuelles.

J'espère que ce support aidera les étudiants de deuxième année Mathématiques à assimiler les Probabilités et plus particulièrement les variables aléatoires. Enfin, des erreurs peuvent être relevées, prière de les signaler à l'auteur.

Table des matières

1
Lois de probabilités absolument continues

Dans le chapitre précédent nous avons traité le cas de variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire de variables dont l'ensemble des états est fini ou infini dénombrable. Il existe cependant des variables dont l'ensemble des états possibles est infini non dénombrable. On peut citer par exemple l'heure d'arrivée d'un train à une gare donnée ou encore la durée de vie d'un transistor. Désignons par X une telle variable.

1.0.1 Généralités

Définition 1.0.1. *Soit X une v.a.r. : on dit que X admet une densité f si sa fonction de répartition F est continue et peut s'écrire sous la forme :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

avec :
1. *f est positive.*
2. *f possède un nombre fini de points de discontinuité.*
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. *$f$ est appeléé densité de la variable X.*

Remarque 1.0.1. f n'est pas unique. Il suffit de la modifier en un point, et on obtient une autre fonction vérifiant toutes les conditions de la définition (modifier une fonction en un point ne change pas la valeur de l'intégrale). Il est donc plus correct de parler d'une densité de X plutôt que de la densité de X.

Dans le cas des variables à densité, F est par définition continue, et possède en plus la propriété suivante, qui relie fonction de répartition et densité :

Propriété 1.0.1. *En tout point x_0 où f est continue, F est dérivable et :*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Preuve. Soit x_0 un point où f est continue. On a donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Soient $\epsilon > 0$ fixé, et h tel que $|h| < \alpha$.

En remarquant que : $f(x_0) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dx$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| & = & \left| \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x) - f(x_0) dx \right| \\ & \leq & \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| \, dx \\ & \leq & \frac{1}{h} h\epsilon \\ & \leq & \epsilon \end{array}$$

On a donc bien $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Exemple 1.0.1. *Soit f définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{t}} & si \quad 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2t^2} & si \quad 1 \leq t \end{cases}$$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire, puis calculer sa fonction de répartition.

Propriété 1.0.2. *Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F, admettant f pour densité. Alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$,*

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = \int\limits_a^b f(t)dt \quad \texttt{et}$$

$$\mathbf{P}(X = a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0.$$

Preuve. On suppose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, on a

$$\begin{array}{rcl} P(a \leq X \leq b) & = & F(b) - F(a) \\ & = & \int\limits_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt \\ & = & \int\limits_a^b f(t)dt \end{array}$$

Pour $\mathbf{P}(X = a)$ c'est analogue.

Remarque 1.0.2. Pour une variable à densité, la valeur de la probabilité ne change pas selon que l'on met des inégalités strictes ou larges.

1.0.2 Espérance et Variance d'une v.a.r. à densité

Dans le cas discrèt, nous avons défini l'espérance d'une variable aléatoire discrète X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbf{P}(X = x_i).$$

Si X est une variable aléatoire continue ayant pour densité f, alors comme :

$$f(x) = P\{x \leq X \leq x + dx\} \texttt{ pour un } dx \texttt{ petit},$$

il est facile de voir que la définition analogue de l'espérance de X.

Définition 1.0.2. *Soit X une v.a.r. de densité f. On appelle espérance de X si elle existe, le réel :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt,$$

sous réserve de convergence absolue de cette intégrale.

Exemple 1.0.2. *Soit X de densité f définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{t^3 + t} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$$

Caculer l'espérence de X.

On peut vérifier que f est une densité : les conditions de positivité et de régularité (discontinuité en $t = 1$) sont clairement vérifiées. Le calcul de l'intégrale se fait par décomposition en éléments simples (on sait qu'elle converge, puisqu'en $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{\ln 2t^3}$) :
Soit $a \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{a} \frac{1}{t^3 + 1} dt &= \int_{-1}^{a} \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1} dt \\
&= \left[\ln t - \tfrac{1}{2} \ln(t^2 + 1)\right]_1^a \\
&= \ln\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) - \ln \tfrac{1}{2} \\
&\underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2.
\end{aligned}$$

Donc $\int_{-1}^{+\infty} f(t) dt = 1$. $\mathbb{E}(X)$ existe, puisque $t f(t)$ equivaut à $\dfrac{1}{\ln 2t^2}$ en $+\infty$, et vaut :

$$E(X) = \frac{1}{\ln 2} \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{\ln 2} \left[\arctan t\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4 \ln 2}$$

Pour l'espérance, on a les mêmes propriétés que dans le cas discret, mais elles sont délicates à démontrer sans faire appel à la théorie de la mesure ($\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X dP$). Par contre, on n'a plus de structure d'espace vectoriel : la somme de deux variables à densité n'est pas nécessairement une variable à densité (considérer $X - X$ par exemple). On donne donc sans démonstration les deux résultats suivants :

Propriété 1.0.3. *Soient X et Y deux v.a.r. à densité admettant une espérance, et soit λ un réel. Alors $X + \lambda Y$ admet une espérance, et :*

$$\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{E}(Y)$$

Théorème 1.0.1. *(Théorème de transfert)*
Soient X une v.a.r. de densité f et ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|\phi| f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors $\phi(X)$ possède une espérance, et :

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f(t) dt$$

Pour la variance et le moment d'ordre 2, on a aussi les mêmes définitions et les mêmes résultats que dans le cas discret :

Définition 1.0.3. *Soit X de densité f. On appelle moment d'ordre 2 l'espérance, si elle existe, de la variable X^2.*
C'est donc le réel, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt,$$

sous réserve de convergence de cette intégrale.

Propriété 1.0.4. *Si X possède un moment d'ordre 2, alors X possède une espérance.*

Preuve.
Identique au cas discret (écrire que pour tout réel x, $|x| \leq x^2 + 1$).

Définition 1.0.4. *Soit X de densité f. On appelle variance de X l'espérance, si elle existe, de la variable $(X - \mathbb{E}(X))^2$.*
En vertu du théorème de transfert, c'est le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx, \mathbb{V}$$

sous réserve de convergence de cette intégrale.

Comme dans le cas discret, l'existence du moment d'ordre 2 équivaut à celle de la variance, et le calcul effectif se fait souvent avec la formule de Koenig :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

On donne ensuite, comme dans le cas discret, les lois à densité usuelles au programme avec leurs principales caractéristiques.

1.1 Lois de probabilités absolument continues usuelles

1.1.1 Loi uniforme sur [a,b]

Définition 1.1.1. *X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ si elle a pour densité f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{si}}\ x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a} & \textbf{\textit{si}}\ x \in [a,b] \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}([a,b])$.

On obtient sans difficulté :

Propriété 1.1.1. *Sa fonction de répartition est la fonction :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{si}}\ x < a \\ \dfrac{1}{b-a}(x-a) & \textbf{\textit{si}}\ a \leq x \leq b \\ 1 & \textbf{\textit{si}}\ x > b \end{cases}$$

Ainsi que son espérance et sa variance :

Propriété 1.1.2.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \ \textbf{\textit{et}}\ \mathbb{V}(X) = \frac{(a+b)^2}{12}$$

1.1.2 Loi exponentielle

Définition 1.1.2. *Soit $\lambda > 0$. X suit la loi exponentielle de paramètre λ s'elle a pour densité :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{si}}\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \textbf{\textit{si}}\ x \geq 0 \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

f est bien une densité : on a directement par le calcul la convergence de $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt = 1$

Propriété 1.1.3. *Sa fonction de répartition est :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{si}}\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textbf{\textit{si}}\ x \geq 0 \end{cases}$$

En procédant par exemple à des intégrations par parties, on obtient l'espérance et la variance :

Propriété 1.1.4.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \ \textbf{\textit{et}}\ \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exemple 1.1.1. ***(Pratique)*** *On s'intéressait à l'arrivée de messages dans un réseau informatique. T_1 était le temps d'attente depuis l'instant initial, et pour $k \geq 2, T_k$ était le temps d'attente du k^{ieme} message depuis l'arrivée du $(k-1)^{ieme}$. L'hypothèse était que :*

$$\forall k \geq 1, T_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

1.1.3 Loi Normale (loi de Gauss)

C'est une loi fondamentale car elle apparaît comme "loi limite" dans de très nombreuses situations, en vertu du "Théorème Central Limite", que l'on abordera dans la suite de ce chapitre sur les convergences de suites de variables aléatoires.

Définition 1.1.3. *X suit la loi normale centrée réduite si elle a pour densité f définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note alors $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

On peut vérifier que f est bien une densité :
f étant paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Or c'est bien le cas puisque $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

On donne ici une façon très classique de calculer $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$;

On pose, pour $a > 0$: $I(a) = \int\limits_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, on a, par le théorème de Fubini :

$$(I(a))^2 = \left(\int\limits_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)\left(\int\limits_0^a e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right) = \iint\limits_{[0,a]^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

On ne peut pas passer facilement en coordonnées polaires puisqu'on intègre sur le carré $[0,a] \times [0,a]$. On va intégrer sur le quart de disque en posant :

$$D_a = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ /r \in [0,a]; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

On peut alors calculer,

$$J(a) = \iint\limits_{D_a} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \iint\limits_{[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta$$

En utilisant de nouveau le théorème de Fubini, on obtient :

$$J(a) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right)$$

On encadre ensuite $(I(a))^2$ par :

$$J(a) \leq (I(a))^2 \leq J(a\sqrt{2}).$$

En passant à la limite, par encadrement, $(I(a))^2 \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ et on a donc $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Conclusion

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Propriété.

$$\mathbb{E}(X) = 0 \;\; \textit{et} \;\; \mathbb{V}(X) = 1.$$

Preuve. L'existence de $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est assurée par le fait que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue et qu'en l'infini, $xf(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme elle est paire, on a bien :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

Pour la variance, l'existence de $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est assurée pour la même raison et le calcul se fait en intégrant par parties.

Remarque 1.1.1. Cela explique la notation $\mathcal{N}(0,1)$:0 est l'espérance de X et 1 est son écart-type.

Définition 1.1.4. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. X suit une loi normale de paramètre m et σ si elle a pour densité :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On note alors : $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$.

On se ramène à la loi normale centrée réduite grâce à la propriété suivante :

Propriété.

$$X \sim \mathcal{N}(m,\sigma) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve. Si X suit une loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$, alors pour tout réel y :

$$\mathbf{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq y\right) = \mathbf{P}\left(X \leq \sigma y + m\right) = \int_{-\infty}^{\sigma y+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

En posant $t = \dfrac{X-m}{\sigma}$, on obtient :

$$\mathbf{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq y\right) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

La variable $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ La réciproque se démontre de la même façon.

On en déduit l'espérance et la variance :

Propriété. *$X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$, alors $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.*

Preuve.

$$\begin{aligned} X \sim \mathcal{N}(m,\sigma) &\Rightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &\Rightarrow \begin{cases} E\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right) = 0 \\ V\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right) = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} E\left(X-m\right) = 0 \\ \frac{1}{\sigma^2} V\left(X\right) = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} E\left(X\right) = m \\ V\left(X\right) = \sigma^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsqu'on considère $\dfrac{X-m}{\sigma}$ on dit que l'on a centré et réduit X.

1.2 Convergence et Approximation des lois de Probabilités

1.2.1 Convergence en Loi

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_n la suite des fonctions de répartition correspondantes. Soit X une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_X sa fonction de répartition. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si, en tout point x de continuité de F_X, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F_X(x)$ et on note $X_n \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} X$.

Remarques.
1. Pour des variables discrètes à valeurs entières, la convergence en loi vers une variable discrète à valeurs entières s'exprime par

$$\forall k \in N, \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\ (X_n = k) = \mathbf{P}\ (X = k).$$

2. La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout couple de points a et b de continuité de F_X, nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(a \leq X_n \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b).$$

1.2.2 Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et X une variable aléatoire définie sur le même espace. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers X si, pour tout $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$.

Remarques.
1. La convergence en probabilité implique la convergence en loi.
2. La convergence en loi est la plus utilisée en pratique car elle permet d'approcher la fonction de répartition de X_n par celle de X lorsque n est "grand".

1.2.3 Théorèmes limites

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 1. Alors nous avons, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\epsilon}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2. Alors nous avons, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}ar(|X|)}{\epsilon}.$$

Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, deux à deux indépendantes, ayant une espérance μ et une variance σ^2.

Théorème de la limite centrée (ou théorème central-limite)

Théorème 1.2.1. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ayant une espérance μ et une variance σ^2.*
Posons $Y_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$. Alors la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.2.4 Approximations des lois

Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

Soit p est un élément de $]0,1[$, n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(N_m)_{m\geq 0}$ est une suite d'éléments de $[n,+\infty[$ telle que :

$$\lim_{m\to+\infty} N_m = +\infty \ \texttt{et} \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \ N_m p \in \mathbb{N}.$$

On considère une suite $(X_m)_{m\geq 0}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que pour tout m appartenant à $\mathbb{N}$, $X_m \rightsquigarrow H(N_m, n, p)$.

En pratique : La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ peut être approchée par la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque $N \geq 10n$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soit λ est un réel strictement positif. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit une loi binômiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$.

Alors la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Autrement dit pour tout élément k de $\mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

En pratique : La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque :

$$\begin{cases} p \ \leq 0,1 \\ n \geq 30 \\ np < 15 \end{cases}$$

ou lorsque d'autres conditions données par l'énoncé sont vérifiées. Attention, dans certains cas, l'astuce sera d'approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$ et non la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

$(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. On suppose que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$).

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

b) La suite $\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout réel x :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Remarque 1.2.1. Ce résultat théorique conduit dans la pratique à approximer une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Poisson de paramètre λ par une variable aléatoire réelle Y suivant une loi normale d'espérance λ et d'écart-type $\sqrt{\lambda}$ lorsque $\lambda > 10$.

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Soit $(Xn)n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0,1[$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Alors la suite $\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{nb(1-p)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

En pratique : La loi binomiale B(n,p) peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{n\mathbf{P}(1-p)})$ lorsque :

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 15 \\ n\mathbf{P}(1-p) > 5 \end{cases}$$

Remarques.
1) Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors la variable aléatoire X prend des valeurs entières positives entre 0 et n. Remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{n\mathbf{P}(1-p)})$ revient à considérer la variable aléatoire X comme une variable qui prend donc toutes les valeurs réelles.
L'intervalle $[k-0,5; k+0,5[$ est l'ensemble des nombres réels qui s'arrondissent à k, c'est-à-dire pour $k \in [1, n-1]$, nous remplacerons $\mathbf{P}(X=k)$ par $\mathbf{P}(k-0,5 \leq X < k+0,5)$.
2) Pour que la somme des valeurs approchées des $\mathbf{P}(X=k)$, k variant de 0 à n, soit égale à 1, nous remplacerons $\mathbf{P}(X=0)$ par $\mathbf{P}(X < 0,5)$ et $\mathbf{P}(X=n)$ par $\mathbf{P}(n-0,5 \leq X)$.

1.3 Travaux dirigès

Exercice 1.3.1. *Soit* $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. *Démontrer que :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0 \mathbf{P}(X > s + t / X > t) = \mathbf{P}(X > s)$$

Exercice 1.3.2. *Soit* X *une v.a.r continue avec une densité* f *et une fonction de répartition* F.

1) Démontrer que sa fonction de répartition F *est croissante.*

2) Démontrer qu'en tout point x_0 *où* f *est continue,* F *est dérivable et :*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Exercice 1.3.3.
Soit X *une v.a.r continue, avec la fonction de répartition*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ \frac{3}{5}(x+1) & si \quad -1 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 1 & si \quad \frac{2}{3} < x \end{cases}$$

Trouver la fonction de répartition de $Y = X^2$.

Exercice 1.3.4. ***I)*** *Dans chacun des cas suivants, déterminez la valeur de c afin que* f *et* g *soient des fonctions de densité.*

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & si \quad x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -c & si \quad 0 < x < 1 \\ c & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

II) *Déterminez une fonction de densite correspondante à chacune des fonctions de répartition suivantes :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ x - 1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+1} & si \quad x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exercice 1.3.5.
1. *Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(20,2)$. A l'aide de la table de la $\mathcal{N}(0,1)$, donner $\mathbf{P}(X > 21)$, $\mathbf{P}(17 \leq X)$ et $\mathbf{P}(18 \leq X < 20.5)$, puis déterminer x tel que $\mathbf{P}(20-x \leq X \leq 20+x) = 0.95)$.*
2. *Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$. Déterminer $\mathbf{P}(|X-m| > 2\sigma)$.*

Exercice 1.3.6.
Soit $a > 0$ fixé et X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$.
Déterminer b pour que $\mathbf{P}(b \leq X \leq b+a)$ soit maximale.

Exercice 1.3.7. *En France, la proportion des camping-cars par rapport à l'ensemble des véhicules est égale à $0,07$.*
1. *Soit X le nombre des camping-cars parmi 100 véhicules choisis au hasard sur un parking contenant 2000 véhicules. Calculez $\mathbf{P}(X \geq 5)$.*
2. *Soit Y le nombre de camping-cars parmi 1000 véhicules circulant sur le boulevard périphérique d'une grande ville à une heure d'affluence. Nous supposerons que $N \geq 20000$. Calculez $\mathbf{P}(65 \leq Y \leq 75)$.*
3. *Nous choisissons n véhicules au hasard. Déterminez pour quelle valeur de n nous pouvons affirmer que la proportion des camping-cars parmi ces n véhicules est comprise entre $0,06$ et $0,08$ avec un risque d'erreur inférieur à $0,05$.*

Bibliographie

[1] P. Bogaert. Probabilités pour scientifiques et ingénieurs, Introduction au calcul des probabilités, Edition de Boeck, **2005** .

[2] C. Degrave, D. Degrave. Précis de mathématiques, Probabilités-Statistiques 1ère et 2ème années, Cours, Méthodes, Exercices résolus, Edition Bréal, **2004**.

[3] J-P. Lecoutre, Statistique et probabilités. Manuel et exercices corrigés, Edition DUNOD, **2006**.

[4] M. Laurent, Cours de probabilités de l'ingénieur, exercices et problèmes corrigés,Hermann, **1998**.

[5] N. Bouleau, Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation, Hermann,**1986–2002**.

[6] Y. Sinai. Probability theory : an introductory course. Springer Verlag, 1992.