**Université ABDERAHMANE MIRA de Bejaia**

**Faculté des sciences économiques, commerciales et des sciences de gestion**

**Département des sciences économiques**

**Semestre : 4**

**Enseignant : Mr Kaci**

**Cours de mathématiques financières**

***Eléments du cours***

***Chapitre 1 : Les opérations financières à court terme***

***(Les intérêts simples)***

***SECTION 1 : Généralités sur les intérêts***

***SECTION 2 : L’escompte des effets de commerce***

***SECTION 3 : Le problème d’équivalence***

***Chapitre 2 : Les opérations financières à long terme***

***(Les intérêts composés)***

***SECTION 1 : la capitalisation***

***SECTION 2 : taux proportionnels et taux équivalents***

***SECTION3 : Calcul des intérêts***

***SECTION 4 : calcul de la valeur acquise lorsque la durée de placement est un nombre fractionnaire***

***SECTION 5 : L’actualisation***

***SECTION6 : L’équivalence à intérêts composés***

**Chapitre 1 : Les opérations financières à court terme**

**(Les intérêts simples)**

**SECTION 1 : Généralités sur les intérêts**

**1. Notion d’intérêt :**

L’intérêt est le loyer de l’argent. Il peut être une dépense ou un revenu.

- Il s’agit d’une dépense pour l’emprunteur, l’intérêt correspond à la rémunération du capital prêté ;

- Il s’agit d’un revenu pour le prêteur, l’intérêt est le revenu tiré du capital prêté.

Dans le cas de l’intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt, l’emprunteur doit verser à la fin de chaque période l’intérêt dû.

**2. Calcul de l’intérêt simple :**

* **Durée est exprimée en années.**

Soit : C : capital placé.

t : taux d’intérêt.

n : période de placement en année.

I : intérêt rapporté par le capital (C).

Alors l’intérêt est donné par :

 **I =**

* **Durée est exprimée en mois.**

 **I =**

* **Durée est exprimée en jours.**

 **I =**

* **Exemple :**

Quel est l’intérêt produit à intérêt simple par un placement d’une somme d’argent de 12.500 DA au taux de 10,5% pendant 96 jours.

**I =**

**I = =**350

**3. La valeur acquise** :

La valeur acquise du capital après « n » périodes de placement est la somme du capital et des intérêts gagnés. Si nous désignons par (Va) la valeur acquise alors :

**Va = C + I**

**4. Taux moyen d’une série de placements simultanément.**

On a une personne qui effectue simultanément les placements C1, C2,…Ck aux taux respectifs t1, t2,…tk pour les durées respectives n1, n2,…nk.

L’intérêt total **It = +…………………+ ……..①**

On appelle taux moyen de cet ensemble de placement le taux unique **T** qui, appliqué aux capitaux placés et pour leurs durées respectives, conduirait au même intérêt total.

**It = +…………………+ …….. ②**

**①=②T =**

* **Exemple**

Un individu effectue 3 placements de manière simultanée aux conditions suivantes :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **C** | **t** | n |
| 1850 | 9% | 137 |
| 4285 | 7% | 115 |
| 5300 | 10% | 48 |

Calculer le taux moyen.

**T = T =**

 **T = 8,27%**

**5. Intérêt précompte**

Jusque la nous avons vu que le paiement des intérêts par l’emprunteur se faisait a terme échu c'est-a-dire le jour du remboursement du capital emprunté. Toutefois, il est de mise de rencontrer des paiements d’intérêts qui s’effectuent au moment de la conclusion du contrat c'est-a-dire le jour de l’octroi de la somme d’argent. Les fonds engages dans ce cas procurent au prêteur un taux de placement supérieur au taux annonce qui sert de calcul de l’intérêt. Ce taux de placement supérieur est encore appelé taux de placement effectif (***ie)***.

− Intérêt produit : *C x i x d* (*d* étant égal à *n/360, n/12* ou *n* et *i* égal à *t/100*)

− Capital engage pour le prêteur : *C – C x i x d*

− Taux effectif consiste a mettre en égalité: C *x i x d = (C – C x i x d) x ie x d*

Il revient que *ie = (C x i x d)/(C – C x i x d) x d*

***ie = i/ (1 – i.d)***

De cette égalité on peut déduire que :

***i = ie/ (1 + ie.d)***

**SECTION 2 : L’escompte des effets de commerce**

**1. Notion d’effets de commerce**

Pour formaliser le paiement à l’échéance, le vendeur peut exiger que sa créance soit matérialisée par un document appelé **effet de commerce**. On retient ici deux sortes d’effets de commerce : *le billet à ordre et la lettre de change.*

* **Le billet a ordre.**

C’est une promesse écrite (reconnaissance de dette) par l’emprunteur au préteur qu’il remboursera à la valeur acquise à la date indiquée lors de la contraction du prêt.

* **La lettre de change.**

C’est une lettre rédigée par le préteur sur laquelle l’emprunteur signe. C’est la preuve qu’il reconnait devoir rembourser à échéance la valeur acquise.

Le montant de la créance qui n’est autre que la valeur acquise est encore appelé *valeur nominale* de l’effet. La date de paiement est encore appelée *la date* *d’échéance.*

En résumé, un effet de commerce (lettre de change, billet à ordre) constate l’engagement pris par un débiteur de payer à son créancier à une date déterminée une somme d’argent (montant de la dette qu’il a contractée).

**2. Définition de l’escompte commercial**

Deux possibilités s’offre au bénéficiaire d’un effet de commerce.

- Il peut le conserver jusqu’à l’échéance, puis le remettre à sa banque pour encaissement. Dans ce cas, l’effet n’est qu’un simple moyen de paiement.

- Il peut également le remettre à sa banque avant l’échancre et en demander l’**escompte**. Si l’établissement de crédit accepte, il paie au bénéficiaire le montant de l’effet diminué des intérêts et commissions constituant la rémunération de la banque.

L’escompte est donc l’opération par laquelle un banquier met à la disposition d’un client le montant d’un effet de commerce avant son échéance sous déduction de l’intérêt.

**3. Calcul de l’escompte commercial**

Soit V la valeur nominale de l’effet, valeur inscrite sur l’effet et payable à échéance.

Soit N la durée qui sépare la date de négociation (le jour de la remise de l’effet à l’escompte) et l’échéance de l’effet.

Soit t le taux d’escompte.

Donc, l’escompte commercial s’écrit comme suit : *e =*

* **Valeur actuelle commerciale.**

**Vc = V - e**

* **Exemple :**

Combien un banquier remettra-t-il à son client s’il lui escompte un effet de 100.000 DA payable dans 83 jours, en sachant que le taux égal à 9%.

**Solution :**

V = 100.000

N = 9

t = 83.

Donc, *e =*  ***=*** 2.075

Donc, Vc = V – e = 100.000 – 2.075 = 97.925

**4. L’agio.**

Nous avons suppose jusqu’a présent que la retenue effectuée par un préteur se bornait a l’escompte. En réalité, le préteur opère d’autres retenues sur la valeur nominale d’un effet. L’ensemble des retenues constitue l’agio. Il s’agit de :

− L’escompte commercial

− Les différentes commissions

− La T.V.A

* **Les commissions**

On retient deux sortes de commissions, celles proportionnelles au temps et celles non proportionnelles au temps.

***Commissions proportionnelles au temps.***

Elles se calculent sur les mêmes bases que l’escompte proportionnellement a la valeur nominale de l’effet escompte, de la durée qui sépare la date de négociation, de la date de l’échéance de l’effet et du taux attache a ces commissions. Ces dernières ne sont pas soumises a la TVA. Exemple : endos.

***Commissions indépendantes du temps*.**

Elles sont seulement proportionnelles au capital c'est-a-dire à la valeur nominale de l’effet. Elles peuvent aussi être fixe donc indépendantes au nominal de l’effet et du nombre de jours restant à courir. Elles sont hors taxe donc soumises à la TVA.

Exemple : commissions de services, commissions d’acceptation, commission de sort.

* **La T.V.A**

Elle s’applique à toutes les commissions sauf aux commissions d’endos.

* **La valeur nette**

La valeur nette est la valeur effectivement reçue par le vendeur de l’effet.

**Vnette = V – agio**

* **Taux réel d’escompte**

Encore appelé taux de l’agio, c’est le taux unique **t** qui, applique a une valeur nominale pour une certaine durée, donnera un agio identique a celui résultant de la décomposition de l’agio. Ce taux doit satisfaire à l’égalité suivante :

Agio = (V x t x n) /36000→ **t = agio** x36000 **/ (Vx n)**

* **Taux de revient de l’opération d’escompte**

On a pu noter que l’opération d’escompte était une opération d’intérêt précompte. Le porteur de l’effet remis à l’escompte supporte un agio pour un certain montant. Le taux de revient de l’opération d’escompte doit satisfaire l’égalité suivante :

Agio = (Vnette x tr xn) /36000 → **tr = agio** x36000 **/ (Vnette x n)**

**SECTION 3 : Le problème d’équivalence**

**1. L’équivalence de deux effets :**

Deux effets sont équivalents à une date déterminée, si escomptés en même temps, ils ont la même valeur actuelle. Cette date est la date d’équivalence.

V1, V2 = valeurs nominales des deux effets.

n1, n2 = Durée d’escompte en jour.

t = Taux d’escompte.

Donc ; V1 – e1 = V2 – e2.

V1–  **=** V2 –

* **Exemple :**

On désir remplacer un effet d’une valeur nominale de 75.000 dirhams payable dans 60 jours par un autre effet de valeur nominale de 74.600 dirhams. Quelle sera l’échéance de cet effet en sachant que le taux d’escompte est de 13% ?

**Solution :**

On a pour l’effet 1 : V1 = 75.000 et n1 = 60 jours.

On a pour l’effet 2 : V2 = 74.600 et n2 = ?

On sait que : V1–  **=** V2 –

Donc 75.000 –  **=** 74.600 –

Donc, n2 = 46 jours.

**2. L’équivalence de plusieurs effets : échéance commune :**

L’échéance commune est le cas de remplacement de plusieurs effets par un seul effet.

L’échéance commune est l’échéance d’un effet unique qui, à la date d’équivalence, a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

* **Exemple :**

On souhaite remplacer le 15 juin les trois effets ci-dessous par un effet unique.

E1 : V1 = 5.000 échéance = 20 août

E2 : V2 = 4.000 échéance = 15 juillet

E3 : V3 = 12.000 échéance = 20 septembre.

Quelle est l’échéance de l’effet de 21.200 DA remplaçant les effets E1, E2 et E3 avec un taux d’escompte de 13%.

* **Solution :**

On sait que : V–  **=** V1–  **+** V2 – **+** V3 –

Donc 21.200 –  **=** 5.000 – **+**4.000 – **+**12.000 –

21.200 – 7,6555 N = 3.956,67 + 4.880,83 + 11.579,67.

 N = 103 jours.

L’échéance commune se situera le 15/06 + 103 soit le 26/09.

**3. L’échéance moyenne :**

L’échéance moyenne de plusieurs effets est un cas particulier de l’échéance commune. On l’obtient lorsque le nominal de l’effet unique est égal à la somme des valeurs nominales des différents effets remplacés.

V–  **=** V1–  **+** V2 – **+** V3 –

On a : V = V1 + V2 + V3.

Donc, (V1 + V2 + V3) –  **=** V1–  **+** V2 – **+** V3 –

**N =**

**Chapitre 2 : Les opérations financières à long terme**

**(Les intérêts composés)**

**SECTION 1 : La capitalisation**

On dit qu’un capital est placé à intérêt composé lorsqu’à la fin de la première période, l’intérêt simple de la première période est ajouté au capital, on parle alors de capitalisation des intérêts.

La capitalisation des intérêts est généralement annuelle, mais elle peut être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

**1. La valeur acquise**

Posons : C0 : le capital initial

 N : durée

 i = **:** le taux d’intérêt

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Période | Capital placé endébut de période | Intérêts payés en fin depériode | Valeur acquise en finde période. |
| 1 | C0 | C0 i | C0 + (C0i) = C0(1+i) |
| 1 | C1 = C0(1+i) | C1i = [C0(1+i)]i. | C1+(C1i) = C0(1+i)2 |

Donc, en générale la valeur acquise après n période est :

**Cn = C0(1 + i)n.**

* **Exemple :**

Calculer la valeur acquise d’un capital de 100.000 DA placé pendant 6 ans à 8% l’an

(Capitalisation annuelle).

* **Solution :**

Cn = C0 (1 + i)n.

= 100.000 (1 + 0,08)6.

= 158.687,43 DA.

**2. Calcul du taux :**

On sait que Cn = C0(1 + i)n

Donc  **=** (1 + i)n = 1 + i

 **i = -1**

* **Exemple**

On place 250.000 dirhams au bout de 5 ans, on se retrouve avec une valeur acquise de 340.000 DA. Trouver le taux de capitalisation annuelle.

* **Solution**

On a **i = -1**

 **i = -1**

 **i =** 0,063427 (taux = 6,34% l’an).

**3. Calcul de la durée :**

On sait que Cn = C0(1 + i)n

Donc  **=** (1 + i)n = n

 **n =**

* **Exemple**

Au bout de combien d’années un capital de 2000DA placé au taux annuel de 12,5% aurait-il acquis la valeur de 5131,57

* **Solution**

On a **n =**

 **n = n = 8 ans**

**SECTION 2 : Taux proportionnels et taux équivalents**

**1. Taux proportionnels** :

Deux taux sont dits proportionnels si le rapport des deux taux est egal au rapport de leurs périodes de capitalisation

En effet, si i est un taux annuel donc :

 is =  : taux semestriel proportionnel

it = : taux trimestriel proportionnel

im = : taux mensuel proportionnel

* **Exemple**

Calculer la valeur acquise par un capital de 9000DA, place au taux annuel de 12% dans le cas où la capitalisation est trimestrielle et pour une période de 3 ans

* **Solution**

**On a** it = it = 3%

Dans la mesure où une durée de 3 ans contient 12 trimestres donc la valeur acquise est **C12 = C0(1 + it)6**

 **C12 = 9000(1,** 03**)12**= 12831,84

**2. Taux équivalents :**

Deux taux sont équivalents lorsqu’à intérêt composé, ils aboutissent pour un même capital à la même valeur acquise pendant la même durée de placement.

***Taux semestriel équivalent*** *(is)*

Pour une année et lorsque la capitalisation est annuelle **C1 = C0(1 + i)1**……….①

Pour la même durée si la capitalisation est semestrielle **C1 = C0(1 + is)2**………②

①=②**(1 + i)1** = **(1 + is)2**

 **is** = - 1

***Taux trimestriel équivalent*** *(it)*

Pour une année et lorsque la capitalisation est annuelle **C1 = C0(1 + i)1**……….①

Pour la même durée si la capitalisation est trimestrielle **C1 = C0(1 + it)4**………②

①=②**(1 + i)1** = **(1 + it)4**

 **it** = - 1

***Taux mensuel équivalent*** *(im)*

 **Im** = - 1

* **Exemple**

Calculer la valeur acquise par un capital de 8000DA, place au taux annuel de 8% dans le cas où la capitalisation est semestrielle et pour une période de 3 ans

* **Solution**

On a **is** = - 1 **is** = - 1 **is** = 0, 0392304

Dans la mesure où une durée de 3 ans contient 6 semestres donc la valeur acquise est

**C6 = C0(1 + is)6**

 **C6 = 8000(1,** 0392304**)6**= 10077,69

**SECTION3 : Calcul des intérêts**

**1. L’intérêt total (I)**

I = **Cn - C0**

I = **C0(1 + i)n - C0**

 I = **C0[(1 + i)n - 1]**

**2. Les intérêts annuels**

I1 = **C1 - C0** = **C0(1 + i)1 - C0**

I1 = **C0 i**

I2 = **C2 – C1** = **C0(1 + i)2 - C0(1 + i)1** = **C0(1 + i) [(1 + i) - 1]**

I2 = **C0(1 + i) i**

I3 = **C3 – C2** = **C0(1 + i)3 - C0(1 + i)2** = **C0(1 + i)2 [(1 + i) - 1]**

I3 = **C0(1 + i)2 i**

 Cas général **In = C0(1 + i)n-1 i**

* **Exemple**

Un capital d’une valeur de 30.000 DA a été placé pendant 6 ans et au taux annuel de 8%. Calculer les intérêts produits au cours de la 4ème année

* **Solution**

On a **I4 = C0(1 + i)3 i**

 **I4 =** 30.000 **(1,08)3 0,08 = 3023,30**

**SECTION 4 : calcul de la valeur acquise lorsque la durée de placement est un nombre fractionnaire**

Comment peut-on calculer la valeur acquise d’un capital **C0** placé pendant une période de k ans et p mois et au taux annuel de i%.

**1. Solution rationnelle :**

On utilise la formule générale pour la partie entière (k) et les intérêts simples pour la partie fractionnaire (p)

**Donc**  = **C0 (1 + i) k + [C0 (1 + i) k i ]**

 **C0 (1 + i) k [1 + i ]**

Dans ce cas, on considère que la valeur acquise au bout de k ans reste placée à intérêt simple pendant p mois.

**2. Solution commerciale**

Dans ce cas, on généralise la formule des intérêts composés au cas où « n » n’est pas un nombre entier de périodes.

La formule est la suivante :  **=**

**SECTION 5 : L’actualisation**

La valeur actuelle est la somme qu’il faut placer maintenant à intérêt composé pour obtenir « Cn » après « n » période de placement. C’est le processus inverse de la capitalisation qui s’appelle actualisation.

**C0 = Cn (1 + i)-n.**

La notion d’actualisation connait une grande application dans le calcul de la rentabilité des investissements

* **Exemple**

Un projet a un coût d’investissement de 125.000 DA, sa durée est de trois ans et les recettes prévues sont :

1ère année : 40.000 DA

2ème année : 50.000 DA

3ème année : 60.000 DA

Ce projet est-il rentable financièrement au taux d’actualisation de 10% ?

* **Solution**

Pour répondre à cette question on doit comparer les dépenses totales aux recettes totales actualisées.

* Les dépenses totales s’élèvent à 125.000 DA

Les recettes totales s’élèvent à 40.000 (1,1) -1 + 50.000(1,1) -2 + 60.000 (1,1) -3 = 122764,81

Les dépenses sont supérieures aux recettes, donc le projet n’est pas rentable. Dans ces conditions, il est préférable d’effectuer un placement.

**SECTION 6 : L’équivalence à intérêts composés**

**1. Equivalence de deux capitaux**

Deux capitaux (C1 et C2)payables respectivement dans n1 et n2 sont dits equivalents un jour donné lorsqu’ils ont à cette date la meme valeur actuelle

C1  C2

**C1 (1 + i)-** n1 = **C2 (1 + i)-** n2

 **C2 = C1 (1 + i) n2 - n1**

**2. Equivalence d’un capital avec un ensemble de capitaux**

Un capital C, payable dans n, est équivalent à un ensemble de capitaux (C1, C2……Ck), payables respectivement dans n1, n2……. nk, un jour donné si la valeur actuelle du capital C est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux

C(C1+ C2+……+Ck)

**C (1 + i)-** n **= C1 (1 + i)-** n1 + **C2 (1 + i)-** n2 **+……….+Ck (1 + i)-** nk

 **C= C1 (1 + i) n -**  n1 **+ C2 (1 + i) n -**  n2 **+ ………..+ CK (1 + i) n -**  nk

* **Exemple**

Régler par un seul paiement dans 3 ans les dettes suivantes :

50.000 DA exigibles dans 26 mois

20.000 DA exigibles dans 3 ans

20.000 DA exigibles dans 5 ans

Le taux annuel est de 5%.

* **Solution**

C1 = 50.000 DA , n1 = 26 mois

C2 = 20.000 DA, n1 = 3 ans

C3 = 20.000 DA, n1 = 5 ans

N = 3 ans et i = 5%

**On a** C(C1+ C2+C3)

**C (1, 05)-** n **= C1 (1, 05)-** n1 + **C2 (1, 05)-** n2**+Ck (1, 05)-** n3

**C (1, 05)-** 3 **=** + **20.000 (1, 05)-** 3**+ 20.000 (1, 05)-** 5

**C =** + **20.000 (1, 05)0+ 20.000 (1, 05)-** 2

**C =** + **20.000 + 20.000 (1, 05)-** 2

**C = 90215,4**

**3. L’échéance commune**

Même principe par rapport au cas de l’équivalence d’un capital avec un ensemble de capitaux, seulement dans ce cas il s’agit de déterminer l’échéance du capital C alors que sa valeur nominale étant fixée

On a C(C1+ C2+……+Ck)

 **C (1 + i)-** n **= C1 (1 + i)-** n1 + **C2 (1 + i)-** n2 **+……….+Ck (1 + i)-** nk

Posons [**C1 (1 + i)-** n1 + **C2 (1 + i)-** n2 **+……….+Ck (1 + i)-** nk] = α

**(1 + i)-** n =

 =

* **Exemple**

**Soient** C1 = 100.000 DA à échéance 2 ans,C2 =182804 DA à échéance 9 ans. On desire remplacer ces deux capitaux par un seul capital C d’une valeur de 228810 DA. Determiner l’échéance de cecapital si le taux d’interet est de 7%.

* **Solution**

On a C(C1+ C2)

 **C (1 + i)-** n **= C1 (1 + i)-** n1 + **C2 (1 + i)-** n2

 **228810 (1, 07)-** n **=** 100.000 **(1, 07)-** 2 + 182804 **(1, 07)-** 9

 **(1, 07)-** n **= [**100.000 **(1, 07)-** 2 + 182804 **(1, 07)-** 9] **/228810**

 En utilisant log, on obtient n = 3

**3. L’échéance moyenne**

Il s’agit de remplacer plusieurs capitaux (C1, C2……Ck) payables respectivement dans n1, n2……. nk par un seul capital C dont la valeur nominale égale à **(**C1+ C2+……+Ck)

 Quelle est l’échéance de ce capital?

On a C(C1+ C2+……+Ck)

 **C (1 + i)-** n **= C1 (1 + i)-** n1 + **C2 (1 + i)-** n2 **+……….+Ck (1 + i)-** nk

Posons [**C1 (1 + i)-** n1 + **C2 (1 + i)-** n2 **+……….+Ck (1 + i)-** nk] = α

**(1 + i)-** n =

 =

Reprenons l’exemple de l’element 2 et calculons l’echeance moyenne des trios dettes

On a : i = 5%

C1 = 50.000 DA , n1 = 26 mois

C2 = 20.000 DA, n1 = 3 ans

C3 = 20.000 DA, n1 = 5 ans

C= C1+ C2+C3 = 90.000 DA

n =?

**On a** C(C1+ C2+C3)

**C (1, 05)-** n **= C1 (1, 05)-** n1 + **C2 (1, 05)-** n2**+Ck (1, 05)-** n3

**90.000 (1, 05)-** n **=** + **20.000 (1, 05)-** 3**+ 20.000 (1, 05)-** 5

 En utilisant log, on obtient n = 2,9513