Maths 04

Université A.MIRA — Béjaïa
Faculté de Technologie
Département de Technologie-2$^{\text{ème}}$ Année

® 2012–2013

♣— Examen de Remplacement en Probabilités et Statistiques —♣

Exercice 1 (08.00 points) : Une enquête a été réalisée sur le nombre de salariés de 40 entreprises industrielles. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Nombres de salariés	n_i	f_i	$F_i \nearrow$
$[20, 40[$	.	0.2	.
$[40, 50[$	.	0.2	.
$[50, 60[$	.	.	0.7
$[60, 80[$	.	.	0.9
$[80, 100[$	.	.	1
Total	.	1	/

1. Compléter le tableau statistique ci-dessus.
2. Définir la population étudiée sa taille, l'unité statistique, le caractère et sa nature.
3. Représenter le polygône des fréquences et calculer le mode.
4. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
5. Calculer la moyenne, la médiane, l'écart type et l'intervalle interquartile.
6. Déterminer le nombre d'entreprises ayant un nombre de salariés entre 50 et 70.

Exercice 2 : Soit la distribution conjointe suivante entre deux variables X et Y.

X/Y	[0,10[	[10,20[	[20,30[	$f_{i\bullet}$
0				0.3
1				
2				0.2
$f_{\bullet j}$	0.1		0.5	

1. Compléter le tableau ci-dessus en supposant que les deux variables sont indépendantes. Représenter le nuage de points.
2. Déterminer les distributions de $Y/0 \leq X \leq 2$; $X/Y \in [0, 30[$ et $X/Y \in [0, 10[$. Calculer leurs moyennes et leurs variances.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y.
4. Donner le coefficient de corrélation linéaire. Conclure.

Exercice 3 (08.00 points) : Le tableau suivant donne la demande Y d'un produit en fonction de son prix de vente X en Dinars :

Le prix de vente en Dinar X	200	250	300	350	450	500
La demande Y	550	430	400	310	260	210

1. Représenter le nuage de points (X, Y) ainsi que le centre de gravité.
2. On pose $z_i = \frac{y_i - 10}{100}$. Calculer $\overline{Z}$, $V(Z)$ et déduire $\overline{Y}$ et $V(Y)$.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Z.
4. Considérons la série $(z_i)_{i=\overline{1,6}}$ de Médiane Me.
   - ▹ Partager le nuage de points en deux sous-nuages : l'un contient les points (x_i, z_i) tel que $z_i < Me$, l'autre contient les points (x_i, z_i) tel que $z_i > Me$.
   - ▹ Calculer les points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces deux nuages respectivement.
   - ▹ Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points G_1 et G_2. Tracer cette droite sur le graphe.
5. Quelle serait la demande sur le nouveau produit si le prix de vente est de 600 Dinars ?

Bonne chance
Mr Boualem

Corrigé de l'examen Maths B4
2012 – 2013

(08.00 pts)

Exo1 : On étudie le Nombre de salariés de 40 entreprises.

1) Compléter le tableau :

$F_i\downarrow$	Classes	n_i	f_i	$F_i\uparrow$	a_i	f_i^c	x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
1	[20, 40[	8	0,2	0,2	20	0,1	30	240	7200
0,8	[40, 50[	8	0,2	0,4	10	0,2	45	360	16200
0,6	[50, 60[	12	0,3	0,7	10	0,3	55	660	36300
0,3	[60, 80[	8	0,2	0,9	20	0,1	70	560	39200
0,1	[80, 100[	4	0,1	1	20	0,05	90	360	32400
0	Total	40	1	/	/	/	/	2180	131300

$f_i^c = \dfrac{f_i}{a_i} \times a$

$a = PGCD(a_i)$

$= PGCD(10, 20)$ (1)

$= 10$

2) Population : Les entreprises (1)

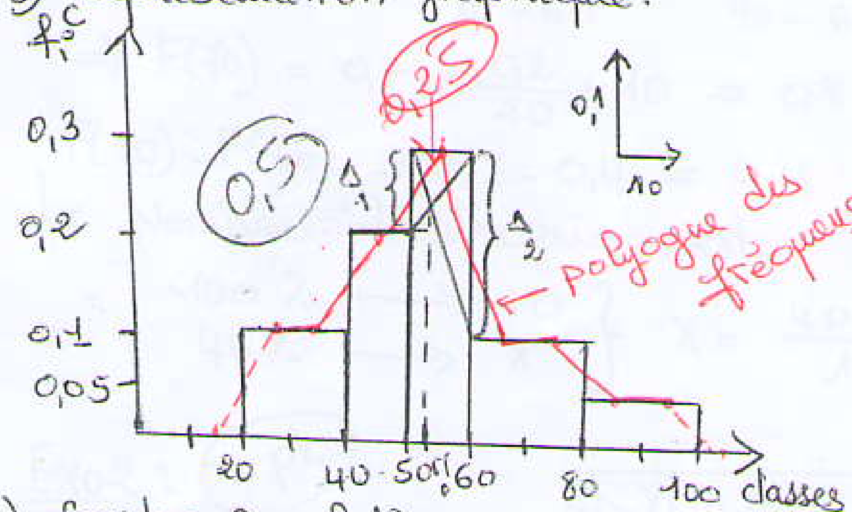
Taille : 40

Unité statistique : Une entreprise

Caractère : Nombre de salariés

Nature : Quantitative Continue.

3) Représentation graphique :



Mode : la classe Modale [50, 60[

$\Delta_1 = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

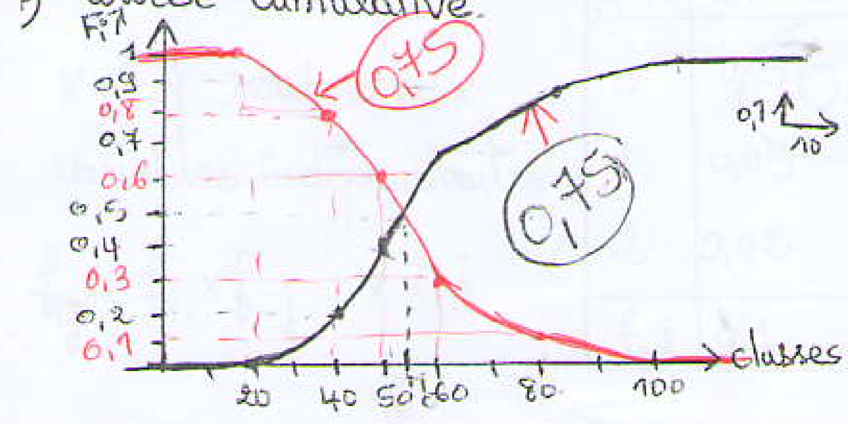
$\Delta_2 = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$ (0,5)

$M_o = e_{i-1} + a_i \dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$

$= 50 + 10 \dfrac{0{,}1}{0{,}1 + 0{,}2} = 53{,}33$

$\boxed{M_o = 53{,}33}$

4) Courbe Cumulative.



Médiane : la classe médiane est [50, 60[(0,5)

$M_e = e_{i-1} + \dfrac{a_i}{f_i}(0{,}5 - F(e_{i-1})\uparrow)$

$= 50 + \dfrac{10}{0{,}3}(0{,}5 - 0{,}4)$

$= 53{,}33$

Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = \frac{1}{40}(2180) = 54,5$

Variance : $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{40}(131300) - (54,5)^2 = 312,25$

Ecart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{312,25} = 17,67$ 0,75

Intervale inter-quartile.

- $F(Q_1) = 0,25 \Rightarrow Q_1 \in [40,50[$ $Q_1 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i}(0,25 - F(e_{i-1}))$

$Q_1 = 40 + \frac{10}{0,2}(0,25 - 0,2) = 42,5$ 0,5

- $F(Q_3) = 0,75 \Rightarrow Q_3 \in [60,80[$. $Q_3 = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i}(0,75 - F(e_{i-1}))$.

$Q_3 = 60 + \frac{20}{0,2}(0,75 - 0,7) = 65$. 0,5

$Q_3 - Q_1 = 65 - 42,5 = 22,5$ 0,25

6) Nombre d'entreprise ayant un nombre de salariés dans $[50,70[$

$F(70) - F(50) = ?$

$F(50) = 0,4$.

$F(70) = ? \Leftrightarrow \frac{0,9 - 0,7}{80 - 60} = \frac{F(70) - 0,7}{70 - 60} \Rightarrow \frac{0,2}{20} = \frac{F(70) - 0,7}{10}$

$\Rightarrow F(70) = 0,7 + \frac{0,2}{20} \times 10 = 0,8$

$F(70) - F(50) = 0,8 - 0,4 = 0,4$. donc il y'a 40 % 0,75

Le Nombre d'entreprise est :

$\left.\begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 40 \\ 40\% \longrightarrow X \end{array}\right\} X = \frac{40 \times 40}{100} = 16$ entreprises

Exo2 : 04 pts

X et Y sont deux variables indépendantes

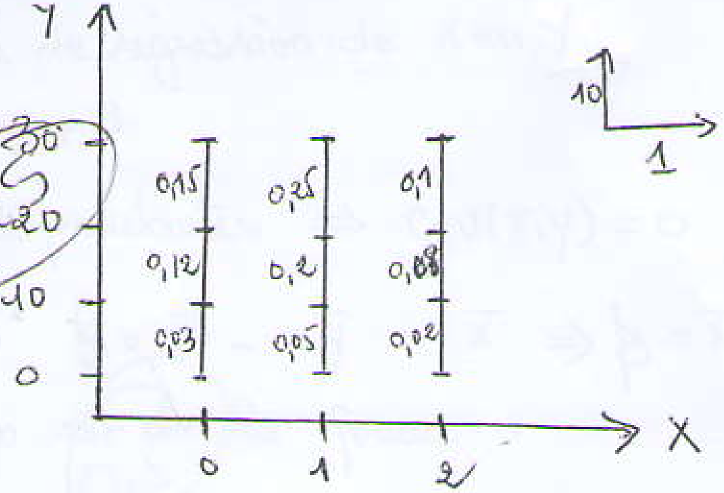
$f_{ij} = f_{i.} \times f_{.j} \quad \forall i,j$

X \ Y	[0,10[	[10,20[	[20,30[	$f_{i.}$
0	0,03	0,12	0,15	0,3
1	0,05	0,2	0,25	0,5
2	0,02	0,08	0,1	0,2
$f_{.j}$	0,1	0,4	0,5	1

0,5

age de points

0,25



2) Distribution : $Y / 0 \leq X \leq 2$

classes Y	y_j	$f_{.j}$	$f_{.j} y_j$	$f_{.j} y_j^2$
[0,10[	5	0,1	0,5	2,5
[10,20[	15	0,4	6	90
[20,30[	25	0,5	12,5	312,5
Total	\	1	19	405

Distribution Marginale selon Y.

Moyenne :

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{3} n_{.j} y_j = \sum_{j=1}^{3} f_{.j} y_j = 19$$

Variance :

0,75

$$V(Y) = \sum_{j=1}^{3} f_{.j} y_j^2 - \overline{Y}^2$$

$$= 405 - (19)^2 = 44$$

Distribution $X / Y \in [0,30[$:

X	$f_{i.}$	$f_{i.} x_i$	$f_{i.} x_i^2$
0	0,3	0	0
1	0,5	0,5	0,5
2	0,2	0,4	0,8
Total	01	0,9	1,3

Distribution Marginale selon X.

Moyenne :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} n_{i.} x_i = \sum_{i=1}^{3} f_{i.} x_i = 0,9$$

Variance :

0,75

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} f_{i.} x_i^2 - \overline{X}^2$$

$$= 1.3 - (0,9)^2 = 0,49$$

Distribution $X / Y \in [0,10[\equiv X_1$

X	f_{i1}	$f_{i1}/f_{.1}$	$f_{i1}/f_{.1}\, x_i$	$f_{i1}/f_{.1}\, x_i^2$
0	0,03	0,3	0	0
1	0,05	0,5	0,5	0,5
2	0,02	0,2	0,4	0,8
Total	0,1	1	0,9	1,3

Moyenne :

0,75

$$\overline{X_1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{f_{i1}}{f_{.1}} x_i = 0,9$$

Variance :

$$V(X_1) = \sum_{i=1}^{3} \frac{f_{i1}}{f_{.1}} x_i^2 - \overline{X_1}^2$$

$$= 1,3 - (0,9)^2 = 0,49$$

quation de la droite de régression : de X en Y

$$X = \alpha Y + \beta$$

Puisque X et Y sont indépendantes $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

$\alpha = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = 0 \Rightarrow \beta = \bar{X} - \alpha \bar{Y} = \bar{X} \Rightarrow \beta = \bar{X} = 0,9$

La droite de régression est de la forme. 0,5

$$\boxed{X = 0,9}$$

4) Coeffecient de corrélation :

$Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$ 0,5 $\Rightarrow$ Il y'a absence de corrélation linéaire entre X et Y.

Exo 3 : 08 pts

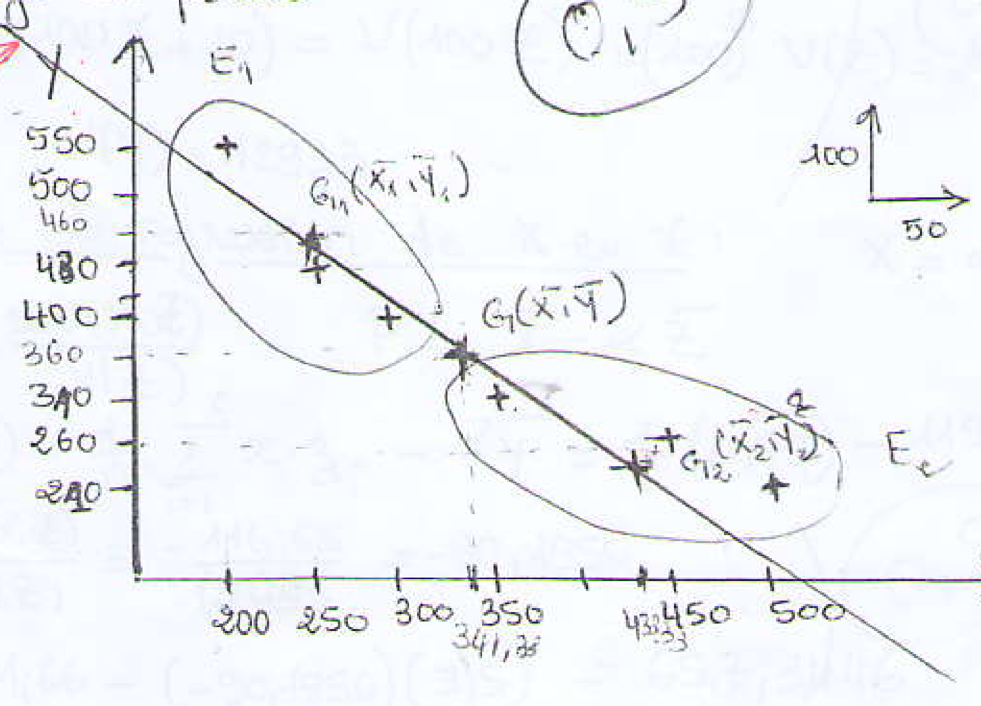
X représente

Y représente

x_i	200	250	300	350	450	500
y_i	550	430	400	310	260	210

1) Le nuage de points. 0,5

0,25



Centre de gravité $G(\bar{X}, \bar{Y}) = (341{,}66\ , 360)$.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(2050) = 341{,}66$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{1}{6}(2160) = 360$$

0,5

0,5

2) On pose $z_i = \dfrac{y_i - 10}{100}$

x_i	200	250	300	350	450	500
y_i	550	430	400	310	260	210
z_i	5,4	4,2	3,9	3	2,5	2

0,25

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{6}(21) = 3{,}5$$

$$V(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \bar{Z}^2 = \frac{1}{6}(81{,}26) - (3{,}5)^2 = 1{,}2933$$

0,5

Déduire $\bar{Y}$ et $V(Y)$:

$$z_i = \frac{y_i - 10}{100} \Rightarrow y_i = 100 z_i + 10 \Leftrightarrow Y = 100Z + 10$$

$$\bar{Y} = 100\bar{Z} + 10 = 100(3{,}5) + 10 = 360$$

$$V(Y) = V(100Z + 10) = V(100Z) = (100)^2 V(Z) = 10000(1{,}2933)$$

$$V(Y) = 12933$$

0,5

3) Droite de regression de X en Z : $X = \alpha Z + \beta$

$$\alpha = \frac{cov(X, Z)}{V(Z)} \qquad \beta = \bar{X} - \alpha\bar{Z}$$

$$Cov(X, Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i z_i - \bar{X}\bar{Y} = \frac{1}{6}(6475) - 1195{,}81 = -116{,}65$$

0,5

$$\alpha = \frac{Cov(X, Z)}{V(Z)} = -\frac{116{,}65}{1{,}2933} = -90{,}1956$$

$$\beta = 341{,}66 - (-90{,}1956)(3{,}5) = 657{,}3446$$

0,5

La forme de la droite de régression est

$$X = -90{,}1956\, Z + 657{,}3446. \quad 0{,}25$$

4) On considère la série $(z_i)_{i=\overline{1,6}}$ de Mediane M_e.

•) La Mediane M_e : $\quad n = 6 = 2\times 3 \Rightarrow p = 3$

$$M_e = \frac{x_p + x_{p+1}}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{3{,}9+3}{2} = 3{,}45. \quad 0{,}5$$

•) On partage le nuage de points en deux sous groupes

$$E_1 = \{(200, 5.4), (250, 4.2), (300, 3.9)\}$$
$$E_2 = \{(350, 3), (450, 2.5), (500, 2)\} \quad 0{,}5$$

•) Les Deux points moyens G_1 et G_2 :

$$G_1 = \begin{cases} \bar{X}_1 = \frac{1}{3}(200+250+300) = 250 \\ \bar{Z}_1 = \frac{1}{3}(5.4+4.2+3.9) = 4.5 \end{cases} \quad 0{,}5 \quad G_1(\bar{X}_1, \bar{Z}_1) = (250, 4.5)$$

$$G_2 = \begin{cases} \bar{X}_2 = \frac{1}{3}(350+450+500) = 433{,}33 \\ \bar{Z}_2 = \frac{1}{3}(3+2.5+2) = 2.5 \end{cases} \quad 0{,}5 \quad G_2(\bar{X}_2, \bar{Z}_2) = (433{,}33, 2.5).$$

•) La Droite qui passe par G_1 et G_2 : (Droite de Mayer)

(Δ) : $Z = aX + b$.

$G_1 \in (\Delta) \Rightarrow \bar{Z}_1 = a\bar{X}_1 + b$ --- ①

$G_2 \in (\Delta) \Rightarrow \bar{Z}_2 = a\bar{X}_2 + b$ --- ②

① - ② $\Rightarrow \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 = a(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \Rightarrow a = \dfrac{\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2}{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \dfrac{4{,}5 - 2{,}5}{250 - 433{,}33}$

$$\boxed{a = -0{,}0109} \quad 0{,}5$$

On remplace a dans ①.

$b = \bar{Z}_1 - a\bar{X}_1 = 4.5 - (-0{,}0109)(250) = 7{,}225.$

La droite est de la forme

$$Z = -0{,}0109\, X + 7{,}225.$$

0,25

3) $\underline{X = 600}$, $y = ?$

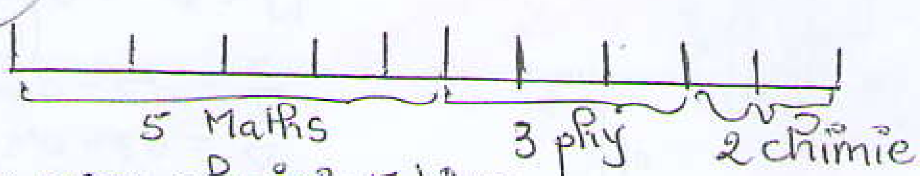
$$Z = -0{,}0109\, X + 7{,}225 = -0{,}0109(600) + 7{,}225 = 0{,}685$$

1

$$z_i = \frac{y_i - 10}{100} \Rightarrow y_i = 100\, z_i + 10 = 100(0{,}685) + 10 = 78{,}5$$

$$\boxed{y = 78{,}5}$$

Exo4 : 02 pts



On a 10 livres → on choisi 5 livres.

1) 5 livres qlq : c'est une disposition non ordonnée sans répétition de 5 livres parmi 10. Il s'agit d'une combinaison sans répétition de 5 parmi 10.

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\,(10-5)!} = 252 \text{ possibilités.}$$

0,5

2) 2 livres de Maths :

On choisi 2 livres de maths parmi les 5 livres de Maths de C_5^2 manières et on choisi les 3 autres parmi les 5 autres livres (phy et chimie) de C_5^3 manières donc on aura

$$C_5^2 \times C_5^3 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} \times \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 100 \text{ possibilités.}$$

0,1

3) 1 physique et 1 de chimie :

On choisi 1 de physique parmi 3 → C_3^1

" " 1 " chimie " 2 → C_2^1

" " 3 autres (" 5 → C_5^3

0,75

On aura

$$C_3^1 \times C_2^1 \times C_5^3 = \frac{3!}{(3-1)!\,1!} \times \frac{2!}{(2-1)!\,1!} \times \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 60 \text{ possibilités.}$$