Chapitre 8 : Modèles à équations simultanées

8.1. Introduction

Les modèles économiques de quelques complexités sont décrits par un ensemble de variables, mais leur modélisation requiert en général plus qu'une relation ou équation reliant ces grandeurs, on parle alors de modèles à équations simultanées.

On distingue à nouveau les variables endogènes, qui sont déterminées par le modèle, et les variables exogènes déterminées ou fixées en dehors de celle-ci.

La modélisation opère en trois phases :

- La conception, c'est-à-dire l'écriture ou la spécification du modèle (identification) ;
- L'estimation des équations du modèle ;
- La résolution du modèle, préalable à son emploi pour la prévision ou la simulation.

Dans la réalité, les étapes ne sont pas séquentielles et la mise au point d'un modèle opère par aller et retour entre les trois étapes ci-dessus.

8.2. Modèle à plusieurs équations

Dans l'analyse économiques, il est possible de construire les modèles les plus complexes comprenant plusieurs équations lorsque nous sommes en présence de ce type de modèle, il arrive fréquemment qu'une variable endogène d'une équation apparaisse en tant que variable exogène dans une autre équation. Ce double statut de certaines variables entraine un biais dans les estimations des coefficients lorsque nous employons la méthode des MCO équation par équation. Ainsi, on doit chercher une autre méthode d'estimation des coefficients à partir de l'exemple des équations, que l'on appelle alors un système d'équations simultanées.

8.3. Forme structurelle et forme réduite d'un modèle

Un modèle économique est sous forme structurelle quand les équations traduisent directement les relations entre les variables telles que les propose la théorie économique.

U modèle est sous forme réduite quand chaque variable endogène est exprimée en fonction des variables exogènes.

Exemple 1 :

soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 R_t + \varepsilon_t \dots\dots\dots\dots (1) \\ I_t = b_0 + b_1 R_{t-1} + \mu_t \dots\dots \quad (2) \\ R_t = C_t + I_t \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

avec : C_t : Consommation totale pour l'année t ;

I_t : Investissement total pour l'année t ;

R_t : Revenu total pour l'année t.

Ce modèle comporte trois variables endogènes C_t , I_t et R_t et une variable exogène R_{t-1}
Ce modèle est sous forme structurelle.

Le modèle sous forme réduite sera :
$C_t = f(R_{t-1})$
$I_t = f(R_{t-1})$
$R_t = f(R_{t-1})$

Plus précisément, en remplaçant (3) dans (1), on aura : $C_t = a_0 + a_1(C_t + I_t) + \varepsilon_t$

$C_t = a_0 + a_1 C_t + a_1 I_t + \varepsilon_t$

En remplaçant I_t par son expression dans l'équation précédente, nous obtenons :

$C_t = a_0 + a_1 C_t + a_1 I_t + \varepsilon_t = a_0 + a_1 C_t + a_1(b_0 + b_1 R_{t-1} + \mu_t) + \varepsilon_t$

$$\Leftrightarrow C_t = \left(\frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1}\right) + \left(\frac{a_1 b_1}{1 - a_1}\right) R_{t-1} + \left(\frac{a_1 \mu_t + \varepsilon_t}{1 - a_1}\right)$$

Il en résulte que :

$$R_t = \left(\frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1}\right) + \left(\frac{a_1 b_1}{1 - a_1}\right) R_{t-1} + \left(\frac{a_1 \mu_t + \varepsilon_t}{1 - a_1}\right) + b_0 + b_1 R_{t-1} + \mu_t$$

$$\Leftrightarrow R_t = \left(\frac{a_0 + b_0}{1 - a_1}\right) + \left(\frac{b_1}{1 - a_1}\right) R_{t-1} + \left(\frac{\mu_t + \varepsilon_t}{1 - a_1}\right)$$

Soit finalement le modèle sous forme réduite :

$$\begin{cases} C_t = \left(\frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1}\right) + \left(\frac{a_1 b_1}{1 - a_1}\right) R_{t-1} + \left(\frac{a_1 \mu_t + \varepsilon_t}{1 - a_1}\right) \dots (4) \\ I_t = b_0 + b_1 R_{t-1} + \mu_t \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . (5) \\ R_t = \left(\frac{a_0 + b_0}{1 - a_1}\right) + \left(\frac{b_1}{1 - a_1}\right) R_{t-1} + \left(\frac{\mu_t + \varepsilon_t}{1 - a_1}\right) \dots\dots\dots (6) \end{cases}$$

Remarque 1 :

L'équation (6) indique que la variable R_t est fonction de ε_t et par conséquent $E(R_t \varepsilon_t) \neq 0$.

Il en résulte que dans l'équation (1), l'hypothèse d'indépendance de la variable exogène R_t (par son double statut) et de l'erreur ε_t n'est pas respectée, et l'application de la méthode des MCO sur l'équation (1) conduit à des estimateurs qui ne sont pas optimaux.

En revanche, l'utilisation de la méthode des MCO sur les équations réduites est valide puisque la variable exogène R_{t-1} n'est pas corrélée avec ε_t et μ_t.

8.4. Le problème de l'identification

Le problème de l'identification consiste à déterminer d'une façon unique, les estimateurs des coefficients du modèle structurel.

Les conditions d'identification se déterminent équation par équation selon deux types de restrictions sur un coefficient de la forme structurelle.

8.4.1. Restrictions d'exclusions

Chaque fois qu'une variable endogène ou exogène n'apparait pas dans une équation structurelle, cette variable est affectée d'un coefficient nul dans cette équation. Il s'agit ici d'une restriction d'exclusion.

Exemple 2 :

Dans l'exemple 1, la variable (I_t) ne figure pas dans l'équation (1), son coefficient est donc nul.

8.4.2. Restrictions linéaires

Le modèle spécifié impose que des variables soient affectées d'un coefficient identique.

Exemple 3 :

Dans le cas du modèle structurel de l'exemple 1, la restriction linéaire apparait sur l'équation (3).

a) lorsque les restrictions ne sont que des restrictions d'exclusions, les conditions nécessaires d'identifiabilité s'énoncent comme suit :

- l'équation d'un système structurel est dite *juste identifiée* si le nombre de variables endogènes et exogènes absent dans cette équation soit égale au nombre de variables endogènes du système moins un (-1).

C'est-à-dire : $g-1=g-g^{'}+k-k'$;

- l'équation d'un système structurel est dite *sous identifiée* si : $g-1>g-g^{'}+k-k'$;
- l'équation d'un système structurel est dite *sur identifiée* si : $g-1<g-g^{'}+k-k'$;

avec :
$\boldsymbol{g}$: représente le nombre d'équations du modèle structurel (ou nombre de variables endogènes du modèle).
Dans l'exemple 1, $g=3$ ($\mathrm{C_t}$, $\mathrm{I_t}$ et $\mathrm{R_t}$).

$\boldsymbol{g}^{'}$: représente le nombre de variables endogènes figurant dans une équation.
Dans l'équation (1) de l'exemple 1, $g^{'}=2$ ($\mathrm{C_t}$ et $\mathrm{R_t}$).

$\boldsymbol{k}$: représente le nombre de variables exogènes du modèle.
Dans l'exemple 1, $k=1$ ($\mathrm{R_{t-1}}$).

$\boldsymbol{k'}$: représente le nombre de variables exogènes figurant dans une équation.
Dans l'équation (1) de l'exemple 1, $k' = 0$.

b) Lorsque nous avons $\boldsymbol{r}$ restrictions linéaires, les équations précédentes deviennent :

- $g - 1 = g - g' + k - k' + r$ lorsque l'équation est juste identifiée ;
- $g - 1 > g - g' + k - k' + r$ lorsque l'équation est sous identifiée ;
- $g - 1 < g - g' + k - k' + r$ lorsque l'équation est sur identifiée.

Exemple 4 : dans l'équation (1) de l'exemple (1), $r = 0$,

$g - 1 = g - g' + k - k' + r \Rightarrow 3 - 1 = 3 - 2 + 1 - 0 + 0$, l'équation (1) est juste identifiée.

8.5. Méthodes d'estimations

- Si le modèle est sous identifié (c'est-à-dire, si une équation du modèle est sous identifiée) alors, il n ya pas d'estimation possible.
- Si un modèle est juste identifié (c'est-à-dire, si les équations du modèle soient juste identifiées, soient sur identifiées), on distingue la méthode d'estimation à employer équation par équation selon le critère d'identifiabilité :
- Si l'équation est juste identifiée, alors on utilise la méthode des moindres carrés indirectes (MCI) ou la méthode des doubles moindres carrés (DMC).
- Si l'équation est sur identifiée, alors on utilise la méthode des doubles moindres carrés (DMC).

8.5.1. Méthode des moindres carrés indirectes (MCI)

Cette méthode se compose de trois étapes :
- Mise sous forme réduite du modèle structurel ;
- Estimation par les moindres carrés ordinaires (MCO) des paramètres de chaque une des équations ;
- Détermination des coefficients des équations structurelles à partir des relations algébriques entre coefficients réduit et structurel.

8.5.2. Méthode des doubles moindres carrés (DMC)

Cette méthode est plus pratique que la méthode des MCI car elle s'applique sur les équations sur et juste identifiées, et en plus, elle fournie les mêmes résultats que la méthode des MCI lorsque les équations sont juste identifiées.

Cette méthode se compose de deux étapes :

Soit le modèle à g variables endogènes et k variables exogènes :

$$y_{1t} = b_{12}y_{2t} + b_{13}y_{3t} \dots + b_{1g}y_{gt} + c_{11}x_{1t} + c_{12}x_{2t} + \dots + c_{1k}x_{kt} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = b_{21}y_{1t} + b_{23}y_{3t} \dots + b_{2g}y_{gt} + c_{21}x_{1t} + c_{22}x_{2t} + \dots + c_{2k}x_{kt} + \varepsilon_{2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y_{gt} = b_{g1}y_{1t} + b_{g2}y_{2t} \ldots + b_{g(g-1)}y_{(g-1)t} + c_{g1}x_{1t} + c_{g2}x_{2t} + \cdots + c_{gk}x_{kt} + \varepsilon_{gt}$$

1ère étape :

Effectuer une régression par les MCO de chaque une des variables endogènes sur toutes les variables exogènes :

$$y_{1t} = \alpha_{11}x_{1t} + \alpha_{12}x_{2t} + \cdots + \alpha_{1k}x_{kt} + \vartheta_{1t}$$

$$y_{2t} = \alpha_{21}x_{1t} + \alpha_{22}x_{2t} + \cdots + \alpha_{2k}x_{kt} + \vartheta_{2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y_{gt} = \alpha_{g1}x_{1t} + \alpha_{g2}x_{2t} + \cdots + \alpha_{gk}x_{kt} + \vartheta_{gt}$$

Et calculer les valeurs de : $\hat{y}_{1t}, \hat{y}_{2t}, \ldots., \hat{y}_{gt}$

2ème étape :

Remplacer les variables endogènes figurant à droite des équations structurelles par les valeurs estimées : $\hat{y}_{1t}, \hat{y}_{2t}, \ldots., \hat{y}_{gt}$;

Il vient :

$$y_{1t} = b_{12}\hat{y}_{2t} + b_{13}\hat{y}_{3t} \ldots + b_{1g}\hat{y}_{gt} + c_{11}x_{1t} + c_{12}x_{2t} + \cdots + c_{1k}x_{kt} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = b_{21}\hat{y}_{1t} + b_{23}\hat{y}_{3t} \ldots + b_{2g}\hat{y}_{gt} + c_{21}x_{1t} + c_{22}x_{2t} + \cdots + c_{2k}x_{kt} + \varepsilon_{2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y_{gt} = b_{g1}\hat{y}_{1t} + b_{g2}\hat{y}_{2t} \ldots + b_{g(g-1)}\hat{y}_{(g-1)t} + c_{g1}x_{1t} + c_{g2}x_{2t} + \cdots + c_{gk}x_{kt} + \varepsilon_{gt}$$

Ensuite :

Appliquer la méthode des MCO, équation par équation afin d'obtenir :

$$\begin{cases} \hat{b}_{12}, \ldots \ldots, \hat{b}_{1g}, \hat{c}_{11}, \ldots \ldots, \hat{c}_{1k} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \hat{b}_{g1}, \ldots \ldots, \hat{b}_{g(g-1)}, \hat{c}_{g1}, \ldots \ldots, \hat{c}_{gk} \end{cases}$$

Références bibliographiques

1. Brigitte Dormont, « Introduction à l'économétrie » Ed Montchrestien, Paris 1999.
2. Domadar N. Gujarati, « Econométrie ». Ed de boeck, Bruxelles, 2004.
3. Régis Bourbonnais, « Econométrie, manuel et exercices corrigés ». Ed Dunod, Paris 2015.
4. Régis Bourbonnais, « Exercices pédagogiques d'économétrie ». Ed Economica Paris 2015.
5. William Greene, « Econometric analysis ». Ed Pearson, New York, 2018.
6. William Greene, « Économétrie. Annexes : exercices et corrigés. » Ed Pearson, New York, 2006.