Université A. Mira –Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil
2ème année Licence Génie Civil

TP METHODE NUMERIQUE

TP N° 02 Méthodes d'interpolation

Objectif :

Les méthodes d'interpolation sont utilisables généralement dans les cas suivants :

1) Remplacé une fonction f(x) connue mais difficile à manipuler, par une fonction plus simple $\prod(x)$ qui est plus accessible pour l'intégration, la différentiation, etc.
2) La fonction f(x) n'est pas connue, on ne connaît que les valeurs dans certains points x_i les valeurs $f(x_i) = y_i$ peuvent être par exemple des mesures expérimentales.

1) Interpolation de Newton

Le polynôme de newton pour N+1 points $x_0, \ldots, x_n$ ainsi que N+1 valeurs associées $y_0, \ldots y_n$ est donné par :

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]$$

Avec la différence divisée: $f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$

2) Interpolation de Lagrange

Etant donné N+1 points distincts $x_0, \ldots, x_n$ ainsi que N+1 valeurs associées $y_0, \ldots y_n$, il existe un unique polynôme $l_N(x)$ tel que :

$$l_N(x) = \sum_{m=0}^{N} y_m L_m(x) \qquad L_m(x) = \prod_{k \neq m}^{N} \frac{x - x_k}{x_m - x_k}$$

Avec $L_m(x)$: polynômes caractéristiques de Lagrange

Manipulations

Exercice 1 :

Construire, selon la méthode de Newton, le polynôme d'interpolation f_2(x) de degré deux qui interpole les points : x_0 =1 $f(x_0)$=0 **;** x_1=4 $f(x_1)$= 1.386294 **;** x_2 =6 $f(x_2)$ =1.7917559

1. Déterminer d'abord ce polynôme de façon analytique.
2. Écrire un fichier function Matlab permettant l'implémentation de la méthode de Lagrange. Déterminer ce polynôme.
3. Tracer, sur la même figure, le polynôme et les points d'interpolation.

Réponse question 1 :

$$f(x_0) = 0$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.386294 - 0}{4 - 1} = 0.4620981$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1.791759 - 1.386294}{6 - 4} - 0.4620981}{6 - 1}$$
$$= -0.0518731$$

$$f_2(x) = 0 + 0.4620981(x - 1) - 0.0518731(x - 1)(x - 4)$$

Après simplification $f_2(x) = -0.0518731x^2 + 0.72146x - 0.66959$

Exercice 2 :

Construire, selon la méthode de Lagrange, le polynôme d'interpolation l_2(x) de degré deux qui interpole les points (x_0 ,y_0) =(0,1) ; (x_1 ,y_1) =(1,2) ; (x_2 ,y_2) =(2,5)

1. Déterminer d'abord ce polynôme de façon analytique.
2. Écrire un fichier function Matlab permettant l'implémentation de la méthode de Lagrange. Déterminer ce polynôme.
3. Tracer, sur la même figure, le polynôme et les points d'interpolation.

Réponse question 1 :

$$l_2(x) = y_0 \times L_0(x) + y_1 \times L_1(x) + y_2 \times L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \times \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Longrightarrow l_2(x) = x^2 + 1$$

Solution

1) **Exercice 1 :**Interpolation de Newton

```
function [n,DD] = newtonp(x,y)
%Input : x = [x0 x1 ... xN]
%        y = [y0 y1 ... yN]
%Output: n = coefficients de polynôme de Newton  de degree N
N = length(x)-1;
DD = zeros(N + 1,N + 1);
DD(1:N + 1,1) = y';
for k = 2:N + 1
    for m = 1: N + 2 - k % matrice des de différence divisée
        DD(m,k) = (DD(m + 1,k - 1) - DD(m,k - 1))/(x(m + k - 1)- x(m));
    end
end
a = DD(1,:);
n = a(N+1);
for k = N:-1:1
    n = [n a(k)] - [0 n*x(k)];
end
xx = [1: 0.02 : 6]; yy = polyval(n,xx);
plot(xx,yy,'b', x,y,'*')
grid on
%%exemple de d'exécution de cette function:
%%>>[n,DD] = newtonp([-2 -1 2 3],[-6 0 0 4])
%%n =   0.5000   -1.0000   -0.5000    1.0000
```

2) **Exercice 2** Interpolation de Lagrange

```
function [l,L] = lagranp(x,y)
%Input : x = [x0 x1 ... xN], y = [y0 y1 ... yN]
%Output: l = coefficients de polynôme de Lagrange  de degree N
%        L = polynômes caractéristiques
N = length(x)-1; % degree du polynôme
l = 0;
for m = 1:N + 1
    P = 1;
    for k = 1:N + 1
        if k ~= m, P = conv(P,[1 -x(k)])/(x(m)-x(k)); end
    end
    L(m,:) = P; %Lagrange coefficient polynomial
    l = l + y(m)*P; %Lagrange polynomial
end
xx = [0: 0.02 : 2]; yy = polyval(l,xx);
plot(xx,yy,'b', x,y,'*')
grid on
%%exemple de d'exécution de cette function:
%%>>[l,L] = lagranp([-2 -1 2],[-6 0 0 ])
%%l =   -1.5000    1.5000    3.0000
```