

## CHAPITRE UN

### 1 Rappels mathématiques

#### 1.1 Grandeur physique ou mesurable

La notion de grandeur est souvent liée à l'expression quantitative d'un phénomène ou à la propriété d'un corps. Elle est scalaire lorsque sa mesure est donnée par un simple nombre (scalaire), elle est vectorielle, lorsque sa mesure nécessite plusieurs scalaires. En définitif, une grandeur est mesurable lorsqu'on peut définir une égalité et une somme de deux des valeurs qu'elle a pu prendre. Et ceci à travers un appareil de mesure. Les grandeurs mesurables représentent la majeure partie des grandeurs utilisées en physique.

##### 1.1.1 Les grandeurs mesurables de base « grandeurs fondamentales »

Ce sont sept grandeurs indépendantes les unes des autres représentant l'univers et qui interviennent dans tous les phénomènes mesurables. Elles sont la longueur, la masse, le temps, la quantité de matière, l'intensité du courant électrique, la température et l'intensité de la lumière.

##### 1.1.2 Les grandeurs dérivés

Ces grandeurs sont déduites des sept grandeurs fondamentales grâce à une interdépendance bien décrite par une opération mathématique de mise en facteurs de une ou de plusieurs de ces grandeurs de base. La surface, à titre d'exemple, n'est que le carré de la longueur et la vitesse n'est que le quotient de la longueur par le temps.

##### 1.1.3 Dimensions des grandeurs « Notation »

La dimension est inhérente à une grandeur physique  $G$ , le symbole dimension est noté " $[G]$ ", par exemple on écrit  $[l]=L$  et on lit, la dimension de  $l$  est  $L$ . de même pour les autres grandeurs de bases :

$[La\ masse]=[m]=M$ ,  $[Le\ temps]=[t]=T$ ,  $[L'intensité\ de\ la\ lumière]=[I]=I \dots etc.$

De manière générale, la dimension d'une grandeur physique  $G$  est notée  $[G]$ , et on obtient le tableau de dimensions fondamentales suivant :

Grandeur	Dimension
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité du courant	I
Température	Θ
Quantité de matière	N
Intensité de la lumière	J

#### 1.1.4 Equations aux dimensions

Une équation aux dimensions exprime les relations entre les différentes grandeurs. Elles servent à vérifier l'homogénéité des expressions littérales aidant à repérer des erreurs dans le calcul. La dimension de toute grandeur physique s'écrit sous la forme d'un produit des sept dimensions fondamentales avec des exposants variables, soit :

$$[G] = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \dots$$

Où  $\alpha, \beta, \gamma \dots$ , sont des exposants rationnels.

**Attention : Il ne suffit pas qu'une équation soit homogène pour qu'elle soit juste !**

Exemple :

La dimension d'un travail est défini à partir de l'équation  $w = f \cdot l$ , une force par un déplacement, on écrit :

$$[w] = [f] \cdot [l] = ([m] \cdot [a]) \cdot [l] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

#### 1.1.5 Le système international d'unité

Le système international d'unités SI est fondé sur un choix des sept unités de base bien définies et considérées comme indépendantes de point de vue dimension qui sont, on le rappelle, le Mètre, le Kilogramme, la seconde, l'Ampère, le Kelvin, la mole, et la Candela. Le tableau suivant regroupe quelques une de ces grandeurs, certaines fondamentales et d'autres dérivés.

Grandeur	Nom de l'unité	symbole	Dimension
Longueur	Mètre	m	L
Masse	Kilogramme	Kg	M
Temps	Seconde	s	T
Intensité électrique	Ampère	A	I
Température thermodynamique	Kelvin	K	$\Theta$
Quantité de matière	Mole	mol	N
Intensité lumineuse	Candela	Cd	J
Vitesse	Mètre/seconde	m.s <sup>-1</sup>	L.T <sup>-1</sup>
Accélération	Mètre/seconde <sup>2</sup>	m.s <sup>-2</sup>	L.T <sup>-2</sup>
Energie	Joule	Joule	M.L <sup>2</sup> .T <sup>-2</sup>
Puissance	Watt	W	M.L <sup>2</sup> .T <sup>-3</sup>

## 1.2 Les vecteurs

Un vecteur est un segment de droite orienté ayant une origine bien définie A, une extrémité bien définie B, on le note  $\overrightarrow{AB}$ . Il est caractérisé par son origine ou son point d'action, son support qui est la droite (AB), son sens de A vers B et son module  $\|\overrightarrow{AB}\|$  appelée aussi norme.

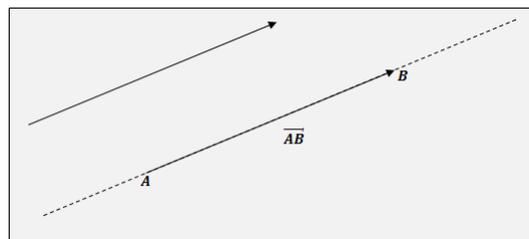


Figure 1-1 : Deux vecteurs équivalents

Deux vecteurs sont identiques ou égaux, s'ils ont même longueur, même direction et même sens.

### 1.2.1 Opérations sur les vecteurs

Dans la base orthonormée directe  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  définissant l'espace, un vecteur  $\vec{V}$  est défini par la connaissance de ces trois composantes sur les trois axes du repère. Il s'écrit sous la forme :

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

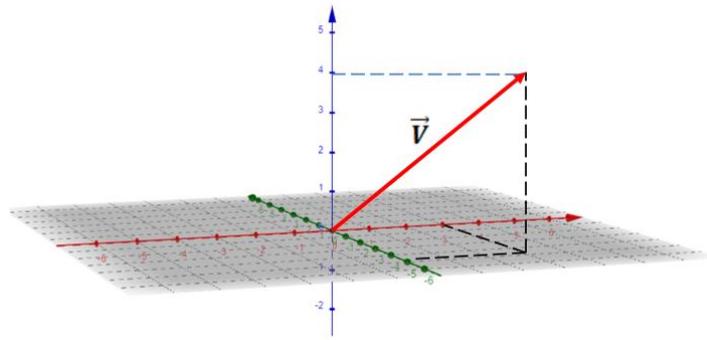


Figure 1-2 : Un vecteur dans un espace Euclidien

Où  $x, y$  et  $z$  sont les projections droites du vecteur  $\vec{V}$  sur les différents axes du repère. La base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant orthonormée direct, cela signifie que :

- Les vecteurs de base  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont perpendiculaires deux à deux.
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  et  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ .

Un vecteur  $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  peut s'écrire sous forme d'une colonne  $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

### Addition de deux vecteurs

L'addition de deux vecteurs  $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$  et  $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$  est le vecteur  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$  donné par :  $\vec{V} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$ .

**Attention :**  $\|\vec{V}\| \neq \|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\|$

### Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$  et  $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$  est le nombre ou scalaire  $\alpha = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \theta$ .

Où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs considérés.

Si  $\vec{V}_1$  est perpendiculaire à  $\vec{V}_2$ , alors le produit scalaire  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$ .

Si  $\vec{V}_1$  est parallèle à  $\vec{V}_2$ , dans ce cas  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|$ .

### Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$  et  $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$  est le vecteur  $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ . Le vecteur  $\vec{V}$  issu du produit vectoriel possède les caractéristiques suivantes :

- $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  est un vecteur perpendiculaire au plan défini par les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , il est donc perpendiculaire à tous les vecteurs de ce plan.
- Son sens est donné par la règle de la main droite (règle de la vis), le trièdre  $\vec{V}, \vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  est direct.

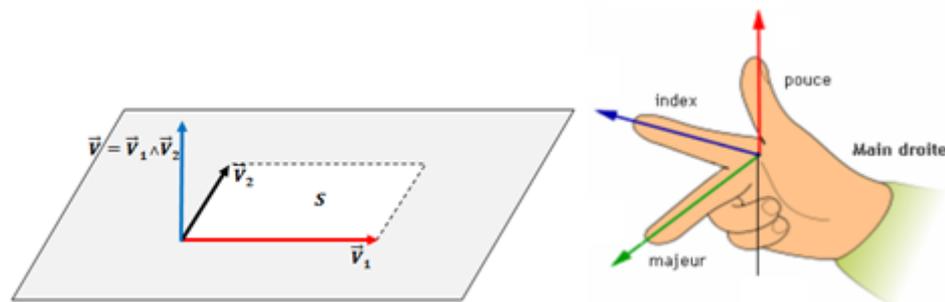


Figure 1-3: Vecteur issu d'un produit vectoriel

- Son module  $\|\vec{V}\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \sin \theta$  définit l'aire (surface) du parallélogramme construit par les deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .
- L'expression du vecteur produit vectoriel est donnée par le déterminant 3X3 suivant :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

### Propriétés:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V} \wedge \vec{V} = 0.$$

Si  $\vec{V}_1$  est perpendiculaire à  $\vec{V}_2$ , alors le produit vectoriel  $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = V_1 \cdot V_2$

## Produit mixte

Le produit mixte des trois vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  est défini comme le scalaire  $= (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$ . si les trois vecteurs sont dans un même plan, c'est-à-dire coplanaire, alors le produit mixte est nul  $\beta = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = 0$ .

**Propriété :**  $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$

### 1.2.2 Analyse vectorielle : les opérateurs différentiels Gradient, Rotationnel, Divergence et Laplacien.

#### Le gradient :

La forme différentielle totale d'une fonction  $f(x, y, z)$  où  $x, y$  et  $z$  sont les trois variables de l'espace euclidien est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Qui peut s'écrire sous la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$  et  $\vec{dl}(dx, dy, dz)$ . Le champ vectoriel  $\vec{u}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$  est le gradient de la fonction  $f(x, y, z)$ , on le note  $\overrightarrow{grad}(f)$  tel que :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

L'opérateur  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  est l'opérateur Lapla.

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur.

#### La divergence

La divergence d'un champ vectoriel  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  est un scalaire donné par :

$$div(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

#### Le rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  est un vecteur donné par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Le rotationnel d'un gradient est nul  $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0$ .

## Le Laplacien

Il est défini comme la divergence du gradient. Le Laplacien scalaire est donné par :

$$\text{Laplacien}(f) = \text{div}(\overrightarrow{grad}(f))$$

On le note  $\Delta$  tel que :

$$\Delta(f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### 1.3 Élément de longueur, de surface et de volume dans les systèmes de coordonnées

L'espace matériel est entièrement défini par un point et trois axes supposés fixes, appelé aussi repère noté  $R(o, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ . Dans un tel espace, un point M est parfaitement repéré par la connaissance des trois projections du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  sur les trois axes définis par les vecteurs unitaires  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$ . On écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

Toutefois, et pour des raisons de symétrie et dans le souci de simplification, plusieurs systèmes de coordonnées ont été élaborés.

#### 1.3.1 Coordonnées cartésiennes

Le point M est repéré par les coordonnées  $(x, y, z)$  du repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $-\infty < x, y, z < +\infty$ , le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Un déplacement infinitésimal  $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$  est donné par :

$$\vec{dl} = \overline{MM'} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Le module du vecteur  $\overline{OM}$  est donné par :

$$\|\overline{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### 1.3.2 Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées cartésiennes

#### a- Élément de longueur

On appelle élément de longueur en coordonnées cartésiennes la quantité  $dl = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , il est clair que l'élément de longueur n'est que le module du vecteur  $\vec{dl}$ .

A une dimension, l'élément de longueur  $dl$  se résume à  $dl = dx$  (ou  $dy$  ou  $dz$ ), ainsi le calcul d'une longueur totale n'est que l'intégrale :

$$l = \int_{x_i}^{x_f} dx$$

#### b- Élément de surface

Dans le cas le plus simple où la surface est contenue dans un des plans cartésiens, soit à prendre le plan  $(O, X, Y)$ , la surface élémentaire est la quantité algébrique

$$ds = dx \cdot dy$$

où  $dx$  et  $dy$  les déplacements élémentaires respectifs dans les directions  $OX$  et  $OY$ . La surface totale est donnée par l'intégrale double :

$$S = \iint dx \cdot dy$$

Il vient alors à titre d'exemple que la surface du rectangle en couleur de la figure est :

$$\iint_{X_0, Y_0}^{X_0+a, Y_0+b} dx \cdot dy = (x)_{X_0}^{X_0+a} \cdot (y)_{Y_0}^{Y_0+b} = a \cdot b$$

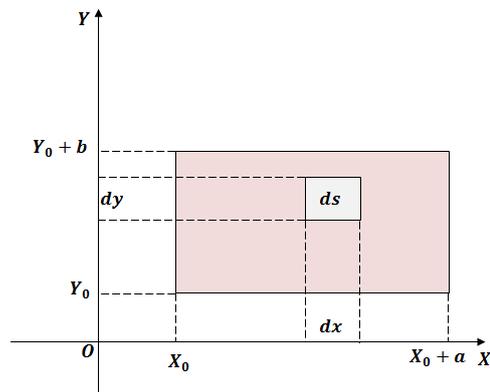
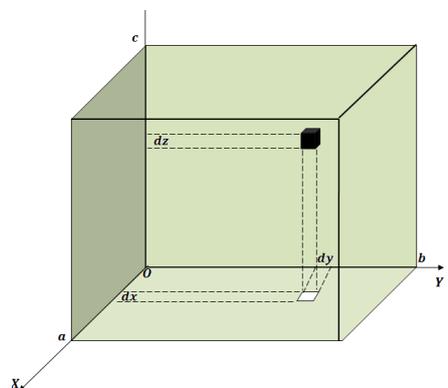


Figure 1-4: Élément de surface cartésien

#### c- Élément de volume



En coordonnées cartésiennes, le volume élémentaire est la quantité  $dV = dx dy dz$  représenté par le cube noir de la figure ci contre. Et ainsi, le volume du parallélogramme de couleur de la figure est l'intégrale triple :

$$V = \iiint dx dy dz = (x)_0^a (y)_0^b (z)_0^c = abc$$

Figure 1-5:Elément de volume cartésien

### 1.3.3 Coordonnées cylindriques

Comme son nom l'indique, ce système répond à une symétrie cylindrique, c'est -à-dire repérer un point sur la surface d'un cylindre. Par rapport au repère cartésien, on choisit une nouvelle base orthonormée directe  $(o, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$  de sorte que :

$$(\vec{i}, \vec{u}_r) = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

On écrit alors :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k} = r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + z\vec{k} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

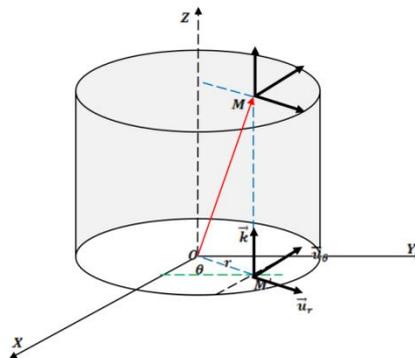


Figure 1-6: Système de coordonnées cylindriques

Ce qui nous donne une relation de passage entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

D'où :  $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{y}{x} = \tan\theta$  et  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ .

### 1.3.4 Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées cylindrique

#### a- Élément de longueur

En coordonnées cylindriques, un déplacement élémentaire peut se faire de trois manières de bases, suivant l'axe joignant l'origine O au point M, c'est-à-dire  $dr$ , soit sur la surface du cylindre  $r d\theta$  ou soit sur l'axe z, c'est-à-dire  $dz$ . Ceci vient du fait que le vecteur déplacement est donnée par :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

### b- Élément de surface

L'élément de surface est donnée par :

$$ds = r \cdot d\theta \cdot dz$$

Où  $r$  on le rappelle est donné par  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Ce qui nous permet le calcul de la surface totale d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  par l'intégrale de surface suivante :

$$s = \int_0^h \int_0^{2\pi} r d\theta dz = r \int_0^h \int_0^{2\pi} d\theta dz = 2\pi r h$$

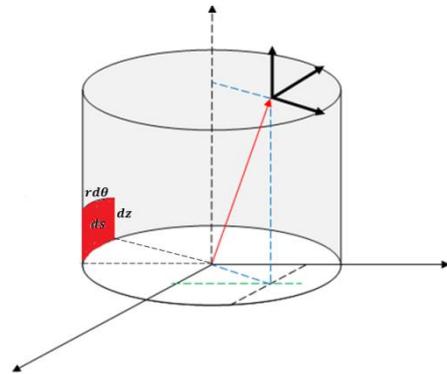


Figure 1-7: Élément de surface cylindrique

### c- Élément de Volume

Le volume élémentaire est tout simplement la surface élémentaire par une épaisseur élémentaire soit  $dV = ds \cdot dr = r dr d\theta dz$ .

Ainsi, le volume total du cylindre précédent n'est autre que l'intégrale :

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r r dr d\theta dz = \frac{1}{2} r^2 2\pi h = \pi r^2 h$$

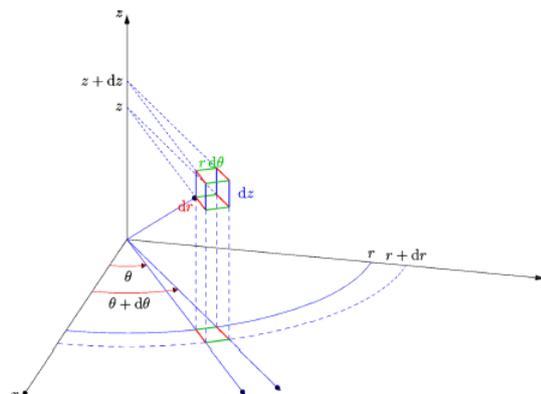


Figure 1-8: Élément de volume cylindrique

### 1.3.5 Coordonnées sphériques

On utilise les coordonnées sphériques dès que la distance au centre joue un rôle important dans le problème. Le point  $M$  est alors repéré par les coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  de la base orthonormée directe  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  avec :

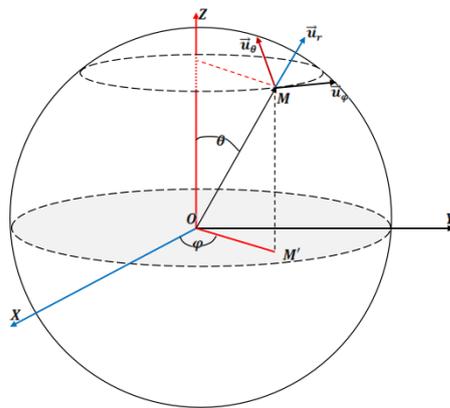


Figure 1-9: Système de coordonnées sphériques

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

$$\theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM})$$

$$\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$$

Où  $M'$  est la projection de  $M$  dans le plan  $(OXY)$  et :

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Ainsi, on écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{OM'}\| = r \sin\theta$$

D'où

$$\overrightarrow{OM} = r(\sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j}) + r \cos\theta \vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce qui nous donne la matrice de passage entre les coordonnées sphériques et cartésiennes suivante :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Où :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{z}{r} = \cos \theta \quad \text{et} \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{z}{r} \right)$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{et} \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

### 1.3.6 Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées sphériques

#### a- Élément de longueur

Nous avons vu que le vecteur position en coordonnées sphériques est donnée par  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$  et le vecteur déplacement élémentaire  $\overrightarrow{MM'} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$ . C'est que l'élément de longueur peut être soit  $dr$ , soit  $r d\theta$  ou encore  $r \sin \theta d\varphi$ , tous de dimension L.

#### b- Élément de surface

Si maintenant on se déplace sur la surface de la sphère, c'est-dire, si on fixe le rayon, l'élément de surface est donné par :

$$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

La surface d'une sphère est alors donnée par l'intégrale suivante de surface :

$$s = r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2$$

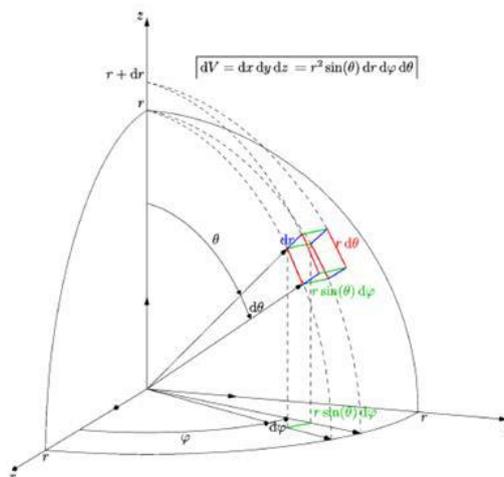


Figure 1-10: Elément de longueur, de surface et de volume sphérique

## 1.4 Dérivés et intégrales

### a- Dérivés

Le tableau suivant énumère quelques dérivés des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Dérivé $f'(x)$
$K$ , avec $k$ une constante	0
$Kx$	$k$
$kx^n$	$knx^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin (f(x))$	$f'(x)\cos (f(x))$

### b- Intégrales

Le tableau suivant rappelle quelques primitives de fonctions usuelles :

La fonction $f(x)$	Sa primitive $\int f(x)dx$
0	$k, k$ est une constante
$a$	$ax + k$
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x  + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$e^x$	$e^x$

## CHAPITRE DEUX

### 2 ELECTROSTATIQUE

#### 2.1 Description des phénomènes d'électrisation

#### 2.2 Introduction

Le mot électricité est d'origine « **Grec** » qui signifie ambre. Mais, quel est le lien avec nos connaissances actuelles de l'électricité ?

L'électricité et le magnétisme, c'est tout ce qui nous entoure, à quelques considérations près, on peut dire que le monde est fait d'Electricité et de Magnétisme. La lumière dans nos foyers, nos montres et réveils, nos téléviseurs, nos téléphones portables, nos calculatrices et nos

ordinateurs ne fonctionnent qu'avec l'électricité. Les couleurs de l'arc en ciel ne sont là que par électricité. Les avions, les voitures, les trains ne roulent que grâce à l'électricité.

On ne bouge que parce que l'électricité existe, la contraction des muscles nécessite de l'électricité. Nos nerfs, nos cerveaux ne fonctionnent que grâce à cette électricité. Nos cœurs ne peuvent battre sans électricité et on ne réfléchit que grâce à l'électricité.

Les atomes, les molécules, les corps solides et non solides, toutes les réactions chimiques ou autres ne sont qu'électricité.

L'électricité gouverne notre vie, mais attention, elle peut aussi être un danger pour cette même vie !

### Structure de la matière- vue moderne

La matière est constituée d'atomes, unités de base. Un atome c'est un noyau de dimensions très réduites devant celle de l'atome. Le noyau est formé de protons de charges positives et de neutrons sans charges avec des masses égales.  $m_p \approx m_n \approx 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg.

Autour du noyau, nous avons un nuage d'électrons. L'atome est neutre, alors le nombre de protons est égale au nombre d'électrons. Si on arrache un électron à un atome, ce dernier devient un ion positif, et si par contre un atome reçoit un électron, il devient un ion négatif. En valeur algébrique, la charge de l'électron est égale à la charge du proton, alors que la masse du proton est 1836 fois plus grande. Ce qui nous laisse dire que la quasi-totalité de la masse de l'atome se trouve dans son noyau.

Pour se faire une idée de l'ordre de grandeur d'un atome, sept milliard d'atomes mis côte-à-côte vont former une longueur de 70 cm.

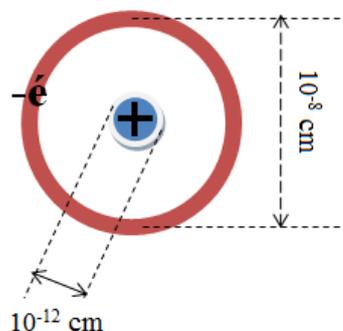


Figure 2-1: Représentation schématique d'un atome

## Historique

Il est très connu depuis longtemps que de l'ambre frotter attire les feuilles sèches. L'ambre en grec renvoie à l'électron et c'est de là que vient l'appellation Electricité. Mon stylo après l'avoir frotté à mes cheveux attire des petits morceaux de papier. On observe un phénomène similaire si on frotte une baguette de verre avec un morceau de soie. Ce dernier attire des morceaux de fourrure. Il est aussi rapporté des textes anciens que des bijoux d'ambres frottés et mis en contact avec de petites grenouilles, les rendaient excitées et se mettaient à sauter.

Au cours du 18<sup>ième</sup> siècle, on découvre qu'il y a deux types d'électricité. La première en frottant le verre, dite de type A et la deuxième en frottant l'ambre et dite de type B et il ressort que A repousse A, B repousse B mais A attire B. Et de là nous pouvons dire qu'un corps est électrisé lorsqu'il est capable d'attirer des corps légers.

De manière générale, on peut électriser tous les corps. On peut le faire de plusieurs manières, par frottement ou par contact avec des corps déjà électrisés. Ces même corps, d'un point de vue électrique, peuvent être des conducteurs ou des isolants. L'électrisation reste localisée pour un isolant et se répand en tous point du corps si celui-ci est un conducteur. Conséquence directe, on peut électriser un verre qui est isolant mais pas une baguette d'argent ou de cuivre qui sont des conducteurs.

### 2.2.1 Evidence de l'existence de deux électricités

Soit à réaliser une série d'électrifications par frottement sur trois corps, le verre, le polystyrène et l'ambre.

#### Première expérience

Verre  $\longleftrightarrow$  *Répulsion*  $\longrightarrow$  Verre

Polystyrène  $\longleftrightarrow$  *Attraction*  $\longrightarrow$  Verre

Polystyrène  $\longleftrightarrow$  *Attraction*  $\longrightarrow$  Polystyrène

Cette simple expérience met en évidence l'existence de deux types d'électrisation.

#### Deuxième expérience

Verre  $\xleftrightarrow{\text{Attraction}}$  Ambre

Polystyrène  $\xleftrightarrow{\text{Répulsion}}$  Ambre

Ambre  $\xleftrightarrow{\text{Répulsion}}$  Ambre

Il est alors clair que l'ambre se comporte comme le polystyrène, leur électrisation est dite de même type. Positive de type verre et Négative de type ambre. Enfin, deux corps porteurs de même signe se repoussent et deux corps porteurs d'électricités de signes contraires s'attirent.

### 2.2.2 Interprétation dans le cadre des connaissances actuelles

Un corps est un arrangement d'atomes et de molécules, ces molécules sont aussi des arrangements d'atomes qui peuvent être ordonnés ou non. Un atome est un noyau lourd formé de protons et de neutrons et un nuage d'électrons.

- Un noyau constitué de  $Z$  protons de charge  $(+e)$  et de  $N$  neutrons (neutre) avec  $m_p \approx m_n \approx 1,7 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ .
- $Z$  électrons de charge  $-e$  avec  $m_p = 1836 \text{ fois } m_e$ .

La stabilité du noyau est assurée par des interactions fortes ou nucléaires et la stabilité de l'atome est assurée par des interactions électriques entre électrons et noyau. Un atome neutre peut perdre ou gagner un ou plusieurs électrons et devient ion, on peut alors dire que les charges sont transférables. D'une manière générale, tous les phénomènes d'électrisations sont conséquence d'un transfert de d'électrons.

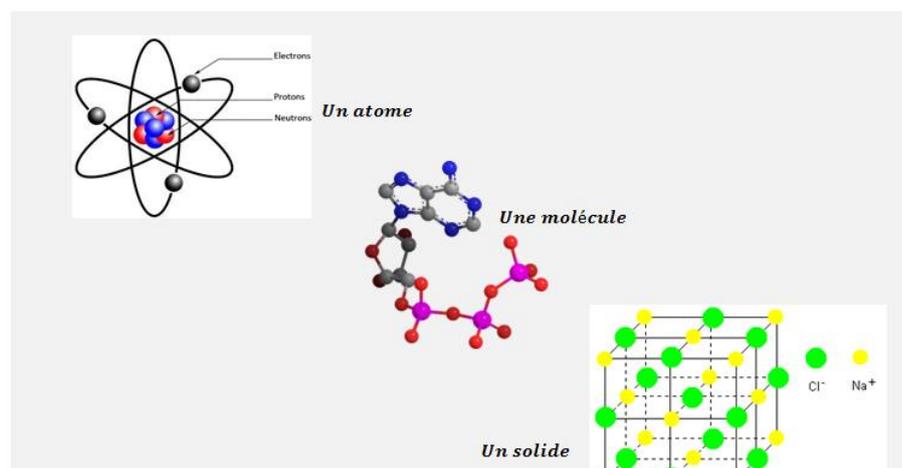


Figure 2-2: Schémas d'un atome, d'une molécule et d'un solide cristallin

## **Notion de conducteur et d'isolant**

Dans un conducteur, les électrons de périphérie sont faiblement liés aux noyaux atomiques et peuvent de ce fait se déplacer librement dans le matériau. Le cuivre, l'argent et l'or sont de très bon exemples.

Dans un isolant, les électrons sont fortement liés et ne peuvent pas se déplacer entre atomes, ils sont localisés. Le verre et les oxydes sont de parfaits exemples.

### **2.2.3 Processus d'électrisation**

#### **2.2.3.1 Electrification par frottement**

Le frottement provoque toujours un transfert de charges électriques négatives (des électrons) d'un objet à l'autre, si bien que l'un des deux devient chargé négativement (surplus d'électrons) et l'autre, chargé positivement (déficit d'électrons). C'est l'électrification par frottement. Le sens de transfert dépend de l'affinité électronique relative des deux corps. On peut en effet classer les corps dans l'ordre de transfert de charges et on obtient une série dite triboélectrique.

Poil de lapin- Verre- Mica- laine- poil de chat- Soie- Bois- Ambre- Résine- Soufre- Ebonite- Celluloid.

Ainsi, si on frotte de la laine sur le verre, ce dernier s'électrise positivement. Alors que si on le frotte avec les poils de lapin, il s'électrise négativement.

Aussi, si on frotte la soie avec de l'ébonite, elle s'électrise positivement, et si par contre on la frotte avec le verre, elle s'électrise négativement.

#### **2.2.3.2 Electrification par contact**

On prend une baguette électrisée A et on la met en contact avec une autre baguette de verre non électrisée B, nous constatons, après séparation, que cette dernière possède à son tour la propriété d'attirer les corps légers. On dit qu'elle s'est électrisée par contact.

Quelques cas de figures d'électrification par contact.

- 1) Un corps A mis en contact avec un corps B déjà chargé négativement. Le corps neutre A prend une partie de l'excédent de charges négatives du corps B.

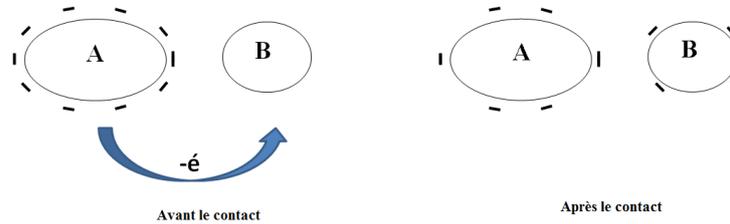


Figure 2-3: Electrification par contact 1

- 2) Un corps neutre A mis en contact avec un autre corps B déjà chargé positivement. Le corps B a perdu des électrons, ce qui fait que le nombre de protons est supérieur au nombre d'électrons.

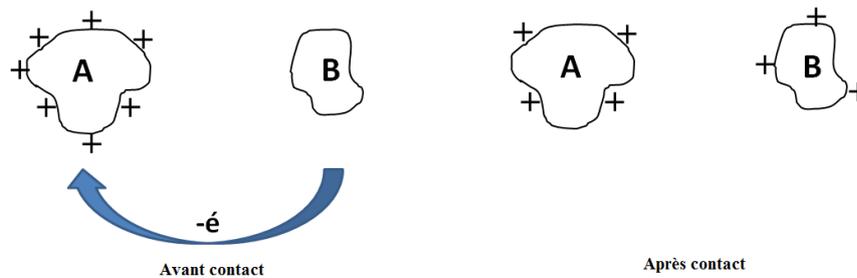


Figure 2-4: Electrification par contact 2

- 3) Un corps A chargé négativement est mis en contact avec un autre corps B chargé positivement.

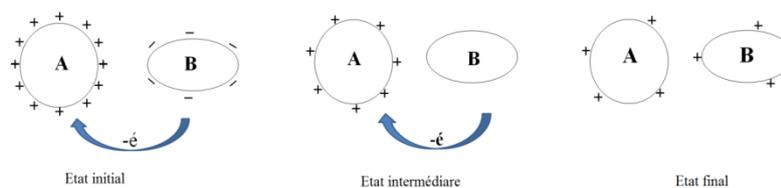


Figure 2-5: Electrification par contact 3

- 4) Neutralisation mutuelle

Deux corps A et B portant deux charges égales et opposées sont mis en contact. Les deux corps après un certain temps se neutralisent, c'est-à-dire, les charges positives compensent les charges négatives.

### 2.2.3.3 Electrification par une source (Electrocinétique)

Elle se fait au moyen d'un générateur électrique. Si on relie à l'aide d'un fil conducteur un corps électrisable à un générateur électrique, celui-ci s'électrise et portera une charge de même signe que celle de la borne du générateur auquel il est branché.

### 2.2.3.4 Conservation de la charge électrique

**Principe :** la charge électrique totale contenue dans un système isolé, c'est-à-dire la somme algébrique des charges positives et négatives présentes à chaque instant reste constante.

**Exemple :** soient deux sphères métalliques identiques. A l'aide d'un générateur, on charge une d'elle avec une charge  $Q$ . Par la suite, on les met en contact pendant un instant et on les sépare. Les deux sphères, et en raison du phénomène d'électrification par contact, vont acquérir des charges  $Q_1$  et  $Q_2$ .

D'après le principe de conservation de la charge électrique, la charge avant et après le contact est conservée.

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Et comme les deux sphères sont identiques, alors

$$Q_1 = Q_2 = Q', \text{ ce qui donne } Q' = \frac{1}{2}Q$$

### 2.2.4 Loi de Coulomb dans le vide

Soient deux charges électriques ponctuelles dans le vide, séparées par une distance  $d$ , une force d'interaction électrostatique mutuelle s'établit entre elles. Coulomb, et par analogie avec la loi d'interaction universelle de Newton, a proposé une force de même type :

$$\vec{F}_{1,2} = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12}$$

Qu'on lit : la force exercée par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  est égale au produit  $k \cdot q_1 \cdot q_2$  sur le carré de la distance qui les sépare  $d^2$  multiplié par le vecteur unitaire dans la direction de la charge une vers la charge deux.

Où  $k$  est la constante universelle de Coulomb et vaut dans le système international des unités de mesure SI  $9 \cdot 10^9 \text{ SI}$ . Et où les charges sont en Coulomb.

Dans le vide, la constante  $k$  s'écrit sous la forme

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$\epsilon_0$  est appelée la permittivité absolue du vide.

Dans un milieu autre que le vide, la constante  $k$  est différente et on l'écrit sous la forme

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$$

$\epsilon_r$  est appelée permittivité relative du milieu,

Ainsi, dans l'air  $\epsilon_r = 1,00058$ , dans l'eau pure,  $\epsilon_r = 80$ , dans la paraffine,  $\epsilon_r = 2,1$  .....

$\vec{u}_{12}$  Est un vecteur unitaire dans la direction  $1 \rightarrow 2$

En raison du principe de l'action et de la réaction, la force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  est la même en module que celle exercée par  $q_2$  sur  $q_1$  mais en sens opposé.

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

La force de Coulomb est une force centrale dirigée suivant la droite joignant les deux charges, elle varie rapidement en  $\frac{1}{r^2}$ .

### Conséquences

1. Si les deux charges  $q_1$  et  $q_2$  sont de même signes, alors la force d'interaction  $\vec{F}_{1,2}$  est dans la même direction que le vecteur unitaire  $\vec{u}_{12}$ . La force  $\vec{F}_{1,2}$  est une force de répulsion, les deux charges se repoussent mutuellement.
2. Si maintenant les deux charges  $q_1$  et  $q_2$  sont de signes opposées, alors la force d'interaction  $\vec{F}_{1,2}$  est dans le sens contraire que le vecteur unitaire  $\vec{u}_{12}$ . La force  $\vec{F}_{1,2}$  est une attraction, les deux charges s'attirent mutuellement. Voir les illustrations ci-après.

#### Deux charges de mêmes signes



Figure 2-6: Répulsion entre deux charges de même signes

### Deux charges de signes contraires

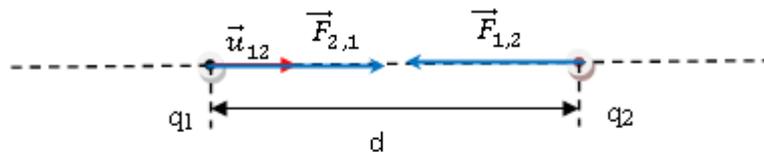


Figure 2-7: Attraction entre deux charges de signes opposés

#### 2.2.5 Ordre de grandeur des forces électrostatiques

Au niveau microscopique c'est-à-dire au niveau de l'atome et de la molécule où les distances d'interaction sont de l'ordre du nanomètre ou du micromètre, les forces électrostatiques sont considérables et sont largement prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles.

La meilleure illustration est celle de comparer les deux forces, électrostatique et gravitationnelle, entre un électron et un proton de l'atome d'hydrogène.

Sachant que  $q_e = q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb et  $d \approx 0,53 \text{ \AA} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$ , la force d'attraction électrostatique entre l'électron et le proton est  $F_C \approx 10^{-7} \text{ N}$ . Dans la même configuration, et sachant que  $m_p \approx 1836 m_e$ , la force d'attraction gravitationnelle est  $F_N \approx 10^{-47} \text{ N}$ . Le rapport  $\frac{F_C}{F_N} \sim 10^{42}$ .

La force électrostatique apparaît donc dominante vis-vis de la l'attraction gravitationnelle. De la, on peut conclure que dans les problèmes d'interaction entre particules, on pourra négliger leur poids.

## 2.3 Champ et potentiel électrique

### 2.3.1 Champ et potentiel gravitationnel

La gravitation est l'interaction qui régit l'attraction mutuelle des corps sous l'effet de leurs masses. C'est Newton qui, en 1687, énonça l'expression de la force d'attraction gravitationnelle s'exerçant entre deux corps. Le mouvement des satellites (naturels ou artificiels) est dû à l'attraction gravitationnelle, mais aussi à leur vitesse. Sa loi s'énonce comme suit : 'Deux corps possédant chacun une masse sont soumis à l'interaction gravitationnelle, ils exercent l'un sur l'autre des forces attractives dites gravitationnelles'.

Soient deux corps A et B de masses  $m_A$  et  $m_B$  respectivement, séparées d'une distance  $d_{AB}$ , la force gravitationnelle qui s'exerce entre ces deux masses est donnée par :

$$F = G \cdot \frac{m_A m_B}{d_{AB}^2}$$

F : valeur de la force gravitationnelle, en Newton (N).

$m_A$  et  $m_B$  : Deux masses en kilogramme (Kg)

$d_{AB}$  : Distance entre les centres de masse des deux corps A et B en mètre (m)

G : Constante de gravitation universelle,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

La masse  $m_B$  subit la force d'attraction de  $m_A$ , on dit alors que  $m_B$  est dans le champ créé par  $m_A$ . Le champ gravitationnel créé par la masse  $m_B$  est réparti dans tout l'espace, il est donné en tout point  $M$  de l'espace par la relation :

$$\vec{g} = G \cdot \frac{m_A}{d_{AM}^2} \vec{u}$$

$\vec{u}$  est un vecteur unitaire dans la direction  $M$  vers  $A$ .

## 2.3.2 Champ et potentiel électrique

### 2.3.2.1 Champ et potentiel créé par une charge unique

Soit une charge électrique  $q_1$  située en un point  $O$  dans l'espace, exerçant une force électrostatique sur une charge  $q_2$  située en un point  $M$ . L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{1,2}$$

Qu'on peut mettre sous forme

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \frac{kq_1}{d^2} \vec{u}_{1,2} = q_2 \vec{E}_1 \quad \text{où} \quad \vec{E}_1 = \frac{kq_1}{d^2} \vec{u}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{d^2} \vec{u}_{1,2}$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la charge qui subit la force (ici  $q_2$ ), de ce qui dépend de la charge source  $q_1$  origine du champ créé, le vecteur  $\vec{E}_1(M)$ . Ce champ électrique est créé par la charge électrique en  $O$  au point  $M$ .

**Définition :** Une particule chargée de charge  $q_1$  placée en  $O$  crée en tout point  $M$  de l'espace distinct de  $O$  un champ vectoriel

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{d^2} \vec{u}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{d^2} \vec{u}_{1,2}$$

appelé champ électrostatique. L'unité est le (Volt/mètre) noté (V/m).

L'état électrique de chaque point M de l'espace aux alentours d'une charge électrique Q peut être caractérisé par deux grandeurs physiques :

- Le vecteur champ électrique

$$\vec{E} = \frac{kQ}{d^2} \vec{u}$$

Défini comme étant la force appliquée par la charge Q sur une autre charge unité placée à une distance d.

- Le potentiel électrique

$$V(M) = k \frac{Q}{d} + Cste$$

Défini comme l'énergie potentielle d'une charge unité placée à la distance d.

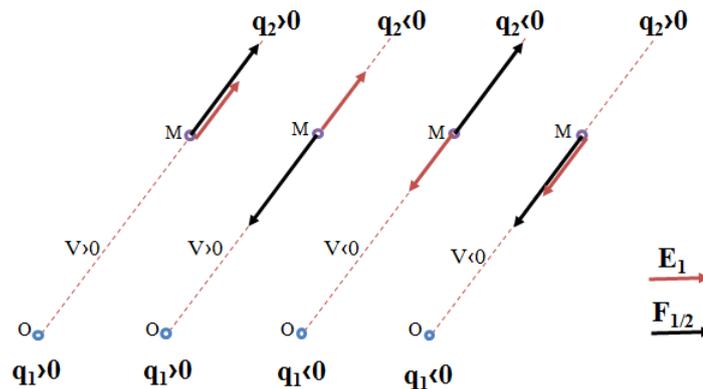


Figure 2-8: Champ, potentiel et Force de deux charges en un point M

### 2.3.2.2 Champ et potentiel créé par deux charges électriques ou plus (principe de superposition)

Dans le souci de simplification, nous considérons le cas de deux charges ponctuelles fixes, \$q\_1\$ et \$q\_2\$ agissant sur une troisième charge \$q\$. Comme toutes les forces, la force électrostatique est une grandeur vectorielle, le principe de superposition nous laisse admettre que l'action de \$q\_1\$ sur \$q\$ n'est pas modifiée par la présence de \$q\_2\$. La même chose, l'action de \$q\_2\$ sur \$q\$ n'est pas modifiée par la présence de \$q\$.

L'action conjuguée de  $q_1$  et  $q_2$  sur  $q$  est la somme vectorielle des actions séparées de  $q_1$  sur  $q$  et  $q_2$  sur  $q$  prises séparément.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k \frac{qq_1}{d_1^2} \vec{u}_1 + k \frac{qq_2}{d_2^2} \vec{u}_2$$

$$= q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = q \vec{E}$$

Il vient

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

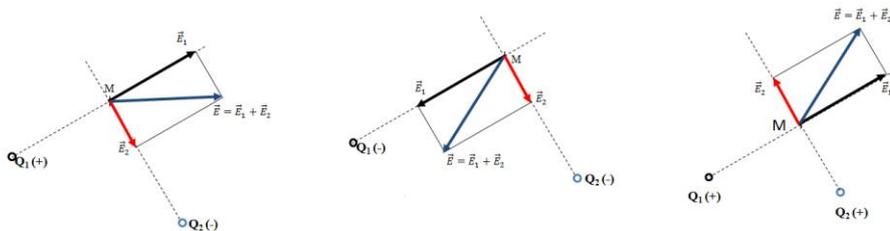


Figure 2-9: Superposition de deux champs électriques.

Qu'on peut généraliser au champ créé par  $n$  charges  $q_i$  ponctuelles en un point  $M$  à des distances  $d_i$  des charges considérées :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et est énoncé comme **le principe de superposition**, comme tout principe, il n'est pas démontré.

### Le champ électrostatique dérive d'un potentiel

Une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  crée en tout point de l'espace un champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_r$$

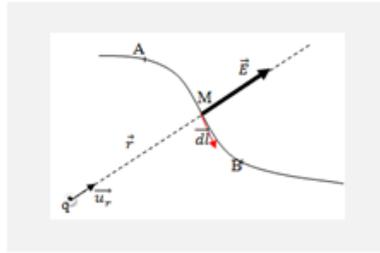


Figure 2-10: Circulation du champ électrique entre deux points

La circulation élémentaire  $dc$  de  $\vec{E}$  correspondant à un déplacement élémentaire  $\vec{dl}$  du point M sur la courbe  $\widehat{AB}$  est

$$dc = \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{dl} \quad \text{Or} \quad \vec{u}_r \cdot \vec{dl} = dr$$

Ainsi

$$dc = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}\right) = -dV(r)$$

$$\text{Avec} \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + cste$$

La circulation élémentaire  $dc$  est la différentielle totale  $dV(r)$ . Le champ électrostatique dérive donc d'un potentiel  $V$

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = -dV \quad \text{avec} \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

### 2.3.2.3 *Energie potentielle électrostatique*

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge électrique placée en un point M de l'espace baignant dans un potentiel électrique  $V(M)$  est définie comme étant le travail à fournir pour ramener cette charge depuis l'infini jusqu'à la position du point M.

Cette énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = qV$$

Pour une distribution de charges ponctuelles  $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$  on a

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + cste ;$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{et} \quad E_p = qV.$$

## Notion de différence de potentiel

La différence de potentiel entre deux points A et B baignant dans un champ électrostatique est égale à la circulation du champ entre ces deux points :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

## Lignes de champs et équipotentiels

Les lignes de champs et les équipotentiels sont des courbes et des surfaces qui permettent de représenter la topographie du champ et du potentiel électrique d'une distribution de charges donnée.

**Une ligne de champ** est une courbe orientée tel qu'en tout point, le champ électrique lui est tangent. Elle est orientée dans le sens du champ électrique. Les lignes de champ se dirigent vers les charges négatives venant des charges positives.

**Les surfaces équipotentiels** sont telles qu'en tout point le potentiel électrique garde la même valeur. Elles sont constamment perpendiculaires aux lignes de champ.

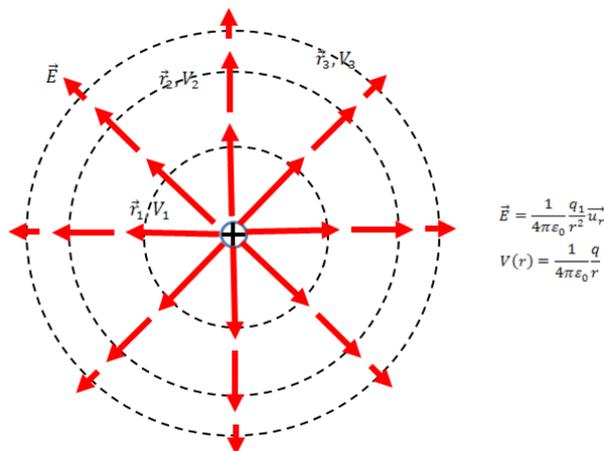


Figure 2-11: Lignes de champs et surfaces équipotentiels

La figure 2-11 montre des lignes de champ et trois équipotentielles d'une charge ponctuelle positive. Pour une charge négative, les lignes de champ seront dirigées vers la charge.

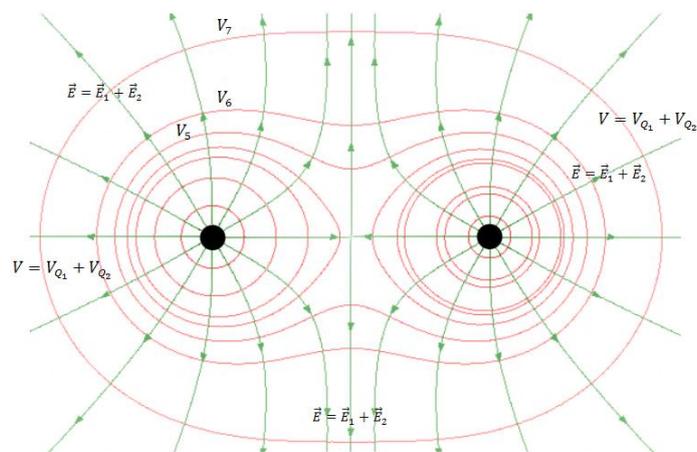


Figure 2-12: Lignes de champs et équipotentielles de deux charge adjacentes

La figure 2-12 montre des lignes de champ et sept équipotentielles de deux charges électriques ponctuelles identiques. D'après <http://www.physagreg.fr>. Les lignes de champ en vert et les équipotentielles en rouge.

### 2.3.2.4 Champ et potentiel crée par une distribution continue de charges

Pour des charges électriques réparties en ligne, en surface ou en volume, il est souvent possible de les considérer comme une distribution continue de charges, qu'on peut caractériser par des densités, linéiques, surfacique ou volumique. La densité de charge électrique désigne la quantité de charge électrique par unité de longueur, de surface ou de volume selon qu'on traite un problème à une, deux ou trois dimensions. On définit alors ces trois grandeurs :

Densité linéique 
$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \text{ (Coulomb/m) ;}$$

Densité surfacique  $\sigma = \frac{dQ}{ds}$  (Coulomb/m<sup>2</sup>);

Densité volumique  $\rho = \frac{dQ}{dv}$  (Coulomb/m<sup>3</sup>).

Pour calculer le champ et le potentiel crée par une distribution continue de charge électrique, on considère la charge comme constituée d'une infinité de charges ponctuelles élémentaires. Le champ et potentiel sont alors obtenus en additionnant par une intégrale la contribution de tous ces éléments infinitésimaux.

### A une dimension

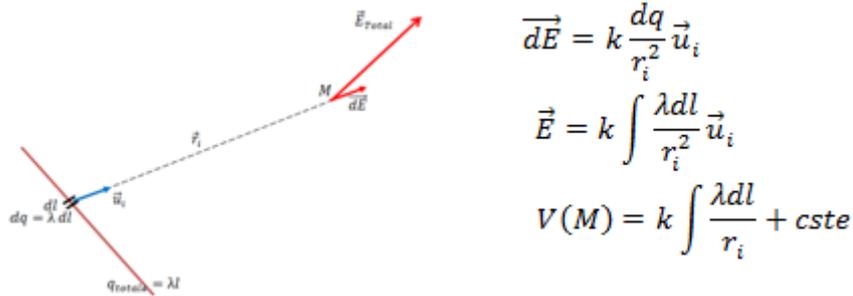


Figure 2-13: Champ et potentiel d'une distribution linéique de charges

$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i, \vec{E} = k \int \frac{\lambda dl}{r_i^2} \vec{u}_i, V(M) = k \int \frac{\lambda dl}{r_i} + cste.$$

### A deux dimensions

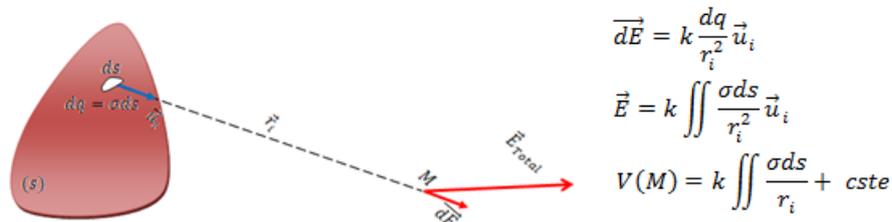


Figure 2-14: Champ et potentiel électrique d'une distribution surfacique de charges

$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i, \vec{E} = k \iint \frac{\sigma ds}{r_i^2} \vec{u}_i, V(M) = k \iint \frac{\sigma ds}{r_i} + cste$$

## A trois dimensions

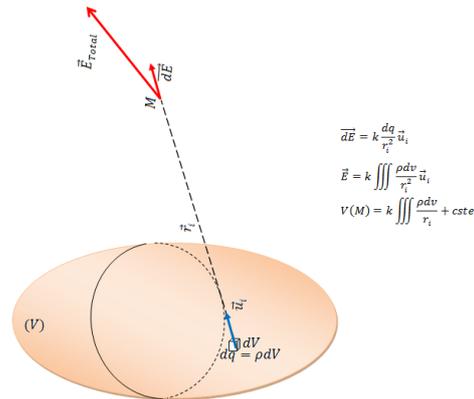


Figure 2-15: Champ et potentiel électrique d'une distribution volumique de charges

$$\overrightarrow{dE} =$$

$$k \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i, \vec{E} = k \iiint \frac{\rho dv}{r_i^2} \vec{u}_i, V(M) = k \iiint \frac{\rho dv}{r_i} + cste$$

### 2.3.2.5 Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ

L'espace électrique (espace contenant au moins une charge électrique) est caractérisé en tout point  $M(x,y,z)$  par les deux grandeurs électriques. Le champ électrique  $\vec{E}(M)$  qui est une grandeur vectorielle et le potentiel  $V(M)$  qui est une grandeur scalaire. Nous savons à présent que le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  dérive du potentiel scalaire  $V(M)$ . Mais aussi, que le potentiel scalaire  $V(M)$  a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ  $\vec{E}(M)$ , c'est le passage du champ au potentiel et du potentiel au champ électrostatique.

Autrement dit :

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Ce qui nous permet le calcul du potentiel  $V(x,y,z)$  connaissant le champ électrostatique  $\vec{E}(x,y,z)$ .

Inversement :

On sait que le potentiel électrostatique  $V(x,y,z)$  est fonction des coordonnées d'espace  $x, y$  et  $z$ , on peut alors écrire sa différentielle totale :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz = \overrightarrow{grad} V \cdot \vec{dl} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

$$E_x = \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right); E_y = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \text{ et } E_z = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

### 2.3.2.6 Topographie de l'espace électrique

Une topographie de l'espace électrique est une représentation graphique à deux ou à trois dimensions de deux fonctions  $\vec{E}$  et  $V$  réalisée par le tracé des lignes de champ et des surfaces équipotentielles. Il faut noter à ce propos quelques propriétés importantes qui traduisent graphiquement les relations entre  $\vec{E}$  et  $V$ .

- ✓ Deux lignes de champ ne peuvent se couper que si :
  - Le champ est nul en ce point,
  - Le champ n'est pas défini en ce point.
- ✓ D'après l'expression du champ généré par une charge ponctuelle, les lignes de champ divergent depuis la charge positive, et convergent vers une charge négative.
- ✓ Une ligne de champ ne peut pas se refermer sur elle-même.
- ✓ Une équipotentielle est le lieu des points de même potentiel, à chaque valeur du potentiel  $V_0$  correspond une surface équipotentielle.
- ✓ Une ligne de champ est localement orthogonale au champ électrique. En effet, une équipotentielle est définie par :

$dV = 0$  , or on sait que  $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$  cela veut dire que  $\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$  ce qui implique que  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{dl}$ .

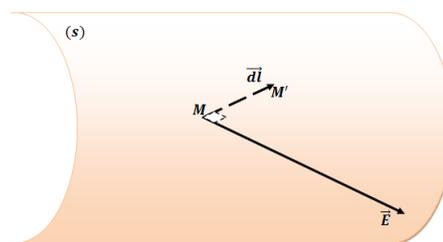


Figure 2-16: Une ligne de champ perpendiculaire à une surface équipotentielle

- ✓ Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ. En effet,  $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$  , dans le sens de la ligne de champ,  $\vec{E}$  est parallèle à  $\vec{dl}$  ( $\vec{E} // \vec{dl}$ )

Ce qui implique que :

$$dV = -|\vec{E}||\vec{dl}| < 0$$

Le potentiel décroît algébriquement.

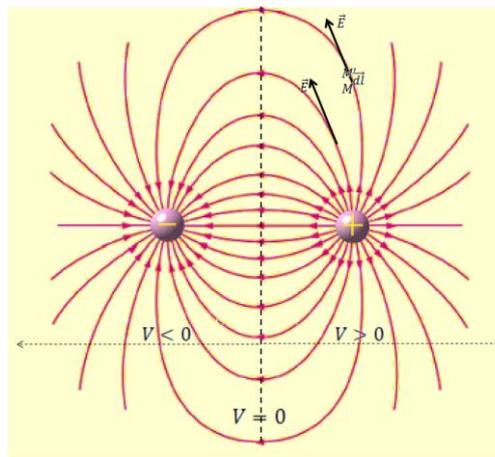


Figure 2-17: Le potentiel le long d'une ligne de champ

- ✓ Les surfaces équipotentielles se resserrent en passant d'une région de champ peu intense à une région de champ intense. En effet, pour un même  $dV$ , on peut avoir plusieurs endroits correspondants

$$dV = -\vec{E}_1 \cdot \vec{dl}_1 = -\vec{E}_2 \cdot \vec{dl}_2$$

Il est alors clair que si

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2| \text{ alors } |\vec{dl}_1| < |\vec{dl}_2|$$

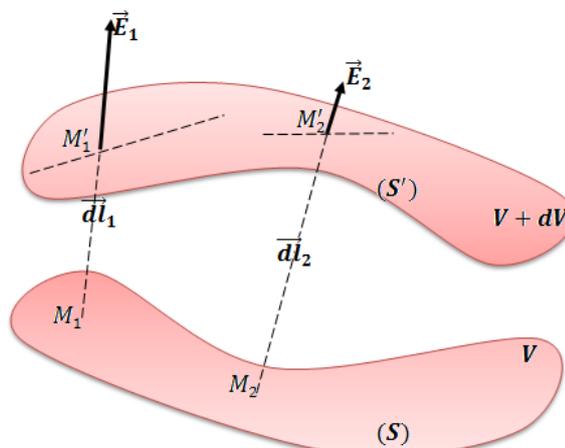


Figure 2-18: Deux équipotentiels dans un champ variable

Ce qui nous permet de visualiser sur une carte des équipotentiels, les régions des champs intenses.

Enfin,

- ✓ Le travail des forces électrostatiques appliquées à une charge qui se déplace sur une équipotentielle est nul. En effet,

$$W_{\text{equip}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q dV$$

Et comme nous sommes sur une équipotentielle, alors,

$$dV = 0 \text{ et } W_{\text{equip}} = 0$$

### 2.3.2.7 Quelques applications

#### a- Champ et potentiel créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle  $q$  placée à l'origine  $O(0,0,0)$  de l'espace muni d'une base orthonormée  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Calculer les modules des vecteurs  $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2, \vec{OM}_3, \vec{OM}_4$ .
2. Calculer le champ (vecteur et module) et le potentiel créé par  $q$  en  $M_1(1, \sqrt{3}), M_2(1, -\sqrt{3}, 0), M_3(-1, \sqrt{3}, 0)$  et  $M_4(-1, -\sqrt{3}, 0)$ .

Solution :

1. Calculer les modules des vecteurs  $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2, \vec{OM}_3, \vec{OM}_4$

$$\|\vec{OM}_{M_1}\| = \|\vec{OM}_{M_2}\| = \|\vec{OM}_{M_3}\| = \|\vec{OM}_{M_4}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

2. Le champ et potentiel créé en  $M_1, M_2, M_3, M_4$  :
  - a. Champ :

$$\vec{E}_{M_1} = k \frac{q}{OM_1^2} \vec{u}_1 = k \frac{q}{OM_1^3} \overrightarrow{OM}_{M_1}$$

$$\vec{E}_{M_2} = k \frac{q}{OM_2^2} \vec{u}_2 = k \frac{q}{OM_2^3} \overrightarrow{OM}_{M_2}$$

$$\vec{E}_{M_3} = k \frac{q}{OM_3^2} \vec{u}_3 = k \frac{q}{OM_3^3} \overrightarrow{OM}_{M_3}$$

$$\vec{E}_{M_4} = k \frac{q}{OM_4^2} \vec{u}_4 = k \frac{q}{OM_4^3} \overrightarrow{OM}_{M_4}$$

Or :

$$\|\overrightarrow{OM}_{M_1}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_2}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_3}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_4}\| = 2$$

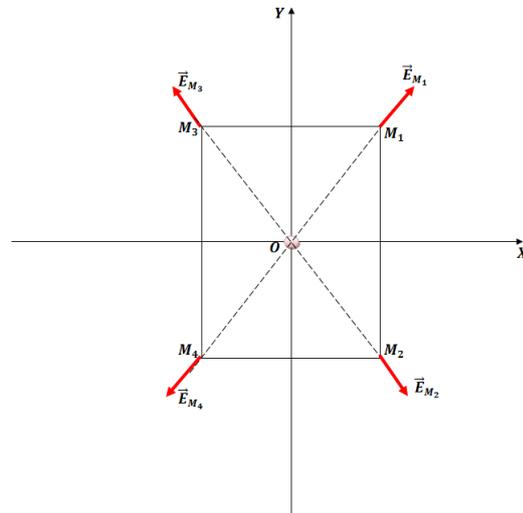
D'où:

$$\vec{E}_{M_1} = k \frac{q}{8} (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{M_2} = k \frac{q}{8} (-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{M_3} = k \frac{q}{8} (\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{M_4} = k \frac{q}{8} (-\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$$



b. Potentiel

$$V_{M_1} = k \frac{q}{OM_1}$$

$$V_{M_2} = k \frac{q}{OM_2}$$

$$V_{M_3} = k \frac{q}{OM_3}$$

$$V_{M_4} = k \frac{q}{OM_4}$$

Avec

$$\|\overrightarrow{OM}_{M_1}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_2}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_3}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_4}\| = 2$$

$$V_{M_1} = V_{M_2} = V_{M_3} = V_{M_4} = k \frac{q}{2}$$

### b- Champ et potentiel créé par un fil uniformément électrisé

1. Calculer en tout point de l'espace, le champ électrique créé par un fil rectiligne AB de longueur finie  $2a$ , portant une densité linéique  $\lambda > 0$ .

2. Etudier les cas particuliers :

a. Le plan M est dans le plan médiateur de [AB].

b. Le fil a une longueur infinie.

### Solution

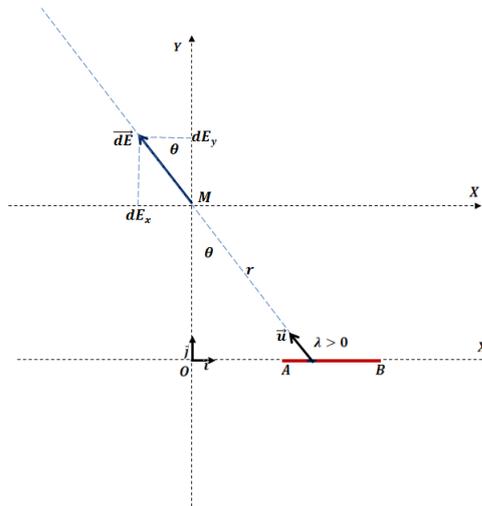


Figure 2-19: Champ créé par un segment chargé

Le fil AB porte une charge de densité linéique  $\lambda$ , ainsi :

$$q_{AB} = \lambda \cdot AB = \lambda \cdot 2a$$

L'élément de longueur  $dl$  porte alors une charge élémentaire proportionnelle  $dq = \lambda \cdot dl$ . Cette charge élémentaire va créer un champ élémentaire en tout point de l'espace  $\vec{dE}$  comme l'indique la figure. Cet élément de champ est alors donné par l'expression :

$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} = k \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$\vec{u}$  est un vecteur unitaire dans la direction joignant l'élément de longueur  $dl$  au point  $M$ , il s'écrit en fonction de  $\theta$  et des vecteurs de base  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :

$$\vec{u} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

D'où 
$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} = k \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u} = \vec{dE} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} = k \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} (-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j})$$

Ses composantes sont alors données par :

$$\begin{cases} dE_x = -k \frac{\lambda}{r^2} \sin\theta \, dx \\ dE_y = k \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta \, dy \end{cases}$$

Avec  $\tan\theta = \frac{x}{y} \rightarrow x = y \tan\theta$

$$\rightarrow dx = \frac{y}{\cos^2\theta} d\theta$$

D'autre part :  $\cos\theta = \frac{y}{r} \rightarrow r = \frac{y}{\cos\theta} \rightarrow r^2 = \frac{y^2}{\cos^2\theta}$

Au final, on aura : 
$$dE_x = -k \frac{\lambda \sin\theta}{y^2} \cos^2\theta \frac{y}{\cos^2\theta}$$

$$dE_x = -k \frac{\lambda}{y} \sin\theta \, d\theta$$

Pour calculer le champ électrostatique total créé par le fil chargé de longueur  $2a$ , il faut sommer toutes les contributions des éléments infinitésimaux  $dl$ , ce qui revient à calculer l'intégrale suivante :

$$E_x = \frac{k\lambda}{y} \int_{\theta_A}^{\theta_B} -\sin\theta \, d\theta = \frac{k\lambda}{y} [\cos\theta]_{\theta_A}^{\theta_B} = k\lambda (\cos\theta_B - \cos\theta_A)$$

Or  $\cos\theta_A = \frac{y}{\sqrt{x_A^2 + y^2}}$  et  $\cos\theta_B = \frac{y}{\sqrt{x_B^2 + y^2}}$

Alors:  $E_x = k\lambda \left[ \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right]$

De la même manière, on calcule la composante orthogonale  $E_y$  et on trouve :

$$E_y = \frac{k\lambda}{y} \left[ \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right].$$

### Cas particuliers

1) Le point M est dans le plan médiateur de [AB]

Dans ce cas, l'axe OM est un axe de symétrie pour le segment chargé [AB], ce qui se traduit par :  $x_A = -x_B$  et en remplaçant dans les expressions de  $E_x$  et  $E_y$ , on trouve :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2k\lambda}{y} \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} \end{cases}$$

2) Le fil AB est de longueur infini, cela veut dire que les points A et B sont à l'infini

$$x_A \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad x_B \rightarrow -\infty$$

$$\theta_B = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \theta_A = \frac{\pi}{2}$$

En remplaçant dans les expressions de  $E_x$  et  $E_y$ , on trouve :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2k\lambda}{y} \end{cases}$$

Il est à remarquer que le champ d'un fil infini ne dépend que de la distance à ce fil.

### c- Champ et potentiel électrique créé par un disque uniformément chargé

Soit un disque circulaire de rayon R et uniformément électrisé avec une densité surfacique de charge  $\sigma$  constante. On se propose de calculer le champ et le potentiel en un point M sur l'axe de révolution du disque.

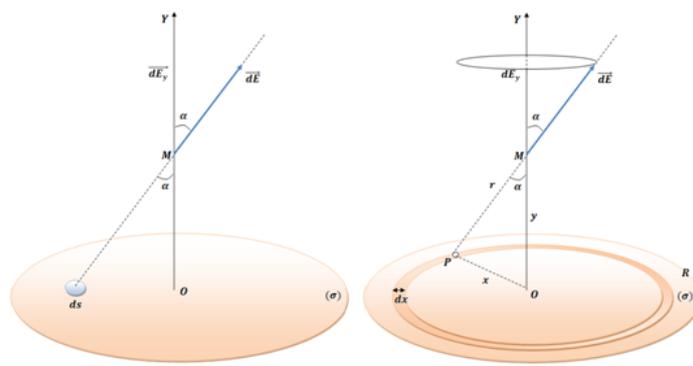


Figure 2-20: Champ créé par un disque uniformément chargé en un point sur son axe de révolution

## 1. Calcul du champ

Le disque de rayon  $R$  de surface  $s = \pi R^2$ , porte une charge électrique totale  $Q = \sigma \pi R^2$ . Cette charge n'est pas ponctuelle, elle est répartie de manière homogène sur toute la surface du disque. La loi de Coulomb est valable pour une charge ponctuelle localisée  $q$  en un point  $M$ . C'est pourquoi, pour calculer le champ créé par une telle distribution continue, nous considérons pour commencer, le champ créé par une charge élémentaire  $dq$  portée par un élément de surface élémentaire  $ds$

elque  $dq = \sigma ds$ . Ce champ est alors un champ élémentaire  $d\vec{E}$ .

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe  $Y$ , en conséquence :

$$dE_y = dE \cos \alpha$$

Formons maintenant une couronne circulaire, d'épaisseur  $dx$  et de rayon intérieur  $x$ , cette couronne n'est que la surface obtenue en faisant subir à  $ds$  une rotation autour de  $OM$ . La charge électrique portée par cette couronne est donnée par :

$$dq = \sigma 2\pi x \cdot dx$$

La contribution de toutes les charges élémentaires de la couronne au champ  $\vec{E}$  est la même :

$$dE_y = k \frac{\sigma 2\pi x dx}{r^2} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ce qui donne :

$$dE_y = k \frac{\sigma 2\pi y x dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour balayer toute la surface du disque, il suffit de faire varier le rayon  $x$  de la couronne depuis le centre du disque  $o$  à  $R$ . Maintenant, on peut obtenir le champ total en sommant  $dE_y$  pour toutes les valeurs de  $x$  comprises entre 0 et  $R$ .

$$E = \int_0^R dE_y = 2k \pi \sigma y \int_0^R \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left[ (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{x=0}^{x=R}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{y}{(R^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

### Cas particuliers :

- Si le point M est au centre du disque, c'est-à-dire  $y = 0$  alors le champ se réduit à  $E = \sigma/2\epsilon_0$ .
- Si maintenant le disque est infini c'est-à-dire  $R \rightarrow \infty$ , à ce moment là la position du point ne change rien au champ, il est partout le même et égale à  $E = \sigma/2\epsilon_0$ .

Dans ces deux cas, le champ est indépendant des variables  $x$  et  $y$ .

### 2. Calcul du potentiel à partir du champ

Nous avons vu que le champ électrostatique dérive d'un potentiel, ces deux grandeurs sont lié par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{ou encore} \quad \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$$

Nous avons calculé un champ porté par l'axe  $YY'$  de composantes  $\vec{E}(0, E_y, 0)$ , ce qui nous amène à :

$$\vec{E} = \vec{E}(0, E_y, 0) = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

D'où 
$$E_y = -\frac{dV}{dy} \rightarrow dV = -E_y dy$$

Et 
$$V = \int E dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (R^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y \right] + cste$$

La constante est déterminée par une considération physique, en supposant que le potentiel est nul à l'infini.

$$V = 0 \text{ à l'infini} \rightarrow cste = 0$$

### 2.3.2.8 Energie interne d'une distribution de charges électriques ponctuelles

#### a. Energie potentielle électrostatique

**Définition :** L'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique (sans changement de vitesse) cette particule depuis l'infini à sa position actuelle.



Figure 2-21: Travail d'une force électrostatique dans un champ électrique

Soit l'espace où règne un champ électrostatique  $\vec{E}$ . pour déplacer la charge  $q$  depuis l'infini à la position  $M$ , on doit fournir un travail par le biais de la force extérieure  $\vec{F}_{ext}$ , qu'on applique pour vaincre la force de Coulomb (le déplacement doit se faire très lentement pour ne pas induire de changement de vitesse), on a alors :

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_C$$

Et le travail à fournir est donné par :

$$W(M) = \int_{\infty}^M dW = \int_{\infty}^M \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = - \int_{\infty}^M -\vec{F}_C \cdot \vec{dl}$$

$$W(M) = -q \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot \vec{dl} = q \int_{\infty}^M dV = q[V]_{\infty}^M = V(M) - V(\infty)$$

Comme  $V(\infty) \rightarrow 0$  alors :  $W(M) = q V(M)$ .

Ce travail fourni est exactement l'énergie potentielle électrostatique de la charge  $q$  au point  $M$ . Si la charge est libre, cette énergie est vite restituée sous forme d'énergie cinétique.

## b. Energie interne d'un ensemble de charges ponctuelles

Nous venons de voir que pour assembler deux charges de même signes, il faut fournir un travail, qui n'est autre que l'énergie potentielle électrostatique de la première charge dans le champ de la deuxième et vis-versa. On l'appelle **énergie interne** donnée par :

$$U = k \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} \left[ q_1 \left( \frac{k q_2}{d} \right) + q_2 \left( \frac{k q_1}{d} \right) \right] = \frac{1}{2} (W_1 + W_2)$$

Le  $\left(\frac{1}{2}\right)$  pour ne pas comptabiliser la même énergie deux fois.

Cette énergie peut être positive ou négative, selon que les deux charges sont de mêmes signes ou de signes opposées. Selon que le travail est fourni ou restitué.

### Généralisation

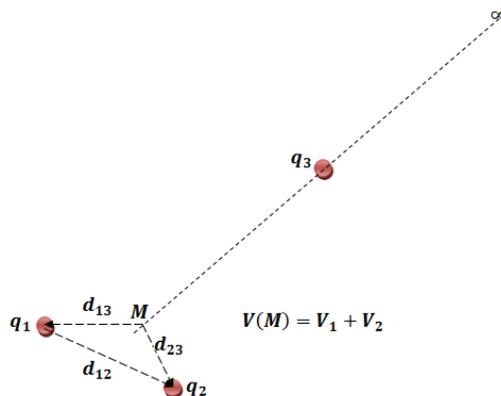


Figure 2-22: Energie interne d'une distribution de charges

Si maintenant on amène une 3<sup>ème</sup> charge  $q_3$  depuis l'infini jusqu'au voisinage des deux premières charges  $q_1$  et  $q_2$  supposées fixes, il faut fournir un travail supplémentaire à celui déjà fourni pour mettre  $q_1$  au voisinage de  $q_2$  :

$$W_3 = q_3(V_1 + V_2) = q_3V_1 + q_3V_2 = k \frac{q_1q_3}{d_{13}} + k \frac{q_2q_3}{d_{23}}$$

Et l'énergie interne électrostatique de ce système de trois charges est alors :

$$W_e = E_e = k \left( \frac{q_1q_2}{d_{12}} + \frac{q_1q_3}{d_{13}} + \frac{q_2q_3}{d_{23}} \right)$$

### Système de N charges ponctuelles

Pour un système de N charges ponctuelles, on aura alors :

$$W_e = \sum_{\text{couple}} q_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{d_{ij}}$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$W_e = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{d_{ij}} \right] = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{k q_i q_j}{d_{ij}}$$

Où le facteur 1/2 apparait pour éviter de compter de compter les couple (i, j) deux fois.

### 2.3.3 Le dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique se définit comme une répartition particulière de charges électriques telles que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives, alors que le système reste globalement neutre. Le plus simple des dipôles électriques est constitué de deux charges égales, de signe contraire distantes d'une longueur très petite mais non nulle.

Une bonne compréhension des propriétés du dipôle électrostatique est indispensable pour de nombreuses applications que ce soit en Physique, en Chimie ou en Electromagnétisme. En Chimie, par exemple, certaines liaisons entre les molécules peuvent être expliquées en modélisant ces molécules par un dipôle. La molécule HCl en est un bon exemple.

On définit alors le moment électrique dipolaire comme étant une grandeur physique vectorielle par :

$$\vec{p} = q \vec{a}$$

Où  $\vec{a}$  est le vecteur joignant les deux charges électriques formant le dipôle (depuis la charge négative vers la charge positive).

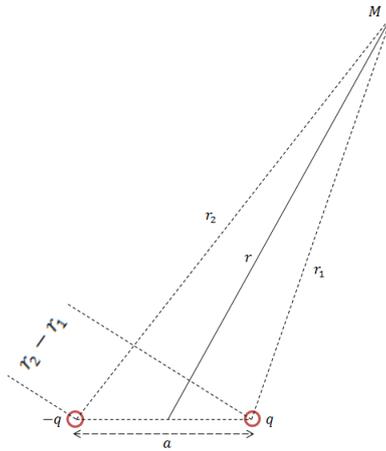


Figure 2-23: Schéma d'un dipôle électrique

### 2.3.3.1 Potentiel et Champ crée par un dipôle électrique

Les deux charges du dipôle sont fixées en deux point A et B séparés par une distance ( $a = \|\overline{AB}\|$ ). Le potentiel au point M est donné par la superposition :

$$V(M) = k \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = kq \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

A grande distance, r est très grand devant a, ce qui permet de faire les deux approximations suivantes :

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta \quad \text{Et} \quad r_1 r_2 = r^2$$

Ce qui donne :

$$V(M) = k \cdot q \cdot a \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Avec p le moment dipolaire égale à  $p = q \cdot a$ , le potentiel très loin du dipôle devient :

$$V(M) = k \frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}$$

Le champ est donné par la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

On trouve, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2k \cdot p \cdot \cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{k \cdot p \cdot \sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Positions particulières :

1.  $\theta = 0$

$$\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1 \quad \text{et} \quad \sin\theta = 0.$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_r = \frac{2k \cdot p}{r^3} \\ E_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}(E_r, 0) = \frac{2k \cdot p}{r^3} \vec{e}_r$$

2.  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos\theta = 0 \quad \text{et} \quad \sin\theta = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = \frac{k \cdot p}{r^3} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

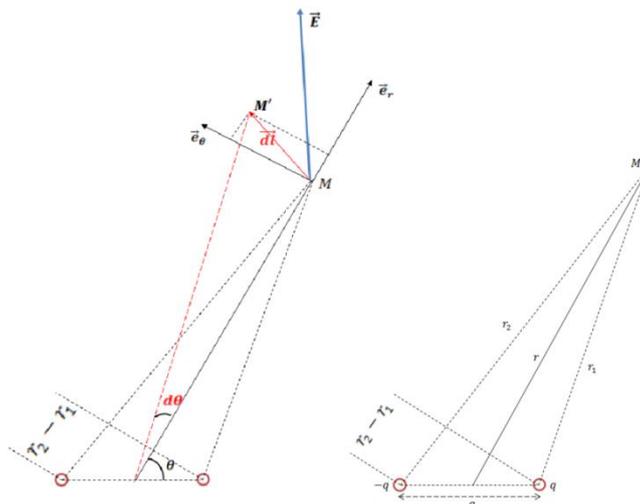


Figure 2-24: Champ électrique d'un dipôle

Les effets électriques  $\vec{E}$  et  $V$  produits par le dipôle sont entièrement déterminés par son moment dipolaire  $\vec{p}$ . Il faut remarquer également que la décroissance du potentiel en  $(\frac{1}{r^2})$  et du champ en  $(\frac{1}{r^3})$  créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle.

### 2.3.3.2 Dipôle placé dans un champ électrique

Considérons le cas le plus simple qui est celui d'un dipôle électrique  $\vec{p}$  placé dans un environnement où règne un champ électrique constant  $\vec{E}$

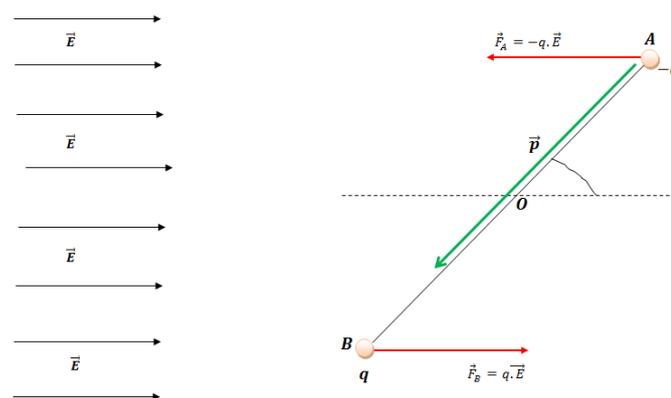


Figure 2-25: Dipôle électrique dans un champ électrique

En A : la charge  $-q$  est soumise à la force  $\vec{F}_A = -q \cdot \vec{E}$  ;

En B : La charge  $+q$  est soumise à la force  $\vec{F}_B = q \cdot \vec{E}$ .

Ces deux forces sont égales et opposées, leur somme est nulle. Mais le dipôle reste soumis à un couple ou action de rotation  $\vec{L}$ . Ce couple tend à aligner le dipôle  $\vec{p}$  avec le champ électrique  $\vec{E}$ .

$$\vec{L}_{/O} = \vec{OA} \times \vec{F}_A + \vec{OB} \times \vec{F}_B$$

Avec

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

$\vec{L}$  devient

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_B = q \cdot \overrightarrow{AB} \times \vec{E};$$

$$\vec{L}_{/O} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Lorsque le dipôle est parallèle et de même sens que le champ électrique, le couple  $\vec{L}_{/O}$  s'annule.

$$\vec{L}_{/O} = \vec{p} \times \vec{E} = p \cdot E \cdot \sin\theta = 0 \quad \text{pour } \vec{p} // \vec{E} \xrightarrow{2 \text{ cas possibles}} \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

Ce sont deux possibilités d'équilibre, la première est stable et la deuxième est instable.

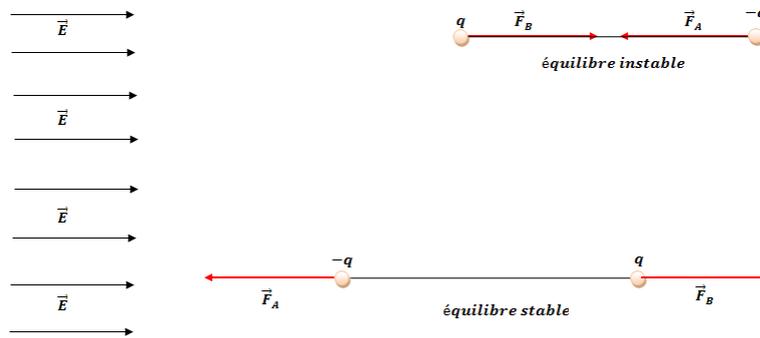


Figure 2-26: Alignement du dipôle électrique

### 2.3.3.3 Energie potentielle d'un dipôle plongé dans un champ constant

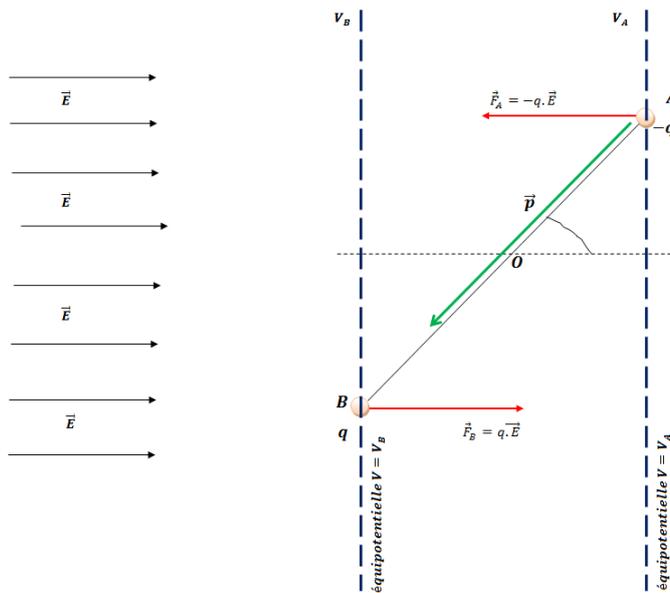


Figure 2-27: Energie potentielle d'un dipôle électrique

Perpendiculairement au champ, il existe des équipotentielle  $V_A$  et  $V_B$ . L'énergie potentielle du dipôle est donnée par :

$$E_p = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A) = q \int_A^B dV$$

Or, on sait que :  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{\text{implique}} \Delta V = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \vec{AB}$

Au final l'énergie potentielle d'un dipôle électrique baigné dans un champ électrique est donnée par:

$$E_p = q(-\vec{E} \cdot \vec{AB}) = -\vec{E} \cdot \vec{p} = -E \cdot p \cdot \cos\theta$$

L'énergie minimale est obtenue pour  $\theta = 0$  qui correspond au dipôle orienté parallèlement au champ dans le même sens, c'est une position d'équilibre stable. L'équilibre instable est obtenu pour  $\theta = \pi$ .

## 2.3.4 Flux du champ électrique- Théorème de GAUSS

### 2.3.4.1 Orientation d'une surface

Une surface est l'ensemble de points qui forment un espace à deux dimensions. En général, une surface présente une courbure, par convention, la surface convexe est positive et la surface concave est négative. Dans le cas d'une surface fermée, on choisit d'orienter la surface vers l'extérieur.

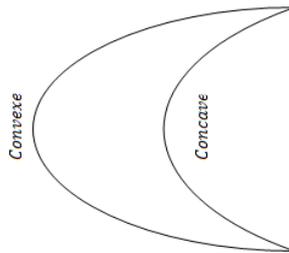


Figure 2-28: Surfaces concave et convexe

On représente vectoriellement un élément de surface autour d'un point  $M$  par un vecteur dont :

- Le module est l'aire de la surface élémentaire  $ds$ .
- La direction est la normale en  $M$  à  $ds$

Le vecteur élémentaire de surface est alors donnée par :

$$\vec{ds} = ds \cdot \vec{n}$$

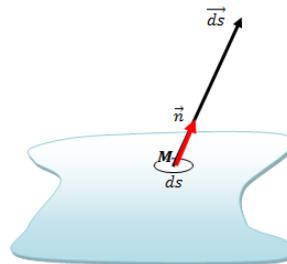


Figure 2-29: Orientation d'une surface géométrique

Dans le cas d'une surface qui s'appuie sur un contour orienté, l'orientation de la surface est définie par la règle de la main droite.

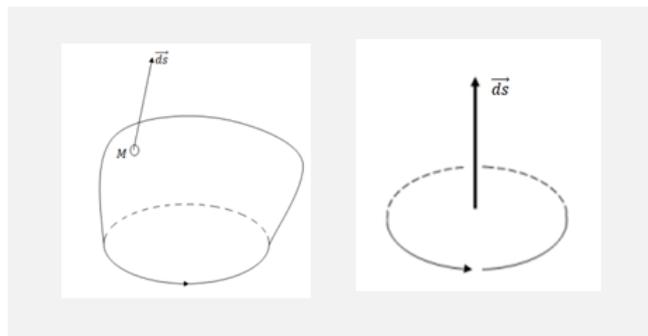
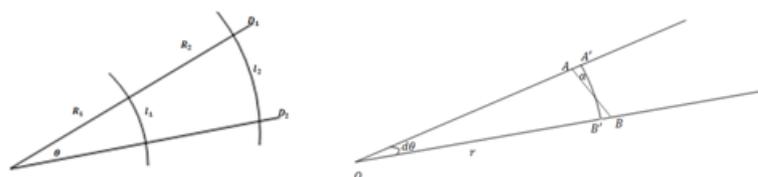


Figure 2-30: Surface fermée s'appuyant sur un contour

### 2.3.4.2 Angle solide

#### 1. angle plan

L'angle plan est l'expression de la position relative entre deux demi-droites concourantes  $D_1$  et  $D_2$  :



$$\theta = \frac{l_2}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

Figure 2-31: Angle Plan

En d'autres termes, la mesure de l'angle  $\theta$  est égale à la longueur de l'arc de cercle de rayon unité limité par les deux demi-droites. Cette définition nous conduit à quelques résultats bien connus :

L'angle plan sous lequel on observe un plan infini depuis un point est égale à  $2\pi$ .



Figure 2-32: Cas d'angles Plans

Maintenant pour caractériser l'étendue à travers laquelle on voit un objet plan AB, on introduit l'angle  $\Theta$  :

$$\theta = \widehat{AB} = (\widehat{OA}, \widehat{OB})$$

Si l'angle est très petit, soit  $d\theta$ , on aura  $\widehat{AB} = r d\theta$  et  $AB = dl$

On définit un arc  $A'B'$  du cercle de rayon  $r$  qui coupe le segment AB, on aura :

$$A'B' = dl \cos\alpha = rd\theta$$

$$d\theta = \frac{dl \cos\alpha}{r}$$

## 2. Angle solide

Un angle solide est l'analogue tridimensionnel de l'angle plan bidimensionnel. Il nous permet de caractériser l'étendu spatial sous lequel on voit un objet (surface) dans l'espace. Par analogie avec l'angle plan, l'angle solide noté  $\Omega$  est défini comme la mesure de la surface  $s$  interceptée sur la sphère de rayon unité.

$\Omega$  : s'exprime en stéradians.

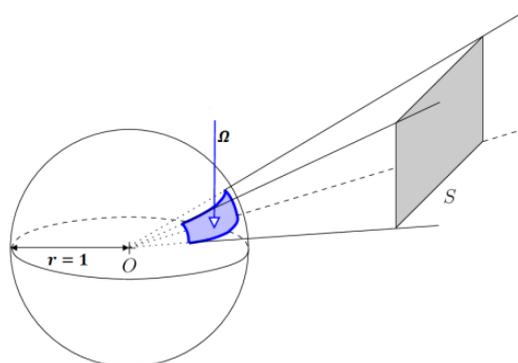


Figure 2-33: Angle solide

### Conséquences :

L'angle solide sous lequel on peut voir tout l'espace est égale à  $4\pi$ .

L'angle solide sous lequel on observe une salle de classe depuis un de ses coins est égale à  $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ .

Si maintenant la surface à observer depuis un point O est très petite, soit  $d\Sigma$  désorientée par rapport à la surface droite du cône  $dS$ , on a alors :

$$\frac{dS}{r^2} = \frac{d\Omega}{1^2} \xrightarrow{\text{ce qui donne}} dS = r^2 \cdot d\Omega$$

Or  $dS = d\Sigma \cdot \cos \theta$

d'où  $d\Omega = \frac{d\Sigma \cdot \cos \theta}{r^2}$

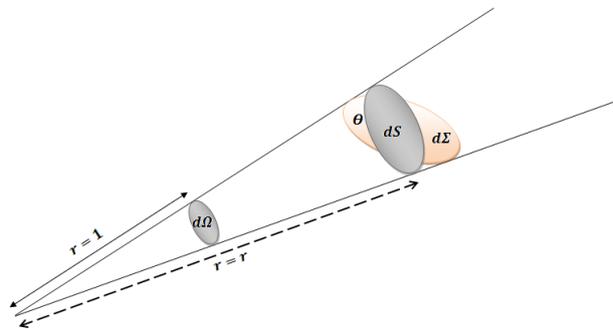


Figure 2-34: Exemple d'un angle solide

### 2.3.4.3 Flux du vecteur champ électrostatique

Soit dans l'espace ou règne un champ électrostatique  $\vec{E}$ , on appelle flux du champ  $\vec{E}$  à travers une surface  $dS$  la quantité scalaire  $d\Phi$  tel que :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Et le flux totale à travers une surface donnée :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Si le champ  $\vec{E}$  est constant

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot S \cdot \cos\theta$$

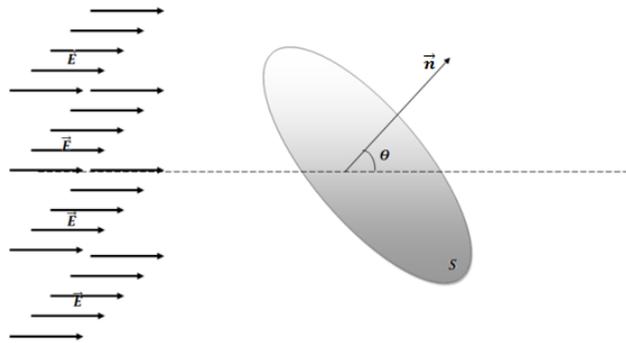


Figure 2-35: Flux du champ E à travers une surface orientée

#### 2.3.4.4 Théorème de Gauss

Pour une charge électrique ponctuelle  $q$  placée à l'intérieur d'une surface fermée  $S$  quelconque, le flux totale  $\Phi(\vec{E})$  à travers la surface  $S$  est donné par :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{E}) &= \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint \frac{kq}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS} \\ &= kq \oiint \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} = kq \oiint \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'angle solide précédemment défini :

$$\Phi(\vec{E}) = kq \oiint d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Un résultat qu'on peut facilement généraliser au flux du champ électrostatique créée par n charges, à travers une surface fermée et qui donne :

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

#### Théorème de Gauss :

Il s'énonce comme suit :

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée entourant des charges électriques  $q_i$  est :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Il ressort que, si on a pas de charges à l'intérieur d'une surface fermée, le champ sera automatiquement nul.

$$\sum_i q_i = 0 \xrightarrow{\text{ce qui donne}} \vec{E} = \vec{0}$$

Les surfaces extérieures ne figurent pas dans l'expression du flux.

Le théorème de GAUSS est très utile pour le calcul de champ produit par des distributions de charges avec des symétries géométriques.

### Méthode d'application du théorème de Gauss

- Trouver une surface de Gauss passant par le point M où l'on désire calculer le champ.
- Ecrire le théorème de Gauss

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

- Compter les charges algébriques.

### Exemples :

#### a- Champ électrique créée par une sphère creuse chargée en volume.

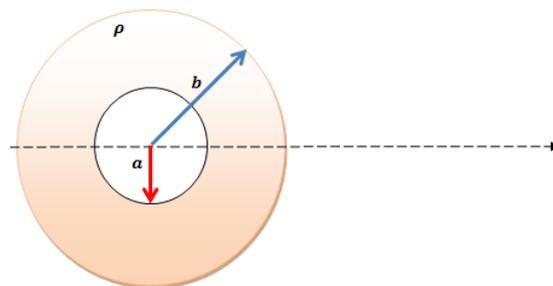


Figure 2-36: Une sphère creuse chargée e volume

Le volume d'une sphère de rayon  $R$  est donné par :  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Si la sphère est chargée en volume de densité volumique de charge  $\rho$ , alors la charge portée par la sphère est  $Q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ .

Le champ évolue en fonction de la distance  $r$  au centre de la sphère, on distingue trois régions :

Région 1 :  $r < a$

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss est une sphère de rayon  $r$ , la somme des charges à l'intérieur de cette surface est nulle. Le flux du champ à travers cette surface est donc nul et le champ est bien évidemment nul aussi.

Région 2 :  $a < r < b$

La surface de Gauss est une sphère de rayon  $r$  supérieur à  $a$  mais inférieur à  $b$ .

Le volume chargé dans ce cas est donné par  $v = \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3)$  qui porte une charge  $= \rho v$ .

On a alors :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho v}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3)$$

Ce qui donne :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{r^2}$$

Région 3 :  $r > b$

La surface de Gauss est une sphère de rayon  $r > b$ , qui englobe toute la sphère chargée. Ainsi, toute la charge électrique se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

On a alors :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho v}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r b^3$$

Ce qui donne :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{b^3}{r^2}$$

**b- Champ crée par un fil uniformément chargé avec une densité linéique  $\lambda$  positive**

Soit à calculer le champ électrique en un point M de l'espace distant r du fil chargé, la surface de Gauss la mieux adaptée et qui possède la symétrie du fil est bien un cylindre coaxiale avec ce dernier et qui passe par le point M (voir la figure).

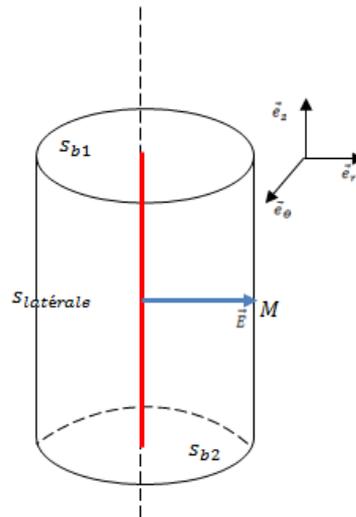


Figure 2-37: Symétrie cylindrique d'un fil uniformément chargé

On écrit le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

La surface totale du cylindre de Gauss est formée de trois surfaces, deux de base et une surface latérale.

Pour des raisons de symétries, le champ est radial :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$$

Le flux du champ à travers la surface de Gauss se trouve réduit au flux à travers seulement la surface latérale.

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}(\text{latérale})$$

$$\Phi(\vec{E}) = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0}$$

Où  $(\lambda.l)$  est la charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

**c- Champ créé par un plan infini uniformément chargé de densité surfacique  $\sigma$**

Le plan étant infini, la symétrie du problème impose aux lignes de champ d'être perpendiculaires au plan. Si la densité est positive, les lignes de champs sont sortantes comme indiquées sur la figure. Pour le calcul du champ en un point M distant une distance l du plan, on considère une surface de Gauss cylindrique telle que représentée sur la figure.

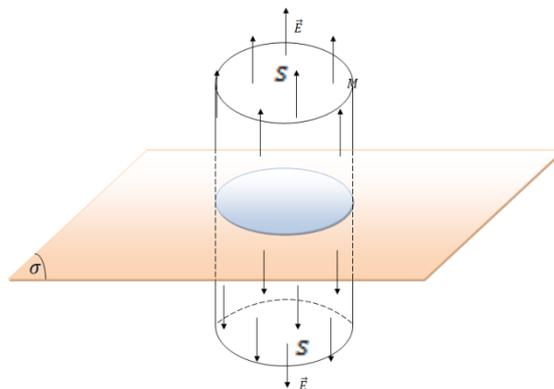


Figure 2-38: Un disque uniformément chargé en surface

D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss est la surface du cylindre, formée de trois surfaces, deux surfaces de base et une surface latérale. Le flux total à travers cette surface fermée est la somme des flux à travers toutes les surfaces :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{latérale}$$

Comme le champ est perpendiculaire au plan infini, le flux à travers la surface latérale est nul.

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 2 \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1$$

Comme le champ  $\vec{E}$  est parallèle à  $\vec{S}$ , on trouve :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E \cdot S$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est la charge portée par le disque intersection du cylindre de Gauss avec le plan infini chargé .

$$Q_i = \sigma S$$

Au final, on trouve :

$$2 E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

On écrit vectoriellement :

Au dessus du plan 
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

Au dessous du plan 
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

#### **d- Champ d'une sphère de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charges $\rho$**

La sphère est chargée en volume, ce qui donne une charge totale  $Q$  donnée par :

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Si maintenant on considère une sphère de rayon  $r$  inférieur à  $R$ , elle portera une charge partielle  $q$  donnée par :

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

La symétrie sphérique de la distribution de charges impose au champ d'être radial, en coordonnées sphériques il s'écrit :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r$$

Et il ne dépend que de la distance  $r$  au centre de la sphère. Pour le calculer, on applique le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Deux cas sont possibles :

$r < R$  :

Dans ce cas, on choisit une surface de Gauss sphérique de rayon  $r$  qui contient la charge

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Et on écrit

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3 \quad \text{ce qui donne} \quad E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$\text{Finalement : } \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$r > R$  :

Cette fois-ci, la sphère de Gauss est une sphère qui contient la sphère matérielle chargée, son rayon  $r$  est supérieur à  $R$ , on alors :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi R^3 \quad \text{ce qui donne} \quad E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Finalement : } \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

**Remarque :** Le champ créé par une sphère chargée est vue comme celui créé par une charge ponctuelle ayant la charge de la sphère concentrée en son centre.

## 2.3.5 Conducteur en équilibre électrostatique

### 2.3.5.1 Définition

Un conducteur est un milieu matériel (corps) à l'intérieur duquel les charges électriques libres peuvent se déplacer. Du point de vue électrique, un conducteur est une matière à travers laquelle le courant électrique peut circuler.

Lorsque les charges électriques sont injectées dans un conducteur, immédiatement, un état d'équilibre électrostatique s'établit. Ce qui revient à dire qu'un conducteur est en équilibre lorsque toutes ses charges sont immobiles, c'est-à-dire ne sont soumises à aucune force.

### 2.3.5.2 Propriétés d'un conducteur en équilibre

1. Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. En effet, si le champ  $\vec{E}$  n'est pas nul, toutes les charges libres seraient soumises à une force électrostatique  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  et se déplaceraient, ce qui serait une contradiction avec la définition même d'un conducteur en équilibre.
2. Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel. En effet,

$$\vec{E} = \vec{0} \xrightarrow{\text{implique}} \Delta V = 0$$
$$V = \text{constante}$$

3. Le champ à la surface est perpendiculaire à celle-ci. En effet, puisque le champ à l'intérieur est nul et que le volume tout entier du conducteur forme une équipotentielle, alors la surface est aussi une équipotentielle et le champ est perpendiculaire à cette surface. De la définition même des équipotentiels :

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \xrightarrow{\text{implique}} \vec{E} \text{ est perpendiculaire à } \vec{dl}$$

4. Les charges en excès ne peuvent se répartir dans le volume. En effet, en appliquant le théorème de Gauss à toute surface fermée à l'intérieur du volume, le flux à travers cette surface est nul puisque le champ est nul.

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \xrightarrow{\text{implique}} \sum q_i = 0$$

La somme des charges à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nulle. Expérimentalement, les charges se répartissent effectivement sur une épaisseur de quelques Å.

## Cas d'un conducteur creux e équilibre

Nous venons de voir qu'un conducteur en équilibre est un volume équipotentiel. Par continuité du potentiel, ce dernier est constant à l'intérieur de la cavité et de là, le champ est alors nul dans toute la cavité.

C'est cette caractéristique qu'on utilise pour le blindage contre le champ électrostatique, en formant une cage à l'aide d'un conducteur, c'est le principe de **la cage de Faraday**.

### 2.3.5.3 Champ au voisinage immédiat d'un conducteur

Considérons un conducteur ( $\Sigma$ ) de volume arbitraire et on cherche à déterminer le champ en son voisinage immédiat. Pour cela, on considère une surface de Gauss cylindrique aplatie telle que la base inférieure est dans le conducteur. La base supérieure passe par le point  $M$  du voisinage immédiat de la surface du conducteur.

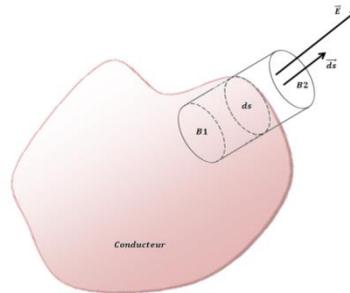


Figure 2-39: Champ électrique au voisinage d'une surface

Seule charge à l'intérieur du cylindre, celle portée par la surface du conducteur.

D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

Le flux totale à travers le cylindre de Gauss est la somme de trois contributions, deux flux à travers les surfes de base et un troisième à travers la surface latérale. Or, le flux à travers la surface de base intérieur au conducteur est nul puisque le champ est nul à l'intérieur. Le flux à travers la surface latérale est aussi nul, puisque le champ est perpendiculaire à la surface de base. Il subsiste juste la contribution du flux à travers la surface extérieur au conducteur. On écrit à cet effet :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{base1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{base2} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{surface\ latérale} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{base2} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint E \cdot ds = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

Ce qui donne au final :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Entre l'intérieur et l'extérieur, le champ varie comme indiqué sur la figure, il est égale à la moitié de cette valeur à la surface du conducteur.

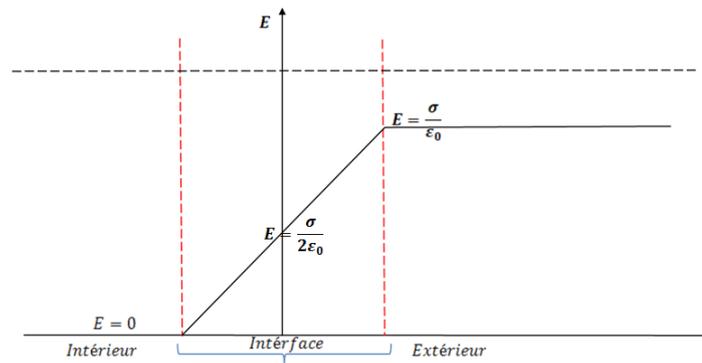


Figure 2-40: Profil du champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur

### Pression électrostatique

Les charges libres dans un conducteur ne peuvent être qu'en surface. Ces charges sont soumises à des forces de répulsions de la part des autres charges. Comme le champ est perpendiculaire à la surface en tout point de celle-ci, et dirigé vers l'extérieur, les forces le sont aussi.

Considérons un élément de surface  $ds$  portant une charge élémentaire  $dq = \sigma ds$ .

Cette charge subit une force élémentaire  $d\vec{F} = dq \vec{E}$ . Le champ à la surface est donné par  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ . Ce qui nous amène à écrire

$$d\vec{F} = \sigma ds \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = ds \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

C'est une force normale à la surface, et en la rapportant à la surface, on obtient la pression électrostatique qui vaut :

$$p = \frac{dF}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

### Pouvoir des pointes

L'expérience montre que la répartition des charges à la surface d'un conducteur n'est pas constante, et qu'elle dépend de la courbure de celle-ci. Elle n'est constante au fait que pour un conducteur parfaitement sphérique. A proximité d'une pointe le champ électrostatique est très intense, conséquence de la concentration de charge. Pour se convaincre, considérons un conducteur formé de deux conducteurs sphériques de rayons  $R_1$  et  $R_2$  suffisamment éloignées mais reliées par un fil conducteur très mince. Comme schématisé sur la figure.

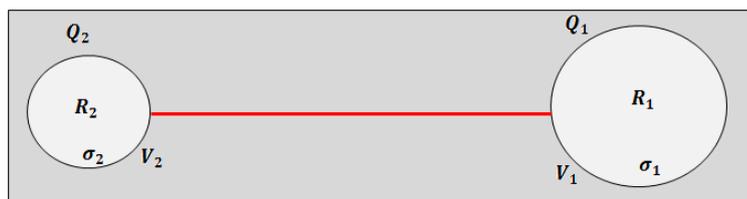


Figure 2-41: Pouvoir des pointes

Les deux sphères et le fil forme un seul conducteur et forment de ce fait un volume équipotentiel. Les deux sphères étant très éloignées l'une de l'autre sont donc au même potentiel  $V$ .

Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  les charges et soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les densités superficielles de ces deux sphères. On peut alors écrire :

$$V_1 = V_2 = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} = \sigma_1 s_1 = \sigma_2 s_2$$

Avec  $s$  la surface de la sphère donnée par :  $s = 4\pi r^2$

On trouve :  $\sigma_1 R = \sigma_2 R_2$

Ceci montre clairement que la sphère ayant le plus petit rayon porte la plus grande densité de charge. C'est que les charges ont tendance à s'accumuler sur les pointes des conducteurs. Ce résultat appelé pouvoir des pointes est d'un intérêt technologique majeur. Il est utilisé à titre

d'exemple pour la décharge de l'électricité qui est le principe des paratonnerres pour se protéger contre les foudres.

#### 2.3.5.4 Capacité propre d'un conducteur

Sur un conducteur isolé, plus on dépose de charges électriques, plus les interactions augmentent et plus le potentiel croît. On dit alors que le potentiel est proportionnel à Q et on écrit :

$$Q = CV, \text{ ce qui donne : } C = \frac{Q}{V}.$$

Où C est la capacité propre d'un conducteur. Elle ne dépend que de la forme et des dimensions du conducteur. Elle s'exprime en Coulomb par volt ou Farad et exprime l'aptitude d'un conducteur à emmagasiner des charges électriques.

#### Exemple de calcul : capacité propre d'un conducteur sphérique :

Soit un conducteur sphérique de centre o et de rayon R portant une charge Q répartie sur sa surface. Le potentiel d'un tel conducteur peut être trouver à partir du potentiel au centre O de la sphère, soit V(O).

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \iint \sigma ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Avec  $C = \frac{Q}{V}$  on trouve :  $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$ .

Un conducteur de la taille de la terre ( $R = 6400Km$ ) aura alors une capacité  $C = 4\pi\epsilon_0 \cdot R = 0.71 \cdot 10^{-3} \text{ Farad}$ . Il est clair que l'unité Fard correspond à une capacité énorme.

#### 2.3.5.5 Energie interne d'un conducteur chargé

L'énergie interne d'un conducteur isolé portant une charge Q et porté au potentiel V est le travail nécessaire à fournir pour ramener la charge depuis l'infini et la déposer sur la surface du conducteur. C'est aussi le travail des forces électrostatiques mises en jeu au cours de la charge du conducteur.

Soit un tel conducteur, son énergie interne électrostatique est donnée par :

$$W_e = \int dE_p = \int_0^Q V dq$$

Comme  $q = C V$  alors :

$$W_e = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

Cette énergie est positive, cela signifie que quel que soit  $V$ , amener un condensateur de capacité  $C$  à un tel potentiel coûte toujours de l'énergie.

### 2.3.5.6 Phénomènes d'influence entre conducteurs chargés

#### a- Influence d'un conducteur neutre isolé

Lorsqu'un conducteur neutre est plongé dans un environnement où règne un champ électrique  $\vec{E}$ , les charges positives libres se déplacent dans la direction de ce champ et les charges négatives se déplacent dans le sens contraire. Une nouvelle répartition des charges est alors créée, induisant un nouveau champ  $\vec{\epsilon}$  induit ( $\vec{E}_{in} = \vec{\epsilon} \neq \vec{0}$ ). Le phénomène se poursuit jusqu'à ce que le champ induit  $\vec{\epsilon}$  compense le champ extérieur  $\vec{E}$ .

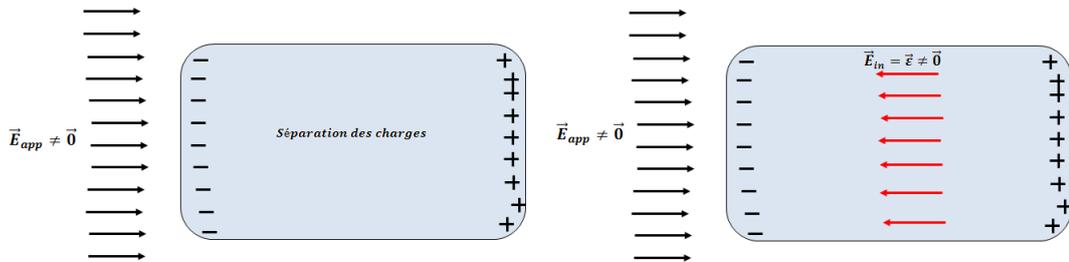


Figure 2-42: Influence d'un conducteur neutre et isolé

On a alors :

$$\vec{E}_{totint} = \vec{E}_{ext} + \vec{\epsilon} = \vec{0}$$

Et le conducteur est de nouveau en équilibre. Ce dernier n'a ni perdu, ni gagné de charges électriques. Tout ce qui a changé c'est leur arrangement à l'intérieur du conducteur, Mais aussi le potentiel puisque le conducteur se trouve plongé dans un champ non nul. Des lignes de champ partent à présent du conducteur pour l'infini, selon le schéma.

### b- Conducteur maintenu à un potentiel constant

C'est le cas lorsqu'on relie le conducteur A à la terre (la terre est neutre). Dans ce cas, le conducteur et la terre forment un conducteur unique, une même équipotentielle ( $V = 0$ ). Et le conducteur A ne peut être influencé, son potentiel demeure nul ( $V = 0$ ).

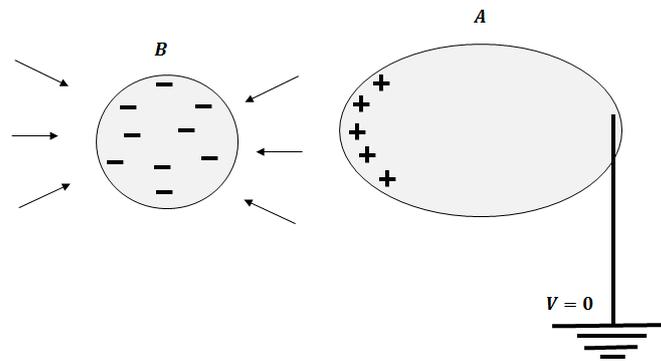


Figure 2-43: conducteur maintenu à un potentiel constant

### c- Influence en retour

La charge portée par le conducteur A influence la répartition des charges à l'intérieur du conducteur B. instantanément, il se produit une influence réciproque de B sur A, c'est l'influence en retour ou mutuelle.

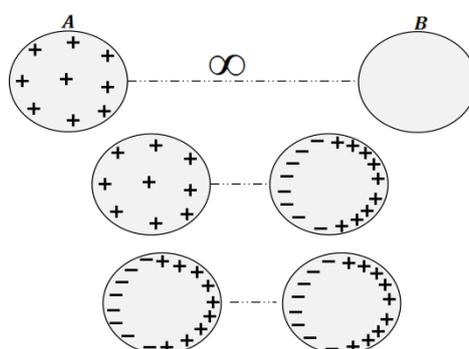


Figure 2-44: Influence retour

#### d- Influence totale

Deux conducteurs sont dits en influence totale si l'un (A) entoure parfaitement l'autre (B). Dans cette configuration, aucune ligne de champ ne peut s'échapper. Toute ligne de champ qui quitte le conducteur B ne peut aller que sur le conducteur A. les deux surfaces, surface de B et surface interne de A sont en correspondance.

Et puisque le champ à l'intérieur du conducteur A est nul, cela signifie que  $q_A + q_B = 0$ . Le conducteur B porte une charge électrique égale et opposée à celle portée par la surface intérieure de A.

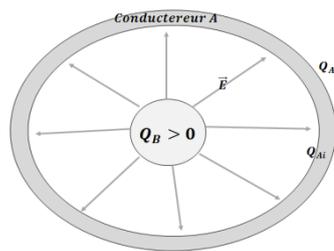


Figure 2-45: Influence totale

Si A est isolé et neutre initialement, la conservation de la charge dans A implique que sa surface extérieure porte la charge  $-q_{Ai} = q_B$

Si A est isolé et porte une charge  $Q_0$  initialement, on aura :

$$-q_{Ai} = q_B \quad \text{et} \quad Q_0 = q_{Ai} + q_{Ae}$$

Ce qui donne :  $q_{Ae} = Q_0 + q_B$ .

#### e- Effet d'écran ou blindage électrostatique : la cage de Faraday

A l'intérieur d'un conducteur en équilibre le champ électrostatique est nul. Ainsi, s'il est creux, la cavité fermée se trouve isolée électriquement du monde extérieur.

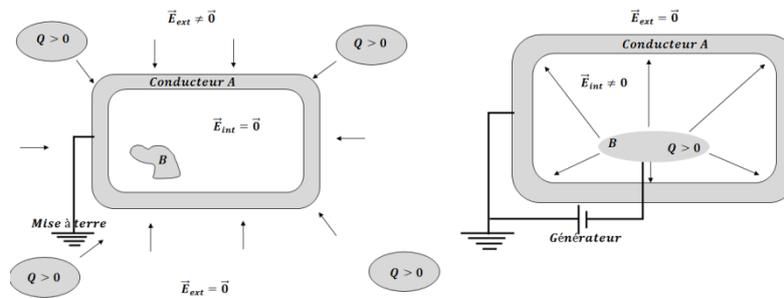


Figure 2-46: Cage de Faraday

- Si maintenant le conducteur B porte une charge nulle et le conducteur A est placé à proximité d'un conducteur chargé ( $Q > 0$ ), à l'équilibre, on aura  $Q_{Ai} = 0$ , mais un champ électrostatique non nul est mesuré à l'extérieur de A dépendant de la distribution surfacique externe de A. ainsi, et malgré la charge portée par la surface extérieure de A, dans la cavité interne règne un champ électrostatique nul.
- Si on relie le conducteur A au sol, on a  $Q_A = 0$ . Dans ce cas, le champ ( $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$ ) électrostatique mesuré à l'extérieur de A est nul et cela malgré la présence de B (chargé ou pas. C'est que l'espace extérieur est protégé de toute influence provenant de la cavité.

Nous venons de voir que tout conducteur creux maintenue à un potentiel constant constitue bien un écran électrostatique. C'est la cage de Faraday.

### 2.3.6 Condensateurs

Un condensateur est un système de deux conducteurs en influence électrostatique totale. On en trouve de deux types, des condensateurs à armatures planes rapprochées et des condensateurs à armatures courbées à influence totale.

Jusque là, nous avons vu qu'un conducteur de capacité  $C$  maintenu à un potentiel électrique  $V$  porte une charge électrique  $Q$  telle que :

$$Q = C.V$$

Soit maintenant un conducteur A de capacité  $C$  maintenu à un potentiel positif  $V$ , il portera donc une charge positive  $Q_A = C.V$ . Dans le branchement de la figure ci-dessous, le conducteur A porte une charge positive. Si un autre conducteur B porté à un potentiel nul est approché de A, une influence électrostatique aura lieu.

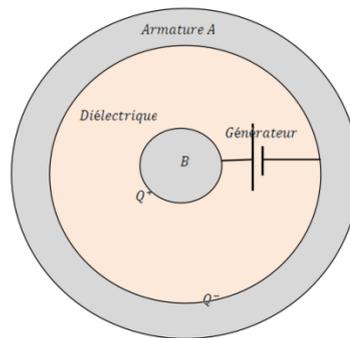


Figure 2-47: Un condensateur sphérique

Le conducteur A influence le conducteur B, sur lequel apparaissent des charges négatives. Ces dernières à leurs tour influencent le conducteur A, faisant apparaître de nouvelles charges positives à sa surface.

Il n'a pas eu de création de charges, c'est le générateur qui en a assuré le transport depuis le grand réservoir qui est la terre. A l'équilibre et sous l'effet de B, le conducteur A porte plus de charges que lorsqu'il était seul. La présence de B a entrainé une **CONDENSATION** de l'électricité sur A. les deux conducteurs A et B forment alors un condensateur.

On retient à ce stade qu'un condensateur est un système électrique constitué de deux conducteurs appelés **armatures** en influence totale, séparé par du vide ou un matériaux isolant dit **Diélectrique**.

On réalise un tel système en utilisant deux conducteurs où l'un est creux et entourant parfaitement l'autre. Les deux armatures sont séparées par le milieu isolant.

Les charges  $Q_A$  et  $Q_B$  sont égales et de signes contraires.  $|Q_A| = |Q_B| = Q$  est appelée charge du condensateur.

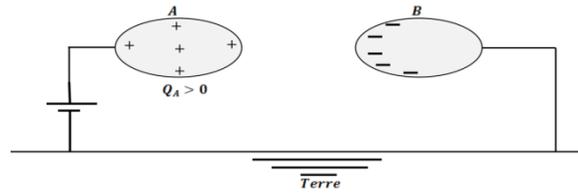


Figure 2-48: Conducteurs en regard

Si  $V$  est la différence de potentiel entre les armatures A et B, alors :  $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_B - V_A}$

### 2.3.6.1 Calcul de la capacité d'un condensateur

Le calcul de la capacité d'un condensateur passe par le calcul du rapport  $C = \frac{Q}{V}$ . Pour cela, on se donne la charge  $Q$  portée par chacune de ses armatures. On calcule en premier le champ électrostatique qui règne dans le condensateur, c'est-à-dire, en tout point de l'espace entre les deux conducteurs qui forment le condensateur. On le fait par l'application du théorème de Gauss. Ensuite, on en déduit la différence de potentiel (d.d.p) entre les armatures par le calcul de la circulation du champ électrique depuis l'armature A jusqu'à l'armature B. Le rapport  $C = \frac{Q}{V}$  est alors évident.

### 2.3.6.2 Capacité d'un condensateur plan

Soit le condensateur plan de la figure ci-après constitué de deux conducteurs plans en regard parfait, de surface  $S$  et portant la charge  $Q$ . les deux armatures sont séparées par une distance «  $e$  » .

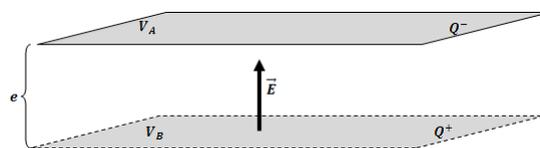


Figure 2-49: Deux conducteurs en regard

On suppose également que la charge  $Q$  est répartie de manière uniforme sur la surface du conducteur  $S$  avec une densité surfacique de charge  $= \frac{Q}{S}$  .

En négligeant les effets de bords (plan sont infini), on peut écrire :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S} \vec{n} , \text{ où } \vec{n} \text{ est un vecteur unitaire normal à la surface du conducteur.}$$

La circulation du champ électrostatique  $\vec{E}$  donne :

$$\int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_B - V_A = \frac{Q \cdot e}{\epsilon_0 \cdot S}$$

D'où  $C = \frac{Q}{V_B - V_A} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{e}$ .

Dans le domaine pratique, le vide entre les armatures est un milieu diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$ , la capacité du condensateur devient alors :

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{e}$$

On symbolise un condensateur par  $\text{---} \overset{c}{\text{||}} \text{---}$

### 2.3.6.3 Capacité d'un condensateur cylindrique

On considère deux cylindres « infini » coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_2 > R_1$ . On cherche à calculer la capacité d'une tranche de hauteur finie  $h$  d'une telle structure.

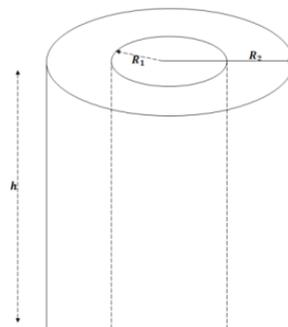


Figure 2-50: Condensateur cylindrique

On admet que chacune des armatures de hauteur  $h$  porte une charge de valeur algébrique  $Q$  répartie de manière uniforme de sorte à avoir  $= \sigma \cdot S$ .

Le champ  $\vec{E}$  entre les deux cylindres ( $R_1 < r < R_2$ ) se calcule facilement en utilisant le théorème de Gauss :

$$\oiint_{Totale} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{Base1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \oiint_{Base2} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \oiint_{Surface\ latérale} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Les deux premiers termes sont nuls puisque le champ est radial, seul subsiste le dernier terme.

$$\oiint_{Totale} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{Surface\ latérale} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$S = 2\pi \cdot r \cdot h$$

Ce qui donne:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \vec{u}_r$$

La circulation du champ électrique permet de calculer la différence de potentiel entre les deux cylindres formant le condensateur :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V(M) \text{ ou encore } dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}.$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \cdot h} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \cdot h} \log \frac{R_2}{R_1}$$

Finalement :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 2\pi\epsilon_0 \cdot h \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

La distance entre les armatures est très faible, elle est donnée par  $R_2 = R_1 + e$ .

$$C = 2\pi\epsilon_0 \cdot h \frac{1}{\log \frac{R_1 + e}{R_1}} = 2\pi\epsilon_0 \cdot h \frac{1}{\log \left(1 + \frac{e}{R_1}\right)}$$

Comme  $\frac{e}{R_1} \cong 0$  alors  $\log\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \cong \frac{e}{R_1}$

Et l'expression de la capacité C devient :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{e}$$

#### 2.3.6.4 Energie électrique emmagasinée par un condensateur

C'est l'énergie que l'on récupère lorsque l'on court-circuite les armatures d'un condensateur après l'avoir isolé de la source. C'est une énergie d'origine électrostatique correspondant au travail fournie (par un générateur) pour ramener les charges depuis un potentiel nul et les rassembler sur l'armature à un potentiel non nul. En d'autres termes, c'est l'énergie potentielle électrique des charges déposées sur les armatures du condensateur.

L'énergie emmagasinée par un condensateur de capacité C, chargée sous une tension V

et portant une charge Q est donnée par la relation :

$$E_{el} = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

#### 2.3.6.5 Association de condensateurs

On ne peut emmagasiner indéfiniment de l'énergie dans un condensateur, des limites pratiques s'imposent. Un diélectrique ne peut supporter une d.d.p supérieur à une valeur critique dite de claquage « explosion ». C'est pourquoi, pour emmagasiner plus d'énergie, il est fait appel à des assemblages de condensateurs, avec une capacité équivalente.

Il est à rappeler qu'un condensateur équivalent d'un assemblage entre deux point A et B d'un circuit électrique est unique entre ces deux points et sous la même d.d.p que l'ensemble. Il restitue à la décharge la même quantité d'électricité que le groupement.

##### a- Association en parallèle

Dans l'association en parallèle, tous les condensateurs sont soumis à la même différence de potentiel  $V = V_B - V_A$ . les condensateurs portent alors les charges

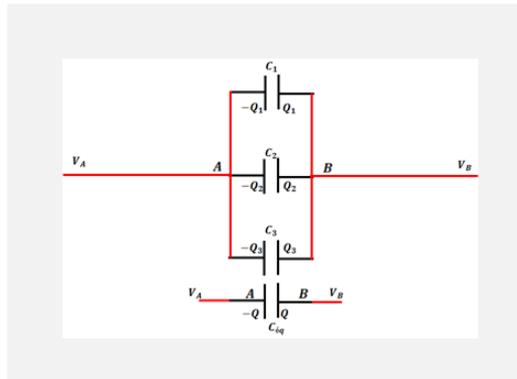


Figure 2-51: Trois condensateurs en parallèle

$$Q_1 = C_1V = Q_2 = C_2V = Q_3 = C_3V = \dots = Q_i = C_iV$$

Avec comme charge totale  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i = \sum_i Q_i$

Et pour le condensateur équivalent, on a :

$$Q = C_{eq} \cdot V = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i = V(C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_i)$$

D'où  $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_i = \sum_i C_i$

**b- Association en série**

Dans l'assemblage en série, la différence de potentiel aux bornes du condensateur équivalent est la somme des d.d.p aux bornes des condensateurs formant le groupement. Pour des raisons d'influences, toutes les armatures portent la même charge algébrique que la charge du condensateur équivalent.

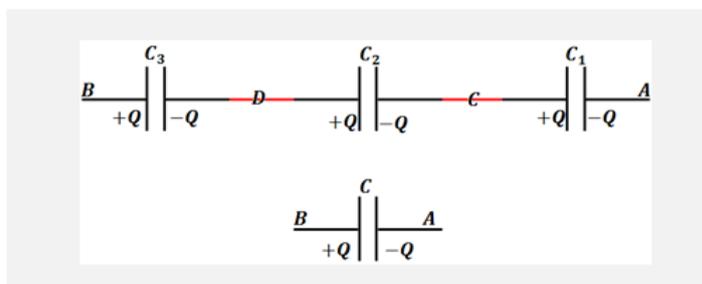


Figure 2-52: Trois condensateurs en série

$$V_B - V_A = \frac{Q}{C_{eq}} = (V_B - V_D) + (V_D - V_C) + (V_C - V_A) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

D'où :  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ , qu'on peut généraliser à :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$