Introduction et Rappels

1- Introduction

Ce cours de champ magnétique dans les machines électriques est destiné aux étudiants de Master 1, électrotechnique, option machines électriques de l'université de Béjaia.

Ce chapitre est consacré aux outils mathématiques nécessaires à l'étude du champ magnétique dans les machines électriques.
La diffusion du champ électromagnétique dans les machines électriques peut être étudiée, moyennant différentes formulations, en faisant intervenir des potentiels du champ. Une attention particulière est accordée aux problèmes bidimensionnels (2D) applicables aux machines électriques à symétrie cylindrique.

2- Rappels

2.1 Les opérateurs mathématiques (en coordonnées cartésiennes)

- Produit scalaire : $\vec{A}\cdot\vec{B} = C = A.B\cos(\vec{A},\vec{B})$ C'est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire).

- Produit vectoriel : $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C} = A.B\sin(\vec{A},\vec{B})\,\vec{w}$ ($\vec{w}$: vecteur unitaire)

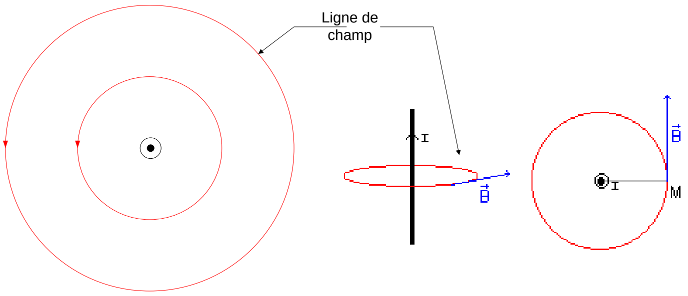
A deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$, cette opération associe leur produit vectoriel qui est un vecteur $\vec{C}$ orthogonal au plan formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$.

- Gradient : $\vec{grad}\ f(x,y,z) = \vec{\nabla} f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{v} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{w}$ indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace.

- Rotationnel : $\vec{A}\begin{cases}A_x\\A_y\\A_z\end{cases}$ $\qquad rot\ \vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{cases}\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial Ay}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{cases}$

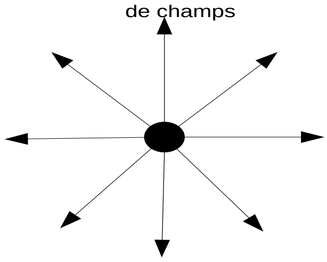
$rot\ \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point. Il donne une mesure de la « rotation » de ce champ.

Pour un champ $\vec{B}$ tel que $rot\ \vec{A} = \vec{B}$, les lignes de champ ont tendance à entourer la zone de l'espace où sont localisées les sources de champ, c'est-à-dire là où $\vec{B}$ est nul.



- Divergence : $\vec{B}\begin{cases}B_x\\B_y\\B_z\end{cases}$ $\qquad div\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x}+\dfrac{\partial B_y}{\partial y}+\dfrac{\partial B_z}{\partial z}$

  L'opérateur Divergence transforme un champ vectoriel en un champ scalaire (c'est-à-dire en une fonction) et exprime la situation de deux lignes qui vont en s'écartant...



- Laplacien

  Le Laplacien d'un champ est défini comme la divergence du gradient de ce champ. On le retrouve systématiquement en électrotechnique dans les expressions de l'équation de

Laplace, de l'équation de Poisson. Il combine et relie la description statique d'un champ (décrit par son gradient) aux effets dynamiques (la divergence) de ce champ dans l'espace et le temps.
On distingue le Laplacien scalaire :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta)$$

et le Laplacien vectoriel :

$$\vec{\Delta}.\vec{A} = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Le Laplacien d'une fonction mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et sa moyenne autour de ce point. Ainsi le Laplacien est nul ou très petit lorsque la fonction varie sans à-coups.

2.2 Propriétés

- ✓ $div(\vec{rot}\ \vec{A}) = 0$ et donc si $div\,\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{rot}\ \vec{A}$
- ✓ $\vec{rot}(\vec{grad}\,V) = 0$ et donc si $\vec{rot}\ \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{grad}\,V$
- ✓ $div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}\,\vec{rot}\ \vec{A} - \vec{A}\,\vec{rot}\ \vec{B}$
- ✓ $div(\vec{grad}\,V) = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ $(\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta)$ l'opérateur Laplacien symbolisé par la lettre grecque delta, correspond à l'opérateur nabla appliqué deux fois à la fonction considérée
- ✓ $\vec{rot}(\vec{rot}\ \vec{A}) = \vec{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\,\vec{A}$ $\qquad \Delta\,\vec{A}\begin{cases}\Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z\end{cases}$ avec $\vec{A}\begin{cases}A_x \\ A_y \\ A_z\end{cases}$

2.3 Théorèmes généraux

Théorèmes de Green $\iiint_V div\ \vec{B} = \oiint_S \vec{B}\, d\vec{S}$

Ce théorème affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume dans et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface).

Théorème d'Ostogradski (Stockes) : $\iint_S r\vec{o}t\ \vec{A}\, d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\, d\vec{l}$

2.4 Circulation d'un champ de vecteur

On appelle travail de A à B du vecteur $\vec{H}$ le long d'une courbe (C), dont un segment infinitésimal est le vecteur $\overrightarrow{dl}$, la somme des produits scalaires infinitésimaux : $\int_A^B \vec{H}.\overrightarrow{dl}$

Lorsque (C) est une courbe fermée (A = B), la position de A sur (C) n'a pas d'importance, seulement compte le sens de parcours. Le travail est alors appelé circulation de $\vec{H}$ le long du contour fermé (C) notée $\oint \vec{H}.\overrightarrow{dl}$

Lien utile : https://www.youtube.com/watch?v=nh7hf5D8H3g

2.5 Flux d'un champ de vecteur

Considérons une surface continue (S). Soit $\vec{n}$ sa normale unitaire, toujours issue du même côté. On appelle flux du vecteur $\vec{B}$ à travers la section (S) le scalaire :

$\phi = \iint \vec{B}\ \overrightarrow{ds} = \iint \vec{B}.\vec{n}\ ds$

Lien utile : https://www.youtube.com/watch?v=nh7hf5D8H3g

TD n°1

Exercice 01

1) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) évaluer chacune des expression suivantes :

$\vec{\imath} \times \vec{\jmath}$, $\vec{\jmath} \times \vec{\imath}$, $\vec{k} \times \vec{\jmath}$, $\vec{k} \times \vec{k}$, $2\vec{\imath} \times 3\vec{k}$, $(2\vec{\imath} \times 3\vec{\jmath}).5\overrightarrow{k}$

2) On considère les vecteurs :

$\vec{A} = A_1 \vec{\imath} + A_2 \vec{\jmath} + A_3\, k$ et $\vec{B} = B_1 \vec{\imath} + B_2 \vec{\jmath} + B_3\, k$

montrer que le produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

3)

Si $\vec{A} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}, \vec{B} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{C} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ déterminer les produits suivants :

$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$

Exercice 02

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{grad}\ f(x, y, z) = \vec{\nabla} f$ et du vecteur Laplacien scalaire $\nabla^2 f = \Delta f$ où f est le champ scalaire suivant :
   a) $f(x, y, z) = xy^2 - yz^2$
   b) $f(x, y, z) = xyz.\sin(xy)$
2) Déterminer la divergence $div\, \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ et le Laplacien vectoriel $\vec{\Delta}.\vec{B} = \vec{\nabla}^2 \vec{B}$ des vecteurs suivants :
   a) $\vec{B} = (2x^2y, 2xy^2, xy)$
   b) $\vec{B} = (\sin(xy)\,, 0, \cos(xy))$
   c) $\vec{B} = (x(2y + z), -y(x + z), z(x - 2y)$
3) Vérifier les relations suivantes : $div(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = 0$, $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, V) = 0$ et
   $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\, \vec{A}) - \Delta\, \vec{A}$