Sujet + corrigé / Physique 03.

Université A/Mira de Bejaia
Faculté de la technologie
Département de 2ème année ST

2012/2013

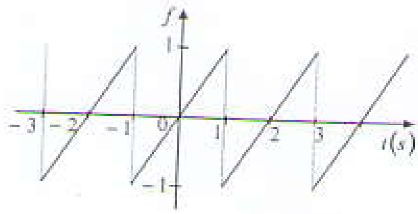
Examen de rattrapage de Physique 3

Durée : 2 heures

Ex 01 (4pts)

Soit la fonction périodique $f(t)$ représentée ci-contre.

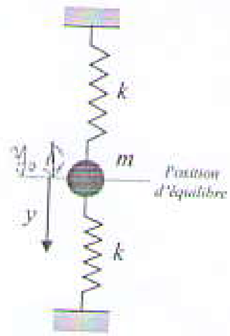
1. Calculer les coefficients b_n de Fourier de f.
2. Déduire le développement en séries de Fourier de la fonction.



Ex 02 (5pts)

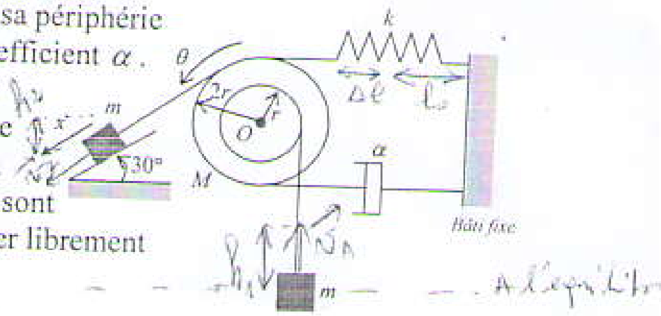
Une masse m, est intercalée entre deux ressorts identiques comme l'indique la figure ci-contre.

1. Déterminer le lagrangien L du système.
2. Déterminer la période propre T_0 du mouvement.
3. Peut-on remplacer les deux ressorts du système par un ressort équivalent. Si oui, donner dans ce cas la constante de raideur équivalente.



Ex 03 (8pts)

Un disque de masse M et de rayon $2r$, est relié à sa périphérie à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient α. Une masse m, posée sur un plan incliné, est reliée à la périphérie du disque par un fil. Une autre masse m est suspendue à un fil enroulé autour d'un sillon de rayon r gravé sur la surface du disque . Les fils sont inextensibles et non glissants. Le disque peut tourner librement autour de son axe horizontal fixe passant par O.



A l'équilibre le ressort n'était pas déformé.

1. Trouver l'énergie potentielle U, l'énergie cinétique T ainsi que la fonction de dissipation D du système.
2. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
3. Sachant que $\alpha = 21\,N.s/m$, $M = m = 1\,kg$ et $k = 7\,N/m$: Trouver la nature du mouvement.
4. Quelle est la valeur de α qui ne faut pas dépasser pour avoir des oscillations.

Questions de cours (3pts)

a. Pour augmenter le facteur de qualité $(Q = \omega_0 / 2\lambda)$, faut-il augmenter ou diminuer les frottements

b. Pour aboutir à la résonance, faut-il augmenter ou diminuer le facteur de qualité Q.

c. Puisque la pulsation de résonance $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, la condition de résonance est $Q \succ 1/\sqrt{2}$ ou $Q \prec 1/\sqrt{2}$.

Bon courage

Corrigé de l'examen de rattrapage de physique 3

2012 - 2013

Exo1 : 1. $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \leftarrow$ 0,5

D'après le graphe, on a : $\begin{cases} T = 2s,\ \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \ rad.s^{-1} \leftarrow 0{,}5 \\ f(t) = t \quad si\ -1 < t < +1 \leftarrow 0{,}5 \end{cases}$

$$\Rightarrow b_n = \int_{-1}^{+1} \underbrace{t}_{f}\ \underbrace{\sin(n\pi t)}_{g}\,dt$$

$$= \left[f \cdot G\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f' \cdot G\,dt \leftarrow 0{,}5 \quad \left(G = \int g(t)\,dt\right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) \leftarrow 0{,}5$$

2. $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) \leftarrow$ 0,5

D'après le graphe : f est impaire $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$. 0,5

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}\sin(n\pi t) \leftarrow 0{,}5$$

Exo2 : 1- $L = T - U$.

Avec $\begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \leftarrow 0{,}5 \\ \text{et} \\ U = \underbrace{-mgy}_{0{,}5} + \underbrace{\frac{1}{2}k(y+y_0)^2 + \frac{1}{2}k(y+y_0)^2}_{0{,}5} \end{cases}$

l'allongement statique y_0 se détermine par la condition d'équilibre : $\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0} = 0 \leftarrow$ 0,5

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0} = \left[-mg + 2k(y+y_0)\right]_{y=0} = -mg + 2ky_0 = 0 \leftarrow 0{,}5$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy - ky^2 - ky_0^2 - 2kyy_0$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - ky^2 - y\underbrace{(mg - 2ky_0)} - ky_0^2$$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - ky^2 + Ct^{e}$. ← 0,5

2. L'éq. de Lagrange du système est:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{\omega_0^2} y = 0 \leftarrow 0{,}5$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \leftarrow 0{,}5$$

3. Si on pose: $k_{eq} = 2k \Rightarrow$ l'éq. diff. précédente s'écrit: $\ddot{y} + \frac{k_{eq}}{m} y = 0$ qui est l'éq. diff. qui régit le mouvement d'un pendule élastique (masse + ressort). On déduit que le système des deux ressorts peut être remplacé par un ressort de raideur $k_{éq} = 2k$.

1

EXO3

1. $U = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 + mgh_1 - mgh_2$

Avec: $\Delta\ell = 2r\theta$, $h_1 = r\theta$, $h_2 = x\sin(30°) = 2r\theta\left(\frac{1}{2}\right) = r\theta$.

0,5 0,5 0,5 0,5

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}k(2r\theta)^2 + mgr\theta - mgr\theta = 2kr^2\theta^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha(2r\dot{\theta})^2 = 2\alpha r^2\dot{\theta}^2 \leftarrow 0{,}5$$

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$$

Avec: $v_1 = r\dot{\theta}$, $v_2 = \dot{x} = 2r\dot{\theta}$ et $I_0 = \frac{1}{2}M(2r)^2 = 2Mr^2$.

0,5 0,5 0,5 0,5

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(2r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(2Mr^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(2M+5m)r^2\dot{\theta}^2$$

2. L'éq. de Lagrange du système est (Pour la coordonnée θ):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{4\alpha}{2M+5m}}_{2\lambda}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{4k}{2M+5m}}_{\omega_0^2}\theta = 0 \leftarrow 0{,}5$$

0,5

3. D'après l'éq. diff. du mouvement :

$$\lambda = \frac{2\alpha}{2M+5m} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{4k}{2M+5m}$$ (0,5)

Calculons $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$.

$$\Rightarrow \Delta' = \frac{4\alpha^2}{(2M+5m)^2} - \frac{4K}{(2M+5m)} = \frac{4\times(21)^2}{7^2} - \frac{4\times 7}{7} = 32 > 0$$ (0,5)

$\Rightarrow$ le mouvement du système est apériodique ← (0,5)

4. Pour que le système ait un mouvement oscillatoire, il faut que $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ ← (0,5)

$$\Delta' = \frac{4\alpha^2}{7^2} - \frac{4\times 7}{7} < 0 \Rightarrow \alpha < 7 \text{ N.s/m}$$ ← (0,5)

Questions de cours :

a. $Q \nearrow \Rightarrow \lambda \searrow \Rightarrow \alpha \searrow \Rightarrow$ diminution des frottements (0,5) (0,5)

b. Pour aboutir à la résonance, il faut augmenter le facteur de qualité. (1)

c. $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ est définie si $\underbrace{\omega_0^2 - 2\lambda^2}_{\Delta} > 0$ (0,5)

$$\Rightarrow 2\Big(\underbrace{\frac{\omega_0}{2\lambda}}_{Q}\Big)^2 - 1 > 0 \Rightarrow Q > 1/\sqrt{2}.$$ (0,5)