CHAPITRE 3

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

1- GENERALITES

1-1. Définition de la dynamique

Le mouvement des corps a été étudié en cinématique d'un point de vue purement géométrique. La dynamique permet de faire le lien entre les forces appliquées sur un corps matériel et le mouvement qu'effectue ce dernier. Connaissant ces forces, on peut également prévoir d'autres mouvements.

1-2. Concept de masse

L'expérience montre qu'il est nécessaire d'introduire une grandeur physique mesurant la capacité d'un corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imposer. Cette propriété, qui permet de distinguer un corps d'un autre, correspond à ce qu'on appelle l'inertie d'un corps.
La grandeur ainsi introduite est fondamentale au niveau dynamique et s'appelle masse inerte ou masse inertielle du corps. Il s'agit d'un scalaire positif, qu'on note par m, qui est d'autant plus grand que le corps s'oppose au mouvement. Elle est indépendante du mouvement de l'objet, de sa forme géométrique, de la température, de la pression et du référentiel considéré. Elle se conserve pour un système fermé (qui n'échange pas de matière avec l'extérieur). La masse est une grandeur additive : si on scinde un corps de masse m en plusieurs morceaux de masses m_i, la somme des masses des morceaux est égale à la masse du corps :

$$m = \sum m_i$$

La masse d'un corps représente également la quantité de matière qui le constitue. En mécanique newtonienne, $m = 0$ exprime l'absence de matière.

1-3. Approximation du point matériel

On s'intéresse uniquement aux solides indéformables ou rigides, c'est-à-dire, dont les éléments constitutifs conservent les mêmes distances mutuelles au cours du mouvement.

En cinématique, nous avons schématisé un corps matériel par un point géométrique. Si on associe à ce point une masse finie, correspondante à celle du corps, on obtient ce qu'on appelle un point matériel (on dit également particule). Ceci est évidemment une approximation grossière valable uniquement dans le cas où :

- Les dimensions du corps sont négligeables devant celles de l'observation et du mouvement. Par exemple, on peut considérer une voiture de 5 mètre de long comme un point matériel, si on l'observe d'une distance de 10 kilomètres et si elle se déplace sur un trajet de 30 kilomètres ;
- L'objet n'effectue pas de rotation. Dans ce cas, tous les points du solide effectuent le même mouvement. On peut donc représenter le solide par un seul point matériel situé au centre de

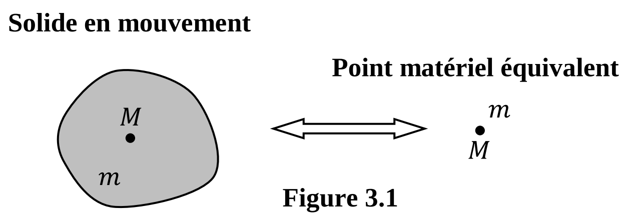

Figure 3.1

gravité ou de masse de ce solide (Fig. 3.1).

1-4. Notion de Force

On appelle force la grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou de produire un mouvement et/ou une déformation d'un corps.
Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un acteur « celui qui exerce la force » et d'un receveur « celui qui subit la force ». On dit par exemple : un corps A exerce une force sur un corps B.
La force est d'origine matérielle, elle est le résultat des caractéristiques de l'objet (masse, charge,…) et de son interaction avec son environnement matériel (les caractéristiques et la disposition des objets qui l'entourent).
Des expériences simples montrent que la force est une grandeur physique vectorielle (on la note $\vec{F}$). Elle est donc caractérisée par :

- Un point d'application : point où la force s'exerce sur le corps (généralement c'est le centre de masse) ;
- Une direction : droite selon laquelle la force s'exerce, elle est dite également ligne d'action ;
- Le sens : sens selon lequel s'exerce la force ;
- Le module : l'intensité de la force à laquelle est associée une unité adéquate.

On mesure la force au moyen d'un dynamomètre et son unité est le Newton (symbole N) dans le SI.
Généralement, la force ne dépend pas du référentiel galiléen d'étude.
Les forces sont additives : si plusieurs forces $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N\right)$ s'exercent sur un point matériel, la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'applique sur ce point matériel est égale à la somme vectorielle de ces différentes forces :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

On distingue deux types de forces :

- Les forces (ou interactions) à distance : ce sont des forces qui peuvent se manifester même s'il n'y a pas de contact physique entre les deux corps qui interagissent. Ces forces interviennent par l'intermédiaire de champs vectoriels. Citons comme exemples : la force gravitationnelle, la force électrique et la force magnétique ;
- Les forces (ou interactions) de contact ou de liaison : elles traduisent une interaction entre deux corps en contact physique. Les forces de contact comprennent, par exemple : les frottements, la tension d'un fil, la réaction d'un support…etc.

1-5. Point matériel isolé

Lorsqu'il ne subit aucune force venant de l'extérieur, un corps matériel est dit isolé mécaniquement (ou libre). C'est le cas d'un solide seul dans l'espace, loin de toute autre masse. Cette situation est évidemment inexistante. Sur la Terre, par exemple, il n'est pas possible de rencontrer des corps rigoureusement isolés. L'attraction gravitationnelle de la Terre est une force extérieure pour tout corps matériel. Par contre, on peut rencontrer des corps pseudo-isolés, si les forces extérieures agissant sur ces corps se compensent ou certaines de ces forces sont très négligeables par rapport aux autres. C'est le cas, par exemple, d'un corps se trouvant sur une surface horizontale glissante comme la surface gelée d'une patinoire. Dans ce cas, cette surface compense l'action de la Terre et élimine (diminue) les principales forces de frottements. Dans la suite, on utilisera le terme isolé pour désigner un corps matériel pseudo-isolé.

2- QUANTITE DE MOUVEMENT

2-1. Définition

La quantité de mouvement $\vec{P}$ d'une particule de masse m est définie comme étant le produit de sa masse par son vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

La quantité de mouvement est un vecteur ayant la même direction et le même sens que le vecteur vitesse et a pour unité, dans le S.I, le $kg.m/s$. Elle dépend du référentiel dans lequel est exprimé le vecteur vitesse.

La quantité de mouvement est une notion physique très importante car elle combine les deux éléments qui caractérisent l'état mécanique d'une particule : sa masse et sa vitesse.

Pour un système de N particules, on définit sa quantité de mouvement totale $\vec{P}_T$ comme étant la somme vectorielle des quantités de mouvement de chacune des particules :

$$\vec{P}_T = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots + \vec{P}_i + \cdots + \vec{P}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$$

2-2. Principe de conservation de la quantité de mouvement

Ce principe stipule qu'une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante :

$$\vec{P} = constante$$

Remarque

Une quantité de mouvement $\vec{P}$ constante signifie qu'elle est indépendante du temps :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

3- LOIS DE NEWTON

La mécanique, comme de nombreuses branches de la physique, prend ses fondements dans des principes ou des postulats que l'on ne démontre pas. Vérifiés expérimentalement, ils restent valables tant qu'il n'existe pas d'expériences les mettant en défaut. Les trois lois de Newton constituent la base de la mécanique dite classique ou newtonienne.

3-1. Première loi : le principe d'inertie

Le principe d'inertie est un postulat initialement formulé par Galilée et repris par Newton.

3-1.1. Enoncé

Le principe d'inertie repose sur l'hypothèse de l'existence d'un référentiel dit galiléen. Ce principe stipule que :

Il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, par rapport auxquels tout point matériel isolé ou libre est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Remarques :

- D'après le principe d'inertie, si un point matériel est mécaniquement isolé, alors son mouvement est rectiligne et uniforme. Il en résulte qu'un point matériel peut donc être en mouvement même s'il ne subit aucune action.
- Le principe d'inertie crée l'équivalence entre le mouvement rectiligne uniforme et le repos. Il n'existe pas d'expérience mécanique qui permet de les distinguer.
- L'application du principe d'inertie conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement d'un point matériel M :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \vec{P}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0}$$

  où $\mathcal{R}$ est un référentiel galiléen. Donc, la quantité de mouvement se conserve si le principe d'inertie est vérifié.
- On constate aussi la différence essentielle apportée par la dynamique vis-à-vis de la cinématique : les référentiels ne jouent plus tous le même rôle.

3-1.2. Référentiels galiléens

Un référentiel galiléen est donc un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique. C'est pour cette raison qu'on l'appelle des fois référentiel d'inertie ou inertiel.
Si on connaît un référentiel galiléen, on peut en connaître une infinité se déduisant du premier par une translation rectiligne uniforme.
L'expérience a montré que le référentiel de Copernic est un très bon référentiel galiléen. Tout autre référentiel appartenant à cette classe doit être en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

- Le référentiel de Copernic est le référentiel dont l'origine est le centre de masse du système solaire et ses axes pointent vers trois étoiles éloignées réputées fixes. Ce système est adapté à l'étude du mouvement de tous les corps matériels à l'intérieur de notre système solaire.
- Le référentiel héliocentrique est le référentiel dont l'origine est le centre du soleil et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Il est beaucoup plus utilisé pour décrire le mouvement des planètes par rapport au soleil. Notons que ce référentiel ne tourne pas avec le soleil.
- Le référentiel géocentrique est le référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Ce référentiel est beaucoup plus utilisé pour décrire le mouvement d'un satellite proche de la Terre. Notons que ce référentiel ne tourne pas avec la Terre.
- Le Référentiel terrestre est un référentiel dans lequel la Terre est immobile. Pour la plupart des expériences que l'on peut réaliser sur la Terre, ce repère lié au sol est un bon référentiel galiléen.

Remarque :
Chacun des référentiels qu'on vient d'énumérer a son domaine de validité. Un référentiel cesse d'être galiléen dès que son mouvement n'est plus rectiligne uniforme. Ceci dépend du temps de l'expérience et éventuellement du mouvement du référentiel. Citons un exemple :
Le référentiel terrestre a, dans le référentiel de Copernic, un mouvement de translation circulaire autour du Soleil combiné à un mouvement de rotation autour de son axe sud-nord. Par conséquent, il n'est pas adapté pour l'étude du mouvement de la lune, car le mouvement de cette dernière, qui est circulaire uniforme (existence d'une accélération normale), a une période de révolution de 30 jours en moyenne. Cette période est de loin supérieure à celle de la Terre (24 h) et le référentiel terrestre devient, au bout de quelques heures, non galiléen.

Notons enfin que la notion de référentiel absolu introduite en cinématique correspond à celle de référentiel galiléen.

3-2. Deuxième loi : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Considérons un point matériel M, de masse m et se déplaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Si ce point matériel n'est pas mécaniquement isolé, c'est-à-dire, s'il subit des forces non compensées, le principe d'inertie indique que sa quantité de mouvement ne peut pas être constante dans le temps. Le principe (ou relation) fondamental(e) de la dynamique (RFD ou PFD) nous permet de lier la cause (forces non compensées) à l'effet observé (quantité de mouvement variable). Il s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right) = \frac{dm}{dt}\vec{v}_{M/\mathcal{R}} + m\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_{M/\mathcal{R}} + m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

Si la masse du corps est constante dans le temps, la relation fondamentale de la dynamique se réduit à :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit de sa masse par son accélération.

Remarques :

- La relation fondamentale de la dynamique est une relation vectorielle, elle vaut donc pour chaque composante dans les différents systèmes de coordonnées :

  Coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$

  Coordonnées polaires et cylindriques : $\begin{cases} \sum F_\rho = ma_\rho \\ \sum F_\theta = ma_\theta \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$

  Coordonnées curvilignes (intrinsèques) : $\begin{cases} \sum F_t = ma_t \\ \sum F_n = ma_n \end{cases}$

  Coordonnées sphériques : $\begin{cases} \sum F_r = ma_r \\ \sum F_\theta = ma_\theta \\ \sum F_\varphi = ma_\varphi \end{cases}$

- Le PFD permet de déterminer le mouvement d'un point matériel si on connait la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur lui. Inversement, pour un mouvement donné, le PFD permet de déterminer la force responsable de ce mouvement.
- Le PFD est une équation différentielle du premier ordre par rapport à la vitesse et du second ordre par rapport à la position :

  $$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\frac{d^2\vec{r}_{M/\mathcal{R}}}{dt^2} = \sum \vec{F}_{ext}$$

  C'est pour cette raison qu'on appelle également le PFD, l'équation du mouvement. D'une manière générale, les forces extérieures sont des fonctions de la position, vitesse et éventuellement du temps $\vec{F}_{ext}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, mais elles peuvent également dépendre d'une ou deux de ces grandeurs ou être constantes.
- Du fait qu'il est impossible d'observer une particule isolé, le principe d'inertie ne fournit pas de méthode pour trouver un référentiel galiléen. Par contre le PFD en fournit une. En effet,

d'après ce principe, un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'une particule (sa trajectoire) peut s'expliquer en termes de forces d'origine matérielle.

3-3. Troisième loi : le principe des actions réciproques

Ce principe stipule que :

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, lorsque deux particules sont en interaction, elles exercent l'une sur l'autre des forces opposées en sens mais égales en intensité et de même direction (Fig. 3.2).

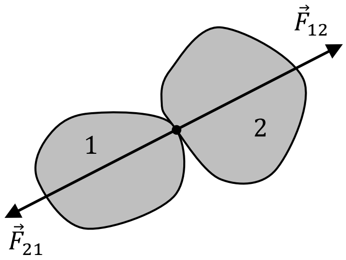

Figure 3.2

Si $\vec{F}_{12}$ est la force exercée par la particule (1) sur la particule (2) et $\vec{F}_{21}$ la force exercée par la particule (2) sur la particule (1), on a alors :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Remarques :

- Ce principe est universel. Il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'univers comme à l'échelle des particules élémentaires. Il est impossible de trouver une force qui agit de façon isolée, toute force est associée à une réaction.
- On nomme action la force exercée par l'une des deux particules et réaction celle qui est exercée par l'autre. C'est pour cette raison qu'on appelle souvent la troisième loi de Newton « la loi de l'action et de la réaction ».
- L'action et la réaction doivent être de même nature. Ces deux forces agissent suivant la droite joignant les deux corps (ligne d'action).

4- METHODE DE RESOLUTION

On appelle un système mécanique ou système matériel un ensemble d'objets, pouvant être liés entre eux ou non, rigides ou déformables, massiques ou de masse négligeable.

Ainsi on peut trouver dans un système mécanique : un ou plusieurs corps (assimilés à des points matériels) qui évoluent dans le vide, sur des supports solides ou dans des milieux fluides. Ces corps peuvent être reliés par des fils inextensibles et de masse négligeable qui passent par des poulies également de masse négligeable ou non. Ils peuvent aussi être reliés par des fils extensibles (ressorts) de masse négligeable.

D'une manière générale, résoudre un problème de dynamique revient à étudier un système mécanique. Cette étude consiste à prévoir le mouvement de ce système via la connaissance préalable des forces qui s'exercent sur ses différentes parties, ce qui revient à utiliser le PFD. Dans cette étude, il est préférable de suivre les étapes suivantes :

- Faire un résumé du problème à résoudre : données, inconnues et conditions initiales ;
- Définir le système en le distinguant de son environnement (faire un schéma) ;
- Faire un relevé exhaustif ou un bilan des forces appliquées et les représenter sur le schéma ;
- Ecrire l'expression vectorielle de la loi fondamentale ;

- Choisir un système d'axes inertiel ou galiléen. On choisira un système d'axe orthonormé de telle manière à pouvoir écrire facilement l'expression de l'accélération. On prendra notamment le trièdre de Frénet ou le trièdre polaire pour les mouvements courbes.
- Projeter cette expression sur le trièdre de base choisi. On obtient les équations de mouvement qui se présentent sous forme d'équations différentielles ou algébriques selon les cas ;
- Résoudre le système d'équations différentielles ou algébriques pour obtenir leur solution générale.

Remarque :
Si le système mécanique contient plusieurs masses, il faut appliquer cette procédure pour chaque masse.

5- FORCES

L'application de la relation fondamentale de la dynamique nécessite la connaissance préalable des formes mathématiques des forces qui s'exercent sur un point matériel ou lois de force. Dans ce qui suit, nous allons donner les lois de quelques forces.

5-1. Poids

Le poids d'un corps, en un lieu donné de la surface de la Terre, est la force attractive, notée $\vec{P}$, que la Terre exerce sur celui-ci (Fig. 3.3-a et Fig. 3.3-b). C'est cette force qui est responsable de la chute des corps au voisinage de la Terre (Fig. 3.3-c). C'est une force d'interaction à distance et son point d'application est le centre de masse du corps.

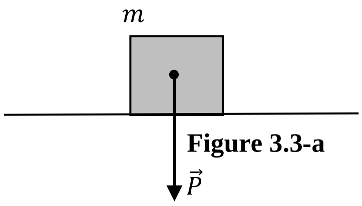

Figure 3.3-a

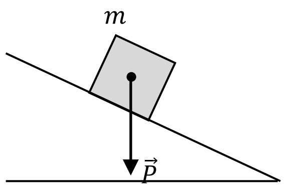

Figure 3.3-b

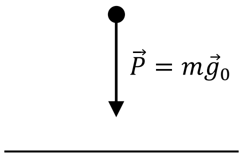

Figure 3.3-c

L'étude expérimentale de la chute libre au voisinage de la Terre, en négligeant la résistance de l'air, c'est-à-dire dans le vide, donne lieu aux conclusions suivantes :

- Le mouvement de chute libre est un mouvement à accélération constante ;
- Tous les corps tombent, en un lieu donné, avec la même accélération, que l'on note $\vec{g}_0$, et que l'on appelle accélération de la pesanteur.

D'après le PFD, le poids d'un corps de masse m est donné par la relation suivante : $\vec{P} = m\vec{g}$

Remarque :

Le vecteur $\vec{g}$ pointe à peu prés vers le centre de la Terre et sa grandeur se situe entre 9.78 m/s^2 et 9.83 m/s^2 selon les endroits. L'accélération de pesanteur vaut environs 9.81 m/s^2 en Algérie.

5-2. Force gravitationnelle

5-2.1. Loi de la gravitation universelle

Cette loi stipule qu'entre deux particules matérielles de masses m_1 et m_2, placées à une distance r l'une de l'autre (Fig. 3.4), s'exerce une force d'attraction d'intensité :

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

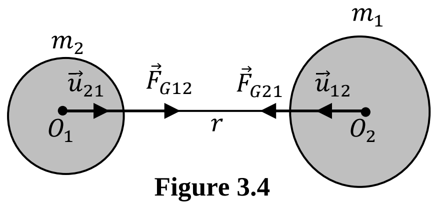

Figure 3.4

où G est la constante de la gravitation universelle qui vaut :

$$G = 6.726\ 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}.$$

La force gravitationnelle est une force d'interaction à distance et son point d'application est le centre de masse du corps.

Remarques :

- Si $\vec{F}_{G12}$ est la force gravitationnelle exercée par la particule (1) sur la particule (2) et $\vec{F}_{G21}$ la force gravitationnelle exercée par la particule (2) sur la particule (1) (Fig. 3.4), on a alors :

$$\vec{F}_{G12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

$$\vec{F}_{G21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\vec{u}_{21}$$

  où $r_{12} = r_{21} = r$ et $\vec{u}_{12}$ et $\vec{u}_{21}$ sont des vecteurs unitaires donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \ ; \ \vec{u}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

  Il est clair que :

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \Rightarrow \vec{u}_{12} = -\vec{u}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{G12} = -\vec{F}_{G21}$$

  Ce qui est prévisible d'après la troisième loi de Newton.

- Le poids d'un objet représente donc la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet se trouvant au voisinage de sa surface, on a donc :

$$\vec{F}_{G_0} = m\left(G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}\right) = m\vec{g}_0 = \vec{P}$$

  Ce qui nous donne l'expression de l'accélération de la pesanteur au niveau de la surface de la Terre :

$$\vec{g}_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}$$

  où M_T est la masse de la Terre et R_T son rayon (on suppose que la Terre est une sphère parfaite).

- Si l'objet se trouve à une hauteur h de la surface de la Terre, la force gravitationnelle exercée par la Terre sur cet objet vaut :

$$\vec{F}_G = m\left(G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}\right) = m\vec{g}(r)$$

où :

$$\vec{g}(r) = G\frac{M_T}{r^2}\vec{u} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}$$

Au voisinage de la Terre, on a évidemment $r = R_T$ $(h = 0)$ et $\vec{g}(R_T) = \vec{g}_0$.
La quantité $\vec{g}(r)$ représente l'accélération de la pesanteur au point considéré. Ainsi, cette accélération varie en fonction de la hauteur h et on peut également la relier à l'accélération de la pesanteur au niveau du sol :

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow GM_T = g_0 R_T^2$$

D'où :

$$g(r) = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}g_0$$

On conclut que $g(r)$ est une fonction décroissante de h. On peut évaluer sa valeur à une hauteur donnée sachant que $M_T = 5.98\ 10^{24}kg$ et $R_T = 6.37\ 10^6 m$.

5-2.2. Applications

5-2.2.1. Satellite géostationnaire

C'est un satellite qu'un observateur fixe par rapport à la Terre verrait dans le ciel toujours au même endroit (il parait immobile par rapport au sol). Donc, il a la même vitesse angulaire et la même période que la Terre.

Dans le référentiel géocentrique, un satellite géostationnaire de masse m décrit un mouvement circulaire uniforme de période $T = 24\ h$ et ce dernier s'inscrit dans le plan équatorial de la Terre (Fig. 3.5). On a d'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow G\frac{mM_T}{r^2} = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{M_T}{r} = v^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2$$

Ce qui donne le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire :

$$r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \Rightarrow r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

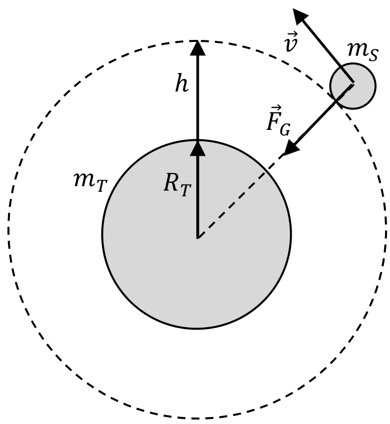

Figure 3.5

Les calculs numériques donnent, pour le rayon de l'orbite et la vitesse du satellite, les valeurs suivante :

$$r = 4.21\ 10^7 m, \qquad v = 3.08\ 10^3 m/s$$

5-2.2.2. Troisième loi de Kepler

Cette loi empirique stipule que :

« Le carré de la période de révolution d'une planète du système solaire est proportionnel au cube du rayon moyen de son orbite » :

$$\frac{T^2}{r^2} = constante = K$$

Où K est une constante dont l'unité est le s^2/m^3, elle est la même pour toute les planètes.

Les grandes planètes du système solaire ont une trajectoire presque circulaire autour du soleil. Par conséquent, r correspond au rayon de ce cercle. On a alors d'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_p\vec{a} \Rightarrow G\frac{M_S M_p}{r^2} = M_p a_n = M_p\frac{V^2}{r} \Rightarrow G\frac{M_S}{r} = V^2$$

où $M_p$et M_s sont les masses de la planète et du soleil, respectivement. Le mouvement de la planète est circulaire et uniforme de vitesse constante V. Dans ce cas, on a :

$$V = \omega r = \frac{2\pi}{T}r$$

Où ω est la vitesse angulaire de la planète et T sa période de révolution. Il en résulte que :

$$G\frac{M_S}{r} = V^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2$$

On a finalement :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = K$$

Si on prend la terre comme exemple, sachant que $M_s = 1.99\ 10^{30}kg$ et $T = 3.1678\ 10^7$s, la valeur de cette constante vaut :

$$K = 2.9734\ 10^{-19}\ s^2/m^3$$

Remarque :

Il est clair que pour deux planètes (1) et (2) de période de révolution T_1 et T_2 en mouvement sur des orbites de rayons r_1 et r_2, on a :

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

5-3. Forces de contact

Ce sont des forces qui s'exercent sur un solide en contact physique avec un milieu matériel (un autre solide, un fluide, un fil inextensible, un ressort…etc.). On les appelle également des forces de liaison.

5-3.1. Réaction du support

La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance de ce support s'appelle réaction du support. La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette réaction par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.

D'après les figures 3.6-a et 3.6-b, L'objet subit deux forces : son poids $\vec{P}$, appliqué au centre d'inertie, et la réaction du support $\vec{R}$. L'objet étant en équilibre, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

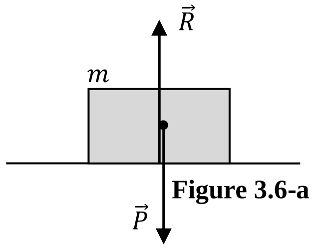

Figure 3.6-a

Cet équilibre de l'objet sur le support impose que le point d'application de la réaction soit à l'intersection de la surface de contact et de la ligne d'action du poids de l'objet.
La réaction d'un support est toujours orthogonale à ce support, même si ce dernier n'est pas horizontal (Fig. 3.6-a et Fig. 3.6-b). C'est pour cette raison qu'on l'appelle également force normale et on la note $\vec{N}$, $\vec{R}_n$ ou $\vec{C}_n$.

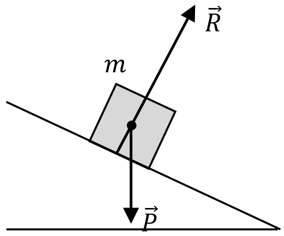

Figure 3.6-b

Remarques :

- D'après le principe des actions réciproques, l'action de l'objet sur le support horizontal est exactement opposée à la réaction du support sur l'objet et correspond donc au poids de l'objet.
- Cette réaction assure l'équilibre du corps et l'empêche de s'enfoncer dans le sol. On l'appelle également force de poussée.
- Il n'y a pas d'expression générale pour cette force, sa valeur est déterminée en fonction des autres forces en présence. Généralement, c'est une force constante. Dans le cas des figures 3.6-a et 3.6-b, on a $R = P$ et $R = P\cos\alpha$, respectivement.

5-3.2. Forces de frottement

Ces forces s'opposent au déplacement que l'on cherche à engendrer. Il importe de distinguer deux types de frottement : le frottement visqueux (contact solide-fluide) et le frottement solide (contact solide-solide).

5-3.2.1. Frottement visqueux

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau), il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. Ces forces sont réparties sur toute la surface de contact solide-fluide et la résultante de ces actions est un vecteur force proportionnel au vecteur vitesse de l'objet :

$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

avec k une constante positive. Cette force n'existe que s'il y a mouvement. Comme exemple de ce type de frottement, citons la résistance de l'air.

Remarques :

- L'expérience montre que dans le cas d'un objet sphérique de rayon r, la constante k est donnée par :

  $$k = 6\pi r\eta$$

  où η est le coefficient de viscosité du fluide.
- Dans le cas où la vitesse de l'objet devient très importante, la force de frottement visqueux n'est plus proportionnelle à la vitesse mais au carré de la vitesse :

  $$\vec{f} = -kv\vec{v}$$

5-3.2.2. Frottement solide

Considérons un objet posé sur un support horizontal. Analysons, en utilisant le PFD, le comportement de ce corps et l'évolution des actions de contact (plan / objet) lorsqu'on exerce sur lui une force de traction horizontale $\vec{F}$ graduellement croissante.

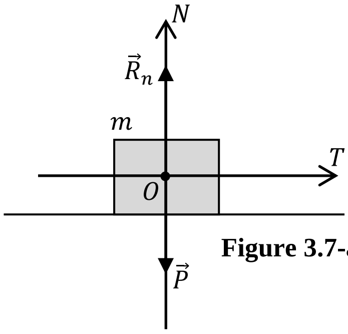

Figure 3.7-a

1er cas : $\vec{F} = \vec{0}$

Le corps est en équilibre sous l'action de deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{R}$ qui sont égales mais opposées (Fig. 3.7-a) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{P}$$

2ème cas : $\vec{F} \neq \vec{0}$

L'expérience montre qu'au dessus d'une certaine valeur limite $\vec{F}_{lim}$ de $\vec{F}$, le corps reste en équilibre. Si $\vec{F}$ dépasse $\vec{F}_{lim}$, il y a rupture de l'équilibre et le corps commence à glisser.

a- $\vec{F} < \vec{F}_{lim}$

Le corps reste en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$ et de la force $\vec{F}$. L'application du PFD permet de mettre en évidence une force de contact $\vec{C}$ (Fig. 3.7-b), telle que :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = \vec{0}$$

Soit :

$$\vec{C} = -\vec{P} - \vec{F}$$

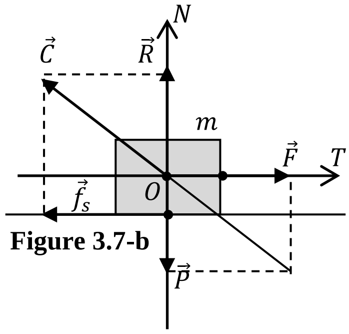

Figure 3.7-b

La projection de cette relation sur l'axe tangent au support donne :

$$F = C_t$$

La composante $\vec{C}_t$ est appelée force d'adhérence. Elle s'oppose à $\vec{F}$ et en général au déplacement du corps vers la droite. Cette force est tangente à la surface de contact. Elle est par définition une force de frottement. Comme le corps ne se déplace pas, la composante $\vec{C}_t$ est dite force de frottement statique et on la note $\vec{f}_s$.

La projection de la relation $\vec{C} = -\vec{P} - \vec{F}$ sur l'axe normal au support donne :

$$C_n = R = P = mg$$

La composante $\vec{C}_n$ est une force de poussée et représente la réaction du support.

b- $\vec{F} = \vec{F}_{lim}$

Il est clair que plus la force $\vec{F}$ augmente, plus $\vec{R}$ augmente. Cette dernière s'adapte pour compenser $\vec{F}$. Mais arrivée à la valeur critique $\vec{F}_{lim}$, $\vec{R}$ cesse d'augmenter et commence à diminuer sensiblement avec l'augmentation de la force $\vec{F}$ pour se stabiliser ensuite. Cette valeur critique de la force permet de définir le coefficient de frottement statique :

$$\mu_s = \frac{C_{0t}}{C_{0n}} = \frac{f_s}{R}$$

où $f_s = F_{lim}$. Notons que $\mu_s = \tan\alpha_{max}$ où α_{max} est l'angle de frottement statique (Fig. 3.7-c). Puisque $R = P = mg$, il est clair que dans ce cas que :

$$f_s = \mu_s R = \mu_s mg = F_{lim}$$

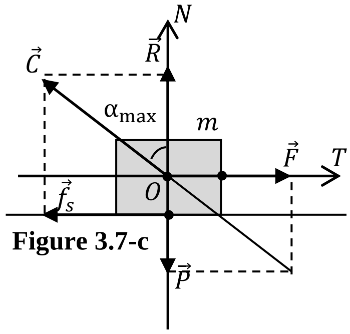

Figure 3.7-c

La force de frottement statique est donc proportionnelle à la force normale.

Le coefficient de frottement statique μ_s possède les propriétés suivantes :

- C'est un coefficient sans dimensions et $\mu_s < 1$;
- Il dépend de la nature des surfaces en contact ;
- Il est déterminé expérimentalement.

c- $\vec{F} > \vec{F}_{lim}$

L'objet se met à glisser sur la surface du support. D'après la figure 3.7-d, le PFD s'écrit dans ce cas :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P} - \vec{F}$$

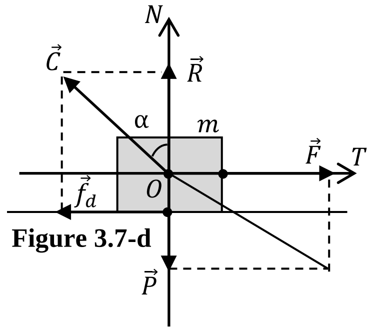

Figure 3.7-d

Comme dans le cas statique, $\vec{C}$ possède une composante tangentielle $\vec{C}_t$ qui s'oppose au mouvement du corps. Par définition, c'est une force de frottement dynamique (ou de glissement) qu'on note $\vec{f_d}$ ou $\vec{f_g}$. On introduit alors le coefficient de frottement dynamique (ou de glissement) :

$$\mu_d(\mu_g) = \frac{R_t}{R} = \frac{f_d}{R} = \tan\alpha$$

où α est l'angle de frottement dynamique (Fig. 3.7-d). Comme pour les frottements statiques, la force de frottement de glissement (ou dynamique) est également proportionnelle à la force normale :

$$f_d = \mu_d R$$

Le coefficient de frottement dynamique μ_d possède les propriétés suivantes :

- Sa valeur est inférieure à celle du coefficient de frottement statique : $\tan\alpha < \tan\alpha_{max} \Rightarrow \mu_d < \mu_s < 1$;

- Il ne dépend que de la nature des surfaces en contact ;
- Sa valeur est déterminée expérimentalement.

Résumé :

Le contact physique entre un corps solide et un support solide génère une force de contact $\vec{C}$ qui peut se décomposer en deux forces : une force normale $\vec{R}$ qui représente la réaction du support et une force de frottement $\vec{f}$:

$$\vec{C} = \vec{R} + \vec{f}$$

L'intensité de la force de frottement solide est toujours proportionnelle à la force normale :

$$f_{s,d} = \mu_{s,d} R$$

5-3.3. Forces de tension

5-3.3.1. Tension d'un fil

Lorsqu'un opérateur tire sur une extrémité d'un fil (l'autre extrémité étant fixe), celui-ci se tend. Simultanément, le fil exerce une résistance, c'est-à-dire une force sur l'opérateur. Cette force exercée par le fil sur l'opérateur est appelée tension du fil. Elle n'existe que si le fil est tendu sous l'effet d'une action extérieure.

Pour un fil de masse négligeable supportant un objet de masse m au repos (Fig. 3.8-a), la tension du fil s'oppose au poids de la masse m, on a :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

La tension est la même en tout point du fil et sa valeur dépend du mouvement du corps, c'est-à-dire, des autres forces en présence ; dans notre cas $T = P$. Cette tension a comme point d'application le point d'attache et elle est dirigée le long du fil dans la direction allant de l'objet vers le fil. Dans la majorité des applications, on considère des fils inextensibles, c'est-à-dire, que leur longueur à vide est égale à celle à charge.

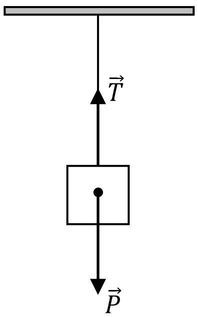

Figure 3.8-a

5-3.3.2. Force élastique

Lorsque le fil est élastique (extensible), la tension du fil peut s'exprimer en fonction de l'état d'étirement du fil et augmente linéairement avec cet étirement (allongement ou compression). Le coefficient d'allongement ou de compression s'appelle la raideur k du fil. Un exemple typique de fil élastique est le ressort (Fig. 3.8-b). La force de tension d'un ressort (force élastique) de longueur non tendu l_0 et étiré ou compressé à la longueur l s'écrit :

$$\vec{F_e} = -k(l - l_0)\vec{u} = -k\Delta l\, \vec{u}$$

avec $\Delta l = l - l_0$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé dans la direction de la déformation $(\vec{F})$. Cette expression est dite loi de Hooke. Il est clair que dans le cas d'un allongement $\Delta l = l - l_0 > 0$ et dans le cas d'une compression $\Delta l = l - l_0 < 0$. Le signe " $-$ " dans cette relation signifie que la force de tension du ressort est une force de rappel et qu'elle s'oppose à la déformation.

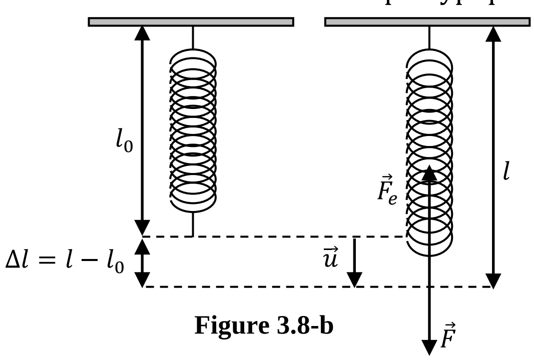

Figure 3.8-b

La loi de Hooke n'est valable que pour des ressorts supposés parfaitement élastique, c'est-à-dire, qu'après une déformation, ils reprennent leur forme et longueur initiales. Ceci suppose évidemment des petites déformations. Pour des déformations plus importantes, la relation entre force et déformation n'est plus linéaire ; si la force appliquée devient trop grande, il peut y avoir déformation permanente, voir rupture du ressort.

6- PSEUDO-FORCES OU FORCES D'INERTIE

6-1. Introduction

Le principe fondamental de la dynamique n'est valable que si l'étude est effectuée dans un référentiel galiléen. En général, les expériences de mécanique que nous sommes amenés à réaliser s'effectuent sur Terre. Il est donc logique de prendre, comme référentiel d'étude, le référentiel terrestre. Or nous avons vu que ce référentiel n'est pas rigoureusement galiléen, comme par exemple lorsque l'on cherche à expliquer la déviation vers l'est d'un corps en chute libre. De même, si une expérience est réalisée dans un véhicule en accélération par rapport à la Terre, le référentiel pratique « véhicule » n'est pas galiléen.

Il importe donc de considérer comment le principe fondamental de la dynamique doit être modifié lorsque le référentiel d'étude choisi est non galiléen.

6-2. Loi de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Soit deux référentiels dont l'un, $\mathcal{R}$, est galiléen et l'autre, $\mathcal{R}'$, non galiléen. La loi de composition des accélérations (voir chapitre 2) permet de relier l'accélération d'un point matériel M de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ à l'accélération de ce même point dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Dans le référentiel R galiléen, il est possible d'écrire la relation :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

En reportant la loi de composition des accélérations dans la relation fondamentale de la dynamique, on obtient une nouvelle équation qui fait intervenir le produit de la masse m du point matériel par les accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

Cette relation fait apparaitre deux termes supplémentaires homogènes à des forces :

- $-m\vec{a}_e$ que l'on écrit $\vec{f}_{ie}$ et qui s'appelle force d'inertie d'entraînement ;
- $-m\vec{a}_c$ que l'on écrit $\vec{f}_{ic}$ et qui s'appelle force d'inertie de Coriolis ou force d'inertie complémentaire.

Il en résulte que la relation fondamentale de la dynamique, dans un référentiel non galiléen, s'écrit :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

En tenant compte des résultats obtenus dans le chapitre 2, nous pouvons également écrire :

$$\vec{f}_{ie} = -m\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} - m\left[\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right] = -m\vec{a}_{eT} - m\vec{a}_{eR} = \vec{f}_{ieT} + \vec{f}_{ieR}$$

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r\right)$$

où les indices T et R renvoient à translation et rotation, respectivement.

Les forces d'inertie ne sont pas de véritables forces, c'est-à-dire des forces d'origine matérielle, mais plutôt des pseudo-forces, introduites pour pouvoir écrire une relation équivalente à la relation fondamentale mais applicable dans un référentiel non galiléen. Elles sont dues au mouvement non rectiligne et uniforme de $\mathcal{R}'$par rapport à $\mathcal{R}$. On les appelle parfois forces de repère.

Il est important de noter que pour tenir compte de la force de Coriolis, il faut que le corps que l'on étudie dans le référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen, qui doit être en rotation par rapport à $\mathcal{R}$, soit en mouvement dans $\mathcal{R}'$. Cette force a été introduite pour expliquer certaines expériences célèbres comme celle du pendule de Foucault et du mouvement rotatoire d'un fluide en écoulement dans une baignoire.

La force d'inertie d'entraînement est plus facile à appréhender car elle se perçoit plus facilement. Quand nous sommes installés dans un véhicule en décélération ou en accélération, nous sommes projetés vers l'avant du siège au cours d'un freinage brutal et collés au fond au cours de l'accélération. Vu de l'extérieur du véhicule, ceci est la conséquence d'une décélération ou accélération par rapport au référentiel terrestre (considéré ici comme galiléen). Vu de l'intérieur du véhicule (référentiel non galiléen), tout se passe comme si une force nous projetait vers l'avant ou nous collait sur le siège. Citons également la célèbre force centrifuge introduite pour expliquer la sensation d'être projeter quand nous sommes installés dans un véhicule en mouvement de rotation.

6-3. Exemples d'application

6-3.1. Translation non uniforme

Considérons le cas d'un pendule simple, de masse m, accroché au plafond d'un wagon d'un train en mouvement rectiligne uniformément accéléré. On se place dans le cas où le mouvement est établi (accélération constante $\vec{a}$). L'étude du mouvement de ce pendule peut se faire dans le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre, considéré galiléen, ou dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au wagon, non galiléen puisqu'en accélération constante par rapport à la Terre.

a- Étude dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (wagon) non galiléen

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ galiléen du quai. En conséquence :

$$\vec{f}_{ieR} = \vec{0} \ ; \ \vec{f}_{ic} = \vec{0}$$

Le point matériel M subit donc les forces suivantes :

Son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

La tension du fil : $\vec{T}$

La force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ieT} = -m\vec{a}_{eT} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -m\vec{a}$

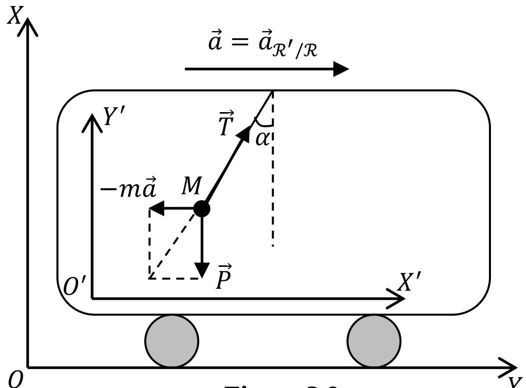

Figure 3.9-a

Ces forces sont représentées sur la figure 3.9-a. Pour l'observateur situé en O', la masse m est immobile donc $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}$. On peut donc écrire la condition d'équilibre de la masse m dans $\mathcal{R}'$:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ieT} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a} = \vec{0}$$

Il est facile de décomposer les différentes forces dans la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ du référentiel $\mathcal{R}'$. Nous avons en effet, après projection sur les deux axes $(O'X')$ et $(O'Y')$:

$$(O'X') : T \sin\alpha = ma$$
$$(O'Y') : T \cos\alpha = mg$$

On en déduit donc que l'angle d'inclinaison est donné par :

$$\tan\alpha = \frac{a}{g}$$

b- Étude dans le référentiel Terrestre $\mathcal{R}$, galiléen

Le point matériel M de masse m subit les forces suivantes :

Son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

La tension du fil : $\vec{T}$

Ces forces sont représentées sur la figure 3.9-b. Pour l'observateur en O, la masse m a le même mouvement que le wagon et donc le même vecteur accélération. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans $\mathcal{R}$ conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

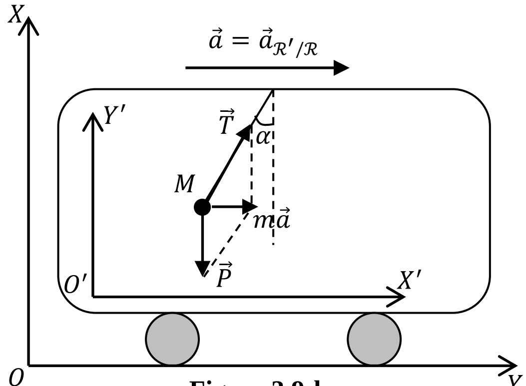

Figure 3.9-b

On en déduit donc que l'angle d'inclinaison est aussi donné par :

$$\tan\alpha = \frac{a}{g}$$

6-3.2. Mouvement de rotation

Considérons une pierre, assimilée à un point matériel M de masse m, liée par un fil inextensible et de longueur l à un axe tournant avec une vitesse de rotation constante ω.

a- Étude dans le référentiel $\mathcal{R}(OXYZ)$, galiléen

En négligeant son poids, la pierre est soumise à la seule force de tension du fil (Fig. 3.10-a). La PFD s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} = m\vec{a}$$

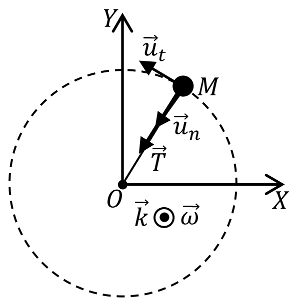

Figure 3.10-a

La projection de cette relation, dans la base de Frénet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ (Fig. 3.10-a), donne :

$$\vec{T} = m\frac{V^2}{l}\vec{u}_n = m\omega^2 l\,\vec{u}_n$$

C'est cette force dite centripète (dirigée vers le centre ; point O) qui fait tourner le fil et la pierre.

b- Étude dans le référentiel $\mathcal{R}'(OX'Y'Z')$, non galiléen

Pour l'observateur lié à la pierre, cette dernière est au repos. En conséquence :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}\ ;\ \vec{f}_{ieT} = \vec{0}\ ;\ \vec{f}_{ic} = \vec{0}$$

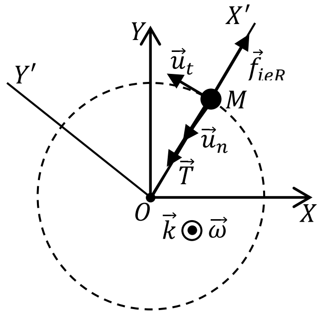

Figure 3.10-b

Le point matériel M subit donc les forces suivantes (Fig. 3.10-b) :

La tension du fil : $\vec{T}$

La force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ieR} = -m[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})] = -m\left[(\omega\vec{k}) \wedge \left((\omega\vec{k}) \wedge (-l\vec{u}_n)\right)\right]$$
$$= -ml\omega^2\vec{u}_n$$

On peut donc écrire la condition d'équilibre de la masse m dans $\mathcal{R}'$:

$$\vec{T} + \vec{f}_{ieR} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_{ieR} = -\vec{T} = -ml\omega^2\vec{u}_n$$

Pour avoir l'équilibre, l'observateur non inertiel doit introduire une force $\vec{f}_{ieR} = -m\omega^2 l\, \vec{u}_n$, dite force centrifuge.

7- MOMENT CINETIQUE D'UN POINT MATERIEL

7-1. Moment cinétique par rapport à un point

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXYZ)$, soit un point matériel M de masse m, de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et de quantité de mouvement $\vec{P}_{M/\mathcal{R}}$ (Fig. 3.11-a).

Le moment cinétique de M, par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$, est défini par :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}_{M/\mathcal{R}})$$

Donc, le moment cinétique est un vecteur (Fig. 3.11-a) :

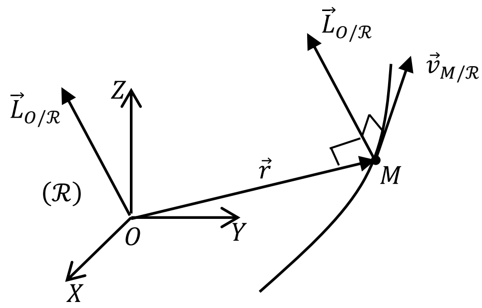

Figure 3.11-a

- Perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$;
- Orienté de façon que le trièdre $(\overrightarrow{OM}, v_{M/\mathcal{R}}, \vec{L}_O)$ soit direct ;
- De module égal à $m\|\overrightarrow{OM}\|\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\| \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = mrv \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}})$.

Remarque :

Pour un mouvement circulaire de rayon r centré sur l'origine O du plan (OXY) (Fig. 3.11-b), le vecteur position est toujours perpendiculaire à la direction du vecteur vitesse :

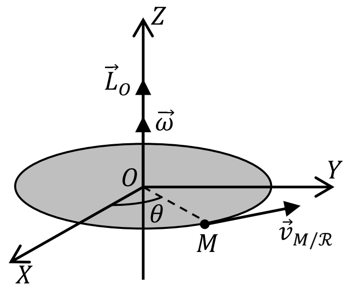

Figure 3.11-b

$$(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = 1$$

Par conséquent, le moment cinétique de M, par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$, est donné par :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = mrv\vec{k} = mr(\omega r)\vec{k} = mr^2(\omega\vec{k}) = mr^2\vec{\omega}$$

Dans un mouvement circulaire, le moment cinétique et le vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \omega\vec{k}$ ont le même sens et la même direction, c'est-à-dire, qu'ils sont portés par l'axe de rotation qui est ; dans ce cas, l'axe (OZ) (Fig. 3.11-b).

7-2. Moment d'une force par rapport à un point

On appelle moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O le vecteur :

$$\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

où M désigne le point matériel sur lequel s'applique la force $\vec{F}$ (Fig. 3.11-c).

Dans le plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$, on a :

$$\|\vec{\tau}_O(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{OM}\|\|\vec{F}\| \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = \|\vec{F}\|OH$$

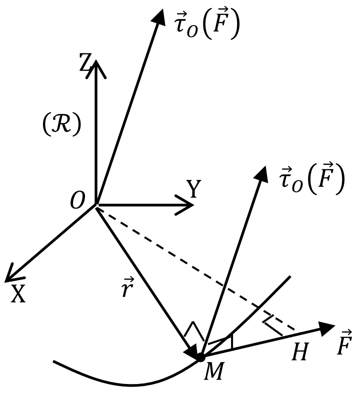

Figure 3.11-c

où le point H est la projection orthogonale du point O sur la direction de $\vec{F}$ (Fig. 3.11-c).

Si l'axe $(M, \vec{F})$ passe par O, alors $\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \vec{0}$.

Si plusieurs forces $\vec{F}_i (i = 1,2, \dots, N)$ agissent sur une particule, les moments individuels $\vec{\tau}_{i/O}(\vec{F}_i) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i$, par rapport au point O, s'ajoutent vectoriellement, c'est-à-dire que le moment résultant est :

$$\vec{\tau}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i/O}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

7-3. Théorème du moment cinétique (TMC) pour une particule

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXYZ)$, soit une particule M de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et soumise à des forces extérieures dont la résultante est $\vec{F}_{ext}$. La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M par rapport au point O s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right) = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + m\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}$$
$$= m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{a}_{M/\mathcal{R}})$$

Sachant que $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}_{ext}$, il en résulte que :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext} = \vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext})$$

<u>Théorème du moment cinétique :</u>

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées à ce point.

Remarque :

Le théorème du moment cinétique est très commode lorsque le moment des forces est nul. On obtient alors immédiatement une constante vectorielle du mouvement :

$$\vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cte}$$

7-4. Conservation du moment cinétique : force centrale

L'analyse de la relation :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{F}_{ext}) = \vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext})$$

montre que le moment cinétique est constant (sa dérivée par rapport au temps est nulle) si :

- La particule est libre ou isolée : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$;
- La résultante des forces extérieures est parallèle à $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire, que cette résultante passe constamment par le point de référence utilisé pour le moment cinétique (le point O). Dans ce cas, la force $\vec{F}$ est dite centrale. Comme exemples de forces centrales, citons :

- La force gravitationnelle, comme celle qu'exerce le soleil sur les planètes du système solaire, cette force est toujours dirigée vers le centre du soleil ;
- La force centripète dans le cas du mouvement circulaire uniforme, cette force est toujours dirigée vers le centre du cercle.

Remarques :

- Pour un point matériel, il est possible d'exprimer la dérivée du moment cinétique à l'aide du moment d'inertie I par rapport à l'axe de rotation. Nous avons vu que pour un mouvement circulaire dans la plan (OXY), le moment cinétique du point matériel est donné par :
$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = I_Z\vec{\omega}$$
Par définition, le moment d'inertie du point matériel M, distant de r de l'axe de rotation (OZ), est égal au produit de la masse du point par le carré de la distance à cet axe :
$$I_Z = mr^2$$
Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_Z\vec{\omega}) = I_Z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_Z\dot{\vec{\omega}} = I_Z\vec{\alpha} = \vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext})$$
où $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$ est le vecteur accélération angulaire. Ce résultat est évidemment valable pour tout autre axe de rotation (Δ).
Donc, il existe une analogie entre le PFD et le TMC :
$$\vec{P} \to \vec{L} \;;\; m \to I_\Delta \;;\; \vec{a} \to \vec{\alpha} \;;\; \vec{F}_{ext} \to \vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext})$$
Le théorème du moment cinétique (TMC) est équivalent à la deuxième loi de Newton (PFD). On peut utiliser indifféremment l'un ou l'autre pour l'étude d'un système mécanique, mais le PFD est beaucoup plus adapté pour les mouvements de translation et le TMC pour les mouvements de rotation.
- Un corps matériel est en équilibre si seulement si :
$$\begin{cases} \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{\tau}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = \vec{0} \end{cases}$$
Un corps rigide (un solide), à la différence d'un point matériel, peut rouler sur lui-même (même si $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$). Par conséquent, il faut tenir compte également des moments des forces extérieures. Dans la définition de l'équilibre mécanique, la nullité de la vitesse à l'instant initial est une condition nécessaire, car une accélération nulle n'implique pas nécessairement une vitesse nulle.

8- EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

Un objet de masse m, posé sur un sol horizontal, est tiré avec une force horizontale $\vec{F}$ (Fig. 3.12). Son contact avec le sol est caractérisé par les coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d.

L'objet est soumis à quatre forces (Fig. 3.12) et le PFD s'écrit dans ce cas :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$$

La projection de cette relation vectorielle sur les axes du référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXY)$ (référentiel terrestre) donne :

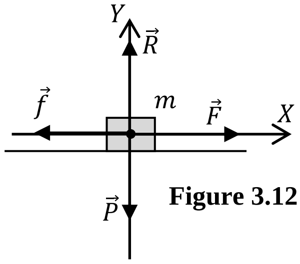

Figure 3.12

$$(OX) : F - f = ma \Rightarrow F = f + ma$$

$$(OY) : R - P = 0 \Rightarrow R = P$$

Calculons l'intensité de la force $\vec{F}$ dans les trois cas suivants :

- Au moment de la rupture de l'équilibre : $a = 0$ $(v = 0)$ et $f_s = \mu_s R = \mu_s mg$

Par conséquent : $F = f_s = \mu_s mg$

- Le corps est en mouvement uniforme : $a = 0$ $(v = cte)$ et $f_c = \mu_c R = \mu_c mg$

Par conséquent : $F = f_c = \mu_c mg$

- Le corps de déplace avec une accélération constante : $a = 1\ m/s^2$

Dans ce cas $f_c = \mu_c R = \mu_c mg$ et par conséquent : $F = f_c + ma = \mu_c mg + ma = m(a + \mu_c g)$

Exercice 2 :

Etudions le saut d'un parachutiste à partir d'un avion se trouvant à une certaine hauteur. Soit m la masse du parachutiste et $\vec{v}_0$ la vitesse initiale avec laquelle il saute de l'avion. Durant sa chute le parachutiste est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ due à la résistante de l'air.

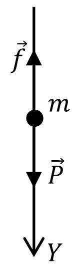

Figure 3.13

L'objet est soumis à deux forces (Fig. 3.13) et le PFD s'écrit dans ce cas :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} - k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

et qui constitue l'équation du mouvement du parachutiste. La projection de cette relation vectorielle sur l'axe (OY) (orienté vers la bas) du référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXY)$ (référentiel terrestre) donne :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

La résolution de cette équation différentielle du première ordre se fait par séparation des variables :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g\Rightarrow\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v+g=-\frac{k}{m}\left(v-\frac{mg}{k}\right)\Rightarrow\frac{dv}{v-\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}dt$$

Après intégration, on obtient :

$$\ln\left(v-\frac{mg}{k}\right)=-\frac{k}{m}t+C\Rightarrow v-\frac{mg}{k}=Ae^{-\frac{k}{m}t}\;(A=e^{c})\Rightarrow v(t)=Ae^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$$

où A est une constante d'intégration dont la valeur peut être déterminée en tenant compte de la condition initiale :

$$v(t=0)=v_0=A+\frac{mg}{k}\Rightarrow A=v_0-\frac{mg}{k}$$

On obtient finalement l'expression de la vitesse du parachutiste en fonction du temps :

$$v(t)=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$$

On peut à partir de ce résultat établir l'existence d'une vitesse limite obtenue quand le temps tend vers l'infini :

$$v_l=\frac{mg}{k}$$

On remarque que cette vitesse est indépendante des conditions initiales. On peut noter qu'il s'agit de la valeur obtenue quand l'accélération s'annule : durant la chute du parachutiste, sa vitesse augmente et par conséquent, la force de frottement augmente aussi et après un certain temps, cette force sera égale au poids du parachutiste et son accélération s'annule. Donc, Cette vitesse n'est pas obtenue instantanément mais après un régime transitoire dont la durée caractéristique est la constante $(\tau=m/k)$. La constante τ s'interprète donc physiquement comme le temps caractéristique d'établissement du régime permanent pour lequel la vitesse est égale à la vitesse limite.

Exercice 3 :

Une masse m repose, sans frottement, sur un plan horizontal. Elle est soumise à l'action d'un ressort dont la constante de raideur vaut k. A partir de sa position d'équilibre (longueur du ressort égale à sa longueur à vide), on déplace la masse d'une distance x_0 (Fig. 3.14). Dans cette position, on lâche la masse sans vitesse initiale. Etudions le mouvement de cet oscillateur.

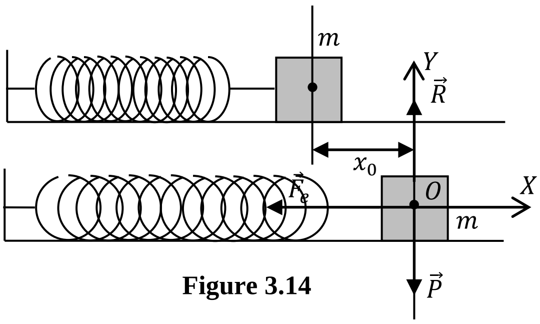

Figure 3.14

Le référentiel d'étude est celui lié au sol. Il est cartésien (OXY) et galiléen. L'axe (OX) est aligné suivant le sens du mouvement. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_e=m\vec{a}$$

La projection de cette relation sur les deux axes donne :

$$\begin{cases}(OX): -kx = ma_x \\ (OY): R - P = 0\end{cases}$$

Seule la première équation en x est intéressante, elle devient :

$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

et qui représente l'équation du mouvement. C'est une équation différentielle du second ordre linéaire et homogène. La solution générale de cette équation est :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où x_m et φ sont des constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. Le mouvement de la masse m est sinusoïdal caractérisé par sa pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$, sa période $T = (2\pi/\omega) = 2\pi\sqrt{m/k}$ et sa fréquence $f = 1/T = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

Exercice 4 :

Un pendule simple est constitué d'un solide de masse m relié à un point fixe O par un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur l. Trouvons, dans le cas des petites oscillations, l'équation du mouvement de ce pendule (par exemple, en exprimant la position angulaire $\theta(t)$ en fonction du temps) et déterminons la tension du fil $\vec{T}$.

Le référentiel d'étude est lié au sol (terrestre), auquel on associe la base de Frénet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$. La trajectoire étant plane, les vecteurs $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ sont dans le plan de la trajectoire.

Les conditions initiales sont : pour $t = 0$, on a $\theta = \theta_0$ et $\vec{v} = \vec{v}_0$

Nous allons établir l'équation du mouvement en utilisant deux méthodes équivalentes.

a- Principe fondamental de la dynamique :

La masse est soumise à deux forces (Fig. 3.15-a) et le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

On obtient par projection dans le trièdre de Frénet :

$$\begin{cases}(\vec{u}_t): -mg\sin\theta = ma_t = m\ddot{s} \\ (\vec{u}_n): T - mg\cos\theta = ma_n = m\dfrac{\dot{s}^2}{l}\end{cases}$$

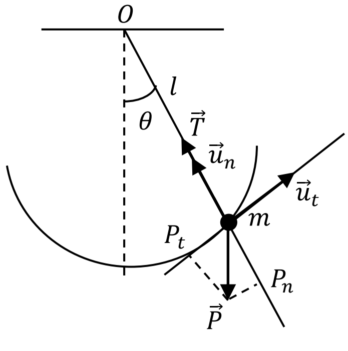

Figure 3.15-a

Soit encore, puisque $s = l\theta$:

$$\begin{cases}(\vec{u}_t): -g\sin\theta = l\ddot{\theta} \\ (\vec{u}_n): T - mg\cos\theta = ma_n = \dfrac{mv^2}{l} = ml\dot{\theta}^2\end{cases}$$

La première équation différentielle peut être résolue dans le cas des petites oscillations. Si θ est petit, cela implique que :

$$\sin\theta \approx \theta \Rightarrow -g\theta = l\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

et qui admet, comme solution :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où θ_m et φ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Le mouvement du point est donc circulaire sinusoïdal, il est caractérisé par sa pulsation $\omega = \sqrt{g/l}$, sa période $T = (2\pi/\omega) = 2\pi\sqrt{l/g}$ et sa fréquence $f = 1/T = (1/2\pi)\sqrt{g/l}$.

Déterminons maintenant la tension du fil. Sachant que :

$$v = l\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \frac{1}{l}\frac{dv}{dt} \Rightarrow l\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$$

La projection du PFD suivant $(\vec{u}_t)$, nous donne :

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta$$

Multiplions les deux cotés de cette équation par $d\theta$:

$$\frac{dv}{dt}d\theta = \frac{d\theta}{dt}dv = \dot{\theta}dv = \frac{1}{l}vdv = -g\sin\theta\, d\theta \Rightarrow vdv == -gl\sin\theta\, d\theta$$

L'intégration de cette équation entre les positions angulaires θ_0 (où $v = v_0$) et θ (où le vitesse est v), nous donne :

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Ce qui nous permet d'avoir l'expression du carré de la vitesse :

$$v^2 = v_0^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

A partir de l'équation donnant la projection du PFD suivant $(\vec{u}_n)$, on tire l'expression de la tension :

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l} = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) + \frac{mv_0^2}{l}$$

b- <u>Le théorème du moment cinétique :</u>

En coordonnées polaires (Fig. 3.15-b), la position de la masse m, sa vitesse et son moment cinétique sont donnés par :

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_\rho$$
$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = ml^2\dot{\theta}\vec{k}$$