Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2019-2020
MATHS 2 Avril 2020

Corrigé de la série de T.D. N 2 : Equations différentielles

Exercice n° 1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1.
$$(1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+2x+2xy^2=0.......(1)$$

Solution :

$$\begin{array}{llll}(1) & \Longrightarrow & (1+x^2)^2\frac{dy}{dx} & = & -2x(1+y^2)\\ & \Longrightarrow & \frac{1}{1+y^2}dy & = & \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx \text{ (cette équation est à variables séparées)}\\ & \Longrightarrow & \int\frac{1}{1+y^2}dy & = & \int\frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx=-\int 2x(1+x^2)^{-2}dx\\ & \Longrightarrow & \arctan y & = & -\frac{1}{-2+1}(1+x^2)^{-2+1}+c, c\in\mathbb{R}\\ & \Longrightarrow & \arctan y & = & \frac{1}{1+x^2}+c, c\in\mathbb{R}.\end{array}$$

Donc
$$y(x)=\tan\left(\frac{1}{1+x^2}+c\right), c\in\mathbb{R}$$
est la solution générale de (1).

2.
$$\left\{\begin{array}{l}(x^2+y^2)dx-xydy=0.......(2)\\ y(1)=2\end{array}\right. \quad ....(I)$$

Solution :

- On va résoudre d'abord l'équation (2)

$$\begin{array}{lllll}(2) & \Longrightarrow & (x^2+y^2)dx & = & xydy\\ & \Longrightarrow & \frac{dy}{dx} & = & \frac{x^2+y^2}{xy}\\ & \Longrightarrow & y' & = & \frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}\\ & \Longrightarrow & y' & = & \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\ & \Longrightarrow & y' & = & \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}+\left(\frac{y}{x}\right)........(2').\end{array}$$

Cette équation $(2')$ est homogène car elle est de la forme $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, avec $f(v)=\frac{1}{v}+v$.
On pose le changement d'inconnue suivant : $v=\frac{y}{x}$. On a

$$\begin{array}{lll}v=\frac{y}{x} & \Longrightarrow & y=xv\\ & \Longrightarrow & y'=v+xv'.\end{array}$$

Puis, on remplace y' dans $(2')$ et on obtient

$$\begin{array}{lllll}(2') & \Longrightarrow & v+xv' & = & \frac{1}{v}+v\\ & \Longrightarrow & xv' & = & \frac{1}{v}\\ & \Longrightarrow & v\frac{dv}{dx} & = & \frac{1}{x}\\ & \Longrightarrow & vdv & = & \frac{1}{x}dx\text{(cette équation est à variables séparées d'inconnue)}v\\ & \Longrightarrow & \int vdv & = & \int\frac{1}{x}dx\\ & \Longrightarrow & \frac{1}{2}v^2 & = & \ln|x|+c, c\in\mathbb{R}\\ & \Longrightarrow & v^2 & = & 2\ln|x|+2c, c\in\mathbb{R}\\ & \Longrightarrow & v & = & \pm\sqrt{2\ln|x|+C},\ C=2c\in\mathbb{R}\end{array}$$

Mais on a posé $y = xv$, alors

$$y(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}, C \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (2)
On a $y(1) = 2$ donc $y(1) = \pm 1\sqrt{2\ln|1| + C} = 2 \Rightarrow \sqrt{C} = 2 \Rightarrow C = 4$. Finalement,

$$y(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + 4}$$

est la solution du problème (I).

3.

$$y' + y = x^2 \ldots\ldots (3)$$

Solution :
(3) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (3) est

$$y' + y = 0 \ldots. (E.H)$$

Résolution de l'équation homogène $(E.H)$ **:** On a

$$(E.H) \Leftrightarrow y' = -y$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{dy}{y} &= -dx \\ \Longrightarrow \quad \textstyle\int \tfrac{dy}{y} &= \textstyle\int -dx \\ \Longrightarrow \quad \ln|y| &= -x + c, c \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow \quad |y| &= e^{-x+c}, c \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow \quad y &= C_1 e^{-x},\ C_1 = \pm e^{c} \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de $(E.H)$. Finalement, la solution générale de $(E.H)$ est

$$y(x) = ke^{-x}, k \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante : On fait varier la constante k et la solution générale de (3) sera

$$y(x) = k(x)e^{-x}.$$

On a $y'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$. Par suite

$$\begin{aligned} y' + y = x^2 \quad \Longrightarrow \quad k'(x)e^{-x} &= x^2 \\ \Longrightarrow \quad k'(x) &= x^2 e^{x} \\ \Longrightarrow \quad k(x) &= \textstyle\int x^2 e^{x} dx. \end{aligned}$$

On peut utiliser l'intégration par parties deux fois pour calculer $\int x^2 e^x dx$. Il est souvent préférable d'utiliser la méthode de coefficients indéterminés, et on cherche une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sous la forme $(ax^2 + bx + c)e^x$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int x^2 e^x dx = \left(ax^2 + bx + c\right)e^x,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left[\left(ax^2 + bx + c\right)e^x\right]' = x^2 e^x \quad \Longrightarrow \quad (2ax + b)e^x + \left(ax^2 + bx + c\right)e^x &= x^2 e^x \\ \Longrightarrow \quad \left(ax^2 + (2a + b)x + b + c\right)e^x &= x^2 e^x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=-2 \\ c=2. \end{array}\right.$$

D'où

$$k(x)=\int x^2e^x dx=\left(x^2-2x+2\right)e^x+c, c\in\mathbb{R}$$

On a $y(x)=k(x)\,e^{-x}$, donc

$$y(x)=\left(\left(x^2-2x+2\right)e^x+c\right)e^{-x}, c\in\mathbb{R}.$$

Finalement,

$$y(x)=x^2-2x+2+ce^{-x}, c\in\mathbb{R}$$

est la solution générale de (3).

Exercice n° 2. Résoudre les équations différentielles non linéaires du premier ordre suivantes :

1.
$$xy'+6y-3xy^{\frac{4}{3}}=0......(E)$$

Solution :
L'équation différentielle (E) est de Bernoulli.

$$(E)\Longleftrightarrow \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}}+6\left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}}\right)-3x=0,\text{ pour } y\neq 0.$$

Considérons le changement d'inconnue $z=\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}}=y^{\frac{-1}{3}}$. Alors, on aura

$$z'=\frac{-1}{3}y^{\frac{-4}{3}}y'.$$

D'où

$$y'=-3y^{\frac{4}{3}}z'.$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y et de y', on obtient

$$\begin{array}{rlcl} (E) & \Longleftrightarrow \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}}+6\left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}}\right)-3x & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow -3xz'+6z-3x & = & 0. \end{array}$$

D'où, pour $x\neq 0$

$$z'-\frac{2}{x}z=-1......(E').$$

L'équation (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z.
L'équation homogène associée à (E') est

$$z'-\frac{2}{x}z=0........(E'.h)$$

Résolution de l'équation $(E'.h)$: Pour $z\neq 0$,

$$\begin{array}{rl} (E'.h) & \Rightarrow \frac{z'}{z}=\frac{2}{x}, \\ & \Rightarrow \ln|z|=2\ln|x|+k,\ k\in\mathbb{R}, \\ & \Rightarrow |z|=e^{\ln x^2+k},\ k\in\mathbb{R}, \\ & \Rightarrow z=\pm e^k x^2,\ k\in\mathbb{R}, \\ & \Rightarrow z=C_1x^2,\ C_1=\pm e^k,\ C\in\mathbb{R}. \end{array}$$

$z=0$ est une solution évidente de $(E'.h)$. Finalement la solution générale de $(E'.h)$ est

$$z_h(x) = cx^2, c \in \mathbb{R},$$

Variation de la constante : On fait varier la constante c et la solution générale de (E') sera

$$z(x) = c(x)\, x^2.$$

On a $z'(x) = c'(x)\, x^2 + 2xc(x)$. Par suite,

$$\begin{array}{rcl} z' - \frac{2}{x}z = -1 \implies c'(x) & = & \frac{-1}{x^2} \\ \implies c(x) & = & \int \frac{-1}{x^2}dx \\ \implies c(x) & = & \frac{1}{x} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}$$

D'où

$$z(x) = \left(\frac{1}{x} + \lambda\right) x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

ou d'une manière équivalente,

$$z(x) = x + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E'). Mais on a

$$z = y^{\frac{-1}{3}}$$

Par suite,

$$y = \frac{1}{z^3}$$

D'où

$$y(x) = \frac{1}{(x+\lambda x^2)^3},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (E).

2.

$$y' = x^2 + 1 - 2xy + y^2 \ldots\ldots\ldots (E)$$

($y_1 = x$ est une solution paticulière)

Solution :

L'équation (E) est une équation différentielle de Riccati. Considérons le changement d'inconnue

$$y = x + z.$$

Alors,

$$y' = 1 + z'.$$

En remplaçant y et y' dans (E) on obtient

$$\begin{array}{rcl} (E) & \Leftrightarrow & 1 + z' = x^2 + 1 - 2x(x+z) + (x+z)^2, \\ & \Leftrightarrow & z' = z^2. \end{array}$$

D'où

$$\frac{z'}{z^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (E')$$

L'équation (E') est à variables séparées. Donc

$$\begin{array}{rcl} (E') & \Rightarrow & \frac{dz}{z^2} = dx. \\ & \Rightarrow & \int \frac{dz}{z^2} = \int dx, \\ & \Rightarrow & \frac{-1}{z} = x + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Par suite,

$$z(x) = \frac{-1}{x+c}, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E') . Mais

$$y = x + z,$$

donc

$$y = \frac{-1}{x+c} + x,\ c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E).

Exercice n° 3. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :

1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ldots\ldots (E_1)$$

Solution :
L'équation caractéristique de (E_1) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \ldots\ldots (E_1.C)$$

Cette équation $(E_1.C)$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'' + 2y' + y = 0 \ldots\ldots (E_2)$$

Solution :
L'équation caractéristique de (E_2) est

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \ldots\ldots (E_2.C)$$

Cette équation $(E_2.C)$ admet la racine réelle double $r = -1$. Ainsi, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = (A + Bx)e^{-x},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \ldots\ldots.. (E_3)$$

Solution :
L'équation caractéristique de (E_3) est

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \ldots\ldots.. (E_3.C)$$

Cette équation $(E_3.C)$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi, la solution générale de (E_3) est

$$y(x) = (A \sin x + B \cos x) e^x,\ A, B \in \mathbb{R}.$$

4.
$$y'' - 2\alpha y' + y = 0 \ldots\ldots (E_4)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution :

L'équation caractéristique de (E_4) est

$$r^2 - 2\alpha r + 1 = 0 \ldots\ldots (E_4.C)$$

On a $\Delta = 4\alpha^2 - 4$.

Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique $(E_4.C)$, trois cas peuvent se présenter selon le signe du discriminant Δ.

$$\begin{array}{lll} \Delta > 0 & si & \alpha \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[; \\ \Delta = 0 & si & \alpha \in \{-1, 1\} ; \\ \Delta < 0 & si & \alpha \in \left]-1, 1\right[. \end{array}$$

Premier cas : Si $\alpha \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$, on a : $\Delta > 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet deux racines réelles distinctes

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & \dfrac{2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, \\ r_2 & = & \dfrac{2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{array}$$

Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = Ae^{\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)x} + Be^{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)x}, \; A, B \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas : Si $\alpha \in \{-1, 1\}$, on a $\Delta = 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet une racine réelle double $r = \alpha$. Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = (A + Bx)\, e^{\alpha x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Troisième cas : Si $\alpha \in \left]-1, 1\right[$ on a $\Delta < 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet deux racines complexes conjuguées

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & \dfrac{2\alpha + i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2} \\ r_2 & = & \dfrac{2\alpha - i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha - i\sqrt{1 - \alpha^2}. \end{array}$$

Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = \left(A \sin\left(\sqrt{1 - \alpha^2}\right) x + B \cos\left(\sqrt{1 - \alpha^2}\right) x\right) e^{\alpha x}, \; A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 4. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1.
$$y'' - y = x^2 + x + 1 \ldots\ldots (E_1)$$

Solution :

L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y'' - y = 0 \ldots.. (E_1.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_1.H)$ est

$$r^2 - 1 = 0..... (E_1.C)$$

Les racines de l'équation $(E_1.C)$ sont : $r_1 = -1, r_2 = 1$. Ainsi, la solution générale de $(E_1.H)$ est

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{x},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_1) :
On a le second membre de l'équation (E_1) est

$$f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right) e^{0x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_1.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme :

$$y_p(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{0x} = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p^{'}(x) = 2ax + b \text{ et } y_p^{''}(x) = 2a.$$

En substituant dans l'équation (E_1) les expressions de y_p et de y_p'', on obtient

$$(E_1) \Rightarrow 2a - \left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a = 1, \\ -b = 1, \\ 2a - c = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = -3. \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^{x},\ A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_1) .

2.
$$y'' - 2y' - 8y = e^{x}...... (E_2)$$

Solution :
L'équation homogène associée à (E_2) est

$$y'' - 2y' - 8y = 0..... (E_2.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_2.H)$ est

$$r^2 - 2r - 8 = 0..... (E_2.C)$$

Les racines de l'équation $(E_2.C)$ sont : $r_1 = -2, r_2 = 4$. Ainsi, la solution générale de $(E_2.H)$ est

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_2) :
On a le second membre de l'équation (E_2) est

$$f(x) = e^x = e^{1x}.$$

Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_2.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme : $y_p(x) = ae^x$ où $a \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = ae^x \quad \text{et} \quad y_p''(x) = ae^x.$$

En substituant dans l'équation (E_2) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'', on obtient

$$(E_2) \Rightarrow ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x,$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -9a = 1 \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{-1}{9}. \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière y_p de (E_2) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{9}e^x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \frac{-1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x},\ A \text{ et } B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_2).

3.

$$y'' - 2y' = \sin x \ldots\ldots (E_3)$$

Solution :
L'équation homogène associée à (E_3) est

$$y'' - 2y' = 0 \ldots.. (E_3.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_3.H)$ est

$$r^2 - 2r = 0 \ldots.. (E_3.C)$$

Les racines de l'équation $(E_3.C)$ sont : $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de $(E_3.H)$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + Be^{2x}, \\ &= A + Be^{2x},\ A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_3) :
On a le second membre de l'équation (E_3) est

$$f(x) = \sin x = \sin(1x)\, e^{0x}.$$

Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_3.C)$, donc on cherche une solution particulière y_p de l'équation (E_3) sous la forme

$$y_p(x) = a\sin x + b\cos x,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p^{'}(x) = a\cos x - b\sin x \text{ et } y_p^{''}(x) = -a\sin x - b\cos x.$$

En substituant dans l'équation (E_3) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'', on obtient

$$\begin{aligned}(E_3) &\Rightarrow -a\sin x - b\cos x - 2(a\cos x - b\sin x) = \sin x,\\ &\Rightarrow (-a+2b)\sin x + (-b-2a)\cos x = \sin x.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a+2b=1, \\ -b-2a=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{5}, \\ b=\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Donc une solution particulière y_p de l'équation (E_3) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x, \; A, B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (E_3).

4.

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x} \ldots\ldots (E_4) \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots (I)$$

Solution :

- On va résoudre d'abord l'équation (E_4) :

L'équation homogène associée à (E_4) est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \ldots\ldots (E_4.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_4.H)$ est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \ldots\ldots (E_4.C)$$

Les racines de l'équation $(E_4.C)$ sont : $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de $(E_4.H)$ est

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{3x}, \; A, B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_4) :

On a le second membre de l'équation (E_4) est

$$f(x) = (2x+1)e^{-x}.$$

Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_4.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_4) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax+b)e^{-x}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p^{'}(x) = (-ax + a - b)e^{-x} \text{ et } y_p^{''}(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}.$$

En substituant dans l'équation (E_4) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'', on obtient

$$(E_4) \Rightarrow (ax - 2a + b)\, e^{-x} - 4\,(-ax + a - b)\, e^{-x} + 3\,(ax + b)\, e^{-x} = (2x + 1)\, e^{-x},$$

$$\Rightarrow 8ax - 6a + 8b = 2x + 1.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a = 2, \\ -6a + 8b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{16}. \end{cases}$$

Donc, une solution particulière y_p de (E_4) est

$$y_p\,(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} Y\,(x) &= y_p\,(x) + y\,(x) \\ &= \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x} + Ae^{x} + Be^{3x},\ A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_4).
Pour le problème de Cauchy (I), on a

$$Y\,(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0.....(1)$$

On a aussi

$$Y'\,(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right) e^{-x} + Ae^{x} + 3Be^{3x}.$$

D'où

$$Y'\,(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0.....(2)$$

De (1) et (2), on a

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0, \end{cases} \text{d'où :} \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

Finalement,

$$Y\,(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{3}{16}e^{3x},$$

est la solution de problème du Cauchy (I).

Exercice n° 5. (Exercice supplémentaire) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x\frac{dy}{dx} - (x+1)y = 0$. (Réponse : $y\,(x) = \lambda x e^{x}, \lambda \in \mathbb{R}$).
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$. (Réponse : $y\,(x) = \lambda x + x \ln|x|, \lambda \in \mathbb{R}$).
3. $xy' - 2y = \frac{1}{2}x^3$. (Réponse : $y\,(x) = \frac{1}{2}x^3 + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}$.).
4. $y' - \frac{1}{x}y - xy^2 = 0$. (Réponse : $y\,(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{3} + \frac{\lambda}{x}}, \lambda \in \mathbb{R}$).
5. $y' = \dfrac{1}{x}y^2 - (2 + \dfrac{1}{x})y + x + 2$, ($y_1 = x$ est une solution particulière). (Réponse : $y\,(x) = x + \frac{1}{\lambda x + 1}, \lambda \in \mathbb{R}$).
6. $y'' - 5y' + 6y = 0$. (Réponse : $y\,(x) = Ae^{2x} + Be^{3x},\ A, B \in \mathbb{R}$).

7. $4y'' + 4y' + y = 0$. (Réponse : $y(x) = (A + Bx) e^{-\frac{1}{2}x},\ A, B \in \mathbb{R}$).

8. $y'' + y' + y = 0$. (Réponse : $y(x) = \left(A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}x},\ A, B \in \mathbb{R}$).

9. $y'' - 2y' + my = 0,\ m \in \mathbb{R}$. Réponse :

Si $m \in]-\infty, 1[$, $y(x) = Ae^{\left(1+\sqrt{1-m}\right)x} + Be^{\left(1-\sqrt{1-m}\right)x},\ A, B \in \mathbb{R}$.
Si $m \in]1, +\infty[$, $y(x) = \left(A \sin\left(\sqrt{m-1}\right) x + B \cos\left(\sqrt{m-1}\right) x\right) e^{x},\ A, B \in \mathbb{R}$.
Si $m = 1$, $y(x) = (Ax + B) e^{x},\ A, B \in \mathbb{R}$.

10. $y'' - y' = 12x - 10$. (Réponse : $y(x) = A + Be^{x} - 6x^2 - 2x,\ A, B \in \mathbb{R}$).

11. $4y'' + 4y' + y = e^{\frac{-1}{2}x}$. (Réponse : $y(x) = \left(A + Bx + \frac{1}{8}x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x},\ A, B \in \mathbb{R}$).

12. $y'' + 4y = cos\, x$. (Rép : $y(x) = A \sin 2x + B \cos 2x + \frac{1}{3} \cos x,\ A, B \in \mathbb{R}$).

13. $y'' - 2y' + y = (x+2)e^{x}$. (Réponse : $y(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2 + Ax + B\right) e^{x},\ A, B \in \mathbb{R}$).