FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

1. Fonctions circulaires inverses

1.1. La fonction Arc Sinus. L'application $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ est continue et strictement croissante. C'est donc une bijection continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$. La fonction sin admet donc une fonction réciproque, appelée *arc sinus* et notée $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a donc, par définition de la bijection réciproque : $\sin(\arcsin x) = x$ $(\forall x \in [-1,1])$ et $\arcsin(\sin x) = x$ $(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. D'où :

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

La fonction arcsin est impaire, continue et strictement croissante sur $[-1,1]$. De plus, comme sin est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $\sin'(y) = \cos y > 0$, alors arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(\forall x \in]-1,1[\big).$$

Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe C^∞ sur$]-1,1[$, alors arcsin est de classe C^∞ sur$]-1,1[$.

1.2. La fonction Arc Cosinus. L'application $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ est continue et strictement décroissante. C'est donc une bijection continue et strictement décroissante de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. La fonction cos admet donc une fonction réciproque, appelée *arc cosinus* et notée $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$. On a donc, d'après la définition de la bijection réciproque : $\cos(\arccos x) = x$ $(\forall x \in [-1,1])$ et $\arccos(\cos x) = x$ $(\forall x \in [0,\pi])$. D'où :

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$

La fonction arccos n'est ni paire ni impaire, continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$. De plus, comme cos est dérivable sur $]0,\pi[$ et que $\forall x \in]0,\pi[$: $\cos'(x) = -\sin x < 0$, alors arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(\forall x \in]-1,1[\big).$$

Il en résulte que arccos est de classe C^∞ sur$]-1,1[$.

1.3. La fonction Arc Tangente. L'application $\mathrm{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. C'est donc une bijection continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. La fonction tg admet donc une fonction réciproque, appelée *arc tangente* et notée `arctan ou bien` $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a donc, d'après la définition de la bijection réciproque : $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\ x) = x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ et $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\ x) = x$ $(\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$. D'où :

$$\begin{cases} y = \mathrm{arctg}\ x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{tg}\ y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

La fonction arctg est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme tg est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $\mathrm{tg}'(y) = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathrm{tg}^2 y > 0$, alors arctg est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\operatorname{arctg})'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2} \quad \big(\forall x \in \mathbb{R}\big).$$

Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors arctg est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1.4. **La Fonction Arc Cotangente.** L'application $\cot :]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement décroissante. C'est donc une bijection continue et strictement décroissante de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$. La fonction cot admet donc une fonction réciproque, appelée *arc cotangente* et notée $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[$. On a donc, d'après la définition de la bijection réciproque : $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ et $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ $(\forall x \in]0,\pi[)$. D'où :

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccot} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cot y \\ y \in]0,\pi[\end{cases}$$

La fonction arccot est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme cot est dérivable sur $]0,\pi[$ et que $\forall y \in]0,\pi[$: $\cot'(y) = \dfrac{-1}{\sin^2 y} = -1-\cot^2 y < 0$, alors arccot est dérivable sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\operatorname{arccot})'(x) = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot} x)} = \frac{-1}{1+\cot^2(\operatorname{arccot} x)} = \frac{-1}{1+x^2} \quad \big(\forall x \in \mathbb{R}\big).$$

Il en résulte que arccot est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. Fonctions Hyperboliques

(1) On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions suivantes :

(a) La Fonction *Sinus Hyperbolique* notée sh

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sh} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}.$$

(b) La Fonction *cosinus Hyperbolique* notée ch :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ch} : \mathbb{R} & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}.$$

(c) La Fonction *Tangente Hyperbolique* notée th :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{th} : \mathbb{R} & \to &]-1, +1[\\ x & \mapsto & \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}.$$

(2) On définit la fonction *Cotangente Hyperbolique* notée coth par :

$$\begin{array}{rcl} \coth : \mathbb{R}^* & \to &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \coth x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{array}.$$

2.1. **Propriétés des fonctions hyperboliques.**

(1) La fonction ch est paire et les fonctions sh, th et coth sont impaires.

(2) La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(3) Les deux fonctions sh et th sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

(4) (a) Les fonctions ch, sh et th sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x \text{ et } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

(b) La fonction coth est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}^*$ et on a : $(\coth\ x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

(5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\text{ch } x \geq 1$; $\text{ch } x > \text{sh } x$; $(\text{ch } x + \text{sh } x)^n = \text{ch } nx + \text{sh } nx$ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$; $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$; $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$; $\text{ch } 2x = 2\text{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\text{sh}^2 x$; $\text{sh } 2x = 2\text{sh } x.\text{ch } x$; $1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$; $\text{ch}^2 x = \dfrac{1}{1 - \text{th}^2 x}$; $\text{sh}^2 x = \dfrac{\text{th}^2 x}{1 - \text{th}^2 x}$.

(6) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\text{ch } (x+y) = \text{ch } x.\text{ch } y + \text{sh } x.\text{sh } y$; $\text{ch } (x-y) = \text{ch } x.\text{ch } y - \text{sh } x.\text{sh } y$; $\text{sh } (x+y) = \text{sh } x.\text{ch } y + \text{ch } x.\text{sh } y$; $\text{sh } (x-y) = \text{sh } x.\text{ch } y - \text{ch } x.\text{sh } y$;
$\text{th } (x+y) = \dfrac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x.\text{th } y}$ pour $(1 + \text{th } x.\text{th } y \neq 0)$; $\text{th } (x-y) = \dfrac{\text{th } x - \text{th } y}{1 - \text{th } x.\text{th } y}$ pour $(\text{th } x.\text{th } y \neq 1)$.

3. Fonctions hyperboliques réciproques

3.1. **La Fonction Argument Sinus Hyperbolique.** L'application $\text{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. C'est donc une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction sh admet donc une fonction réciproque, appelée *argument sinus hyperbolique* et notée $\text{argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a donc, d'après la définition de la bijection réciproque : $\text{sh}(\text{argsh } x) = x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ et $\text{argsh}(\text{sh } x) = x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. D'où :

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \text{argsh } x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \text{sh } y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La fonction argsh est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall y \in \mathbb{R}$: $\text{sh}'(y) = \text{ch } y > 0$, alors argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\text{argsh})'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{argsh } x)} = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh } x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{argsh } x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \big(\forall x \in \mathbb{R}\big).$$

Autre expression de argsh : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a : $y = \text{argsh } x \Leftrightarrow x = \text{sh } y$
$\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1 \Longrightarrow \text{ch } y = \sqrt{1 + \text{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$
Par ailleurs, $\text{ch } y + \text{sh } y = e^y = x + \sqrt{1+x^2}$.
Il en résulte, $\text{argsh } x = y = \ln e^y = \ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.2. **La Fonction Argument Cosinus Hyperbolique.** L'application $\text{ch} : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est continue et strictement croissante. C'est donc une bijection continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. La fonction ch admet donc une fonction réciproque, appelée *argument cosinus hyperbolique* et notée $\text{argch} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$. On a donc, d'après la définition de la bijection réciproque : $\text{ch}(\text{argch } x) = x$ $(\forall x \in [1, +\infty[)$ et $\text{argch}(\text{ch } x) = x$ $(\forall x \in [0, +\infty[)$. D'où :

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \text{argch} \\ x \in [1, +\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \text{ch } y \\ y \in [0, +\infty[\end{array} \right.$$

La fonction argch n'est ni paire ni impaire, continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. De plus, elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ et en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch } x)} = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch } x)} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2(\text{argch } x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \big(\forall x \in]1, +\infty[\big).$$

Autre expression de argch : Pour $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$, on a : $y = \text{argch } x \Leftrightarrow x = \text{ch } y$
$\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1 \Longrightarrow \text{sh } y = \sqrt{\text{ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$
D'autre part, $\text{ch } y + \text{sh } y = e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$
Il en résulte, $\text{argch } x = \ln\big(x + \sqrt{x^2 - 1}\big)$, $\forall x \in [1, +\infty[$.

3.3. **La fonction Argument Tangente Hyperbolique.** L'application $\text{th} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ est continue et strictement croissante. C'est donc une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. La fonction th admet donc une fonction réciproque, appelée *argument tangente hyperbolique* et notée $\text{argth} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$. On a donc, d'après la définition de la bijection réciproque : $\text{th}(\text{argth}\ x) = x$ $(\forall x \in]-1,1[)$ et $\text{argth}(\text{th}\ x) = x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. D'où :

$$\begin{cases} y = \text{argth}\ x \\ x \in]-1,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{th}\ y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La fonction argth est impaire, continue et strictement croissante sur $]-1,1[$. De plus, elle est dérivable sur $]-1,1[$ et en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\text{argth})'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}\ x)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\text{ch}^2(\text{argth}\ x)}} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{argth}\ x)} = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(\forall x \in]-1,1[\big).$$

Autre expression de argth : Pour $x \in]-1,1[$ et $y \in \mathbb{R}$, on a : $y = \text{argth}\ x \Leftrightarrow x = \text{th}\ y$

$$x = \text{th}\ y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Longrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Longrightarrow y = \text{argth}\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$$

3.4. **La Fonction Argument cotangente Hyperbolique.** L'application $\coth : \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ est continue et strictement décroissante. C'est donc une bijection continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}^*$ dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. La fonction coth admet donc une fonction réciproque, appelée *argument cotangente hyperbolique* et notée $\text{argcoth} :]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^*$. On a donc, par définition de la bijection réciproque : $\coth(\text{argcoth}\ x) = x$ $(\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$ et $\text{argcoth}(\coth x) = x$ $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$. D'où :

$$\begin{cases} y = \text{argcoth}\ x \\ x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \coth y \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

La fonction argcoth est impaire, continue et strictement décroissante sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. De plus, elle est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque, on a :

$$(\text{argcoth})'(x) = \frac{1}{\coth'(\text{argcoth}\ x)} = \frac{1}{1-\coth^2(\text{argcoth}\ x)} = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\big).$$

Autre expression de argcoth : Pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}^*$, on a : $y = \text{argcoth}\ x \Leftrightarrow x = \coth y$

$$x = \coth y = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} \Longrightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y = \text{argcoth}\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1$$

Fin