Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques/MI

$1^{\text{ère}}$ année MI
Année universitaire
2019/2020

ANALYSE II - TD N° 1

Exercice 1.

(1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\arcsin x + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\operatorname{tg}\left(\arcsin x^2\right) = \operatorname{tg}\left(\arcsin x\right).\sin\left(\operatorname{arctg} x\right)$.

Exercice 2. Simplifier chacune des expressions suivantes :

(1) $\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha),\ \alpha \in [0, 2\pi]$

(2) $\sin\left(\arccos a + 2\operatorname{arctg} b\right)$ où $-1 \le a \le 1,\ b \in \mathbb{R}$.

(3) $\operatorname{argsh}\left(x - \dfrac{1}{4x}\right),\ x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3.

(1) A l'aide de la formule de Taylor, reste de Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[:\quad x - \frac{x^3}{2} < \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) < x.$$

(2) (a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, il existe $\theta = \theta(x) \in]0,1[$ tel que l'on ait :

$$\sin x \ = \ x - \frac{x^3}{6}\cos\left(x\theta(x)\right).$$

(b) En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$.

Exercice 4. Déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près de $\sqrt[3]{9}$.

Exercice 5. On considère la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{x(1+ax)}{1-x^2} - \ln(1+x+x^2)$; $a \in \mathbb{R}$.

(1) Écrire le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 3.

(2) (a) A quelle condition sur a le rapport $\dfrac{f(x)}{x^3}$ admet une limite finie en 0 ?

(b) Déterminer alors la valeur de cette limite.

Exercice 6. On considère la fonction : $f(x) = \dfrac{\sin x - e^{-x}\ln(x+1)}{x+1}$.

(1) Écrire le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 3.

(2) En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^{-x}\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x}\right).$$

Fin