Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

Interrogation № 2 d'analyse 1
2019/2020

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Nom :........................ Prénom :........................ Groupe :...**B5**

<u>Exercice 1:</u> (05 points).

1) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.
2) En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, et z^{2028}.
3) Linéariser $\sin^3 x$.

<u>Exercice 2:</u> (05 points).

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 \leq u_n \leq 7$.
2) Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

<u>Corrigé de l'exercice 1 :</u>

1) <u>Forme algébrique</u> : $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} i.$ **01 pt**

- <u>Forme trigonométrique</u> : on pose $z = \frac{z_1}{z_2}$, où $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, et $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Et soit $\theta = \arg z$, $\theta_1 = \arg z_1$, $\theta_2 = \arg z_2$.

$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$, et $\left.\begin{matrix} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$. D'où $z_1 = 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. **0,5 pt**

$|z_2| = \sqrt{2+2} = 2$, et $\left.\begin{matrix} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$. D'où $z_2 = 2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ **0,5 pt**

Alors, $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1, et\ \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$. Et la forme trigonométrique de z est donnée par :

$$z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}.$$ **0,5 pt**

2) <u>Déduction de</u> $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$:

En comparant la forme algébrique avec la forme trigonométrique on obtient :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad et\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$ **0,5 pt**

- <u>Déduction de z^{2028}</u> : En utilisant la formule de Moivre.

$$z^{2028} = (\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})^{2028} = \cos\frac{2028\pi}{12} + i\sin\frac{2028\pi}{12} = \cos 169\pi + i\sin 169\pi = -1 + 0i = -1,$$

$$z^{2028} = -1.$$ **01 pt**

3) <u>Linéariser $\sin^3 x$</u>: En utilisant les formules d'Euler

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow (\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{-4}$$

$$\Rightarrow (\sin x)^3 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}-2}{-4}\right) = \frac{e^{i3x}-e^{-i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}}{-8i}$$

$$= \frac{-1}{4}\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{-1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

D'où :

$$(\sin x)^3 = \frac{-1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.$$ **1,5 pt**

Corrigé de l'exercice 2:

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 \le u_n \le 7 \ldots P(n)$

i) Pour $n = 0$: on a $4 \le u_0 = 5 \le 7$, et donc $P(0)$ est vraie. **0,5 pt**

ii) On suppose que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire $4 \le u_n \le 7$, et on montre que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $4 \le u_{n+1} \le 7$.

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $4 \le u_n \le 7$

$12 \le 3u_n \le 21 \Rightarrow 16 \le 4 + 3u_n \le 25 \Rightarrow \sqrt{16} \le \sqrt{4+3u_n} \le \sqrt{25} \Rightarrow 4 \le u_{n+1} \le 5 \le 7$ **01 pt**

$\Rightarrow 4 \le u_{n+1} \le 7$. D'où $P(n+1)$ est vraie.

2) Montrons que la suite (u_n) est monotone.

On pose $u_{n+1} = f(u_n)$, telle que $f(x) = \sqrt{4+3x},\ x \in [4,7]$.

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} > 0\ \ \forall x \in [4,7]$, alors f est strictement croissante sur $[4,7]$.

f est strictement croissante sur $[4,7] \Rightarrow (u_n)$ est monotone.

Et puisque $u_0 = 5 > u_1 = \sqrt{19}$, alors (u_n) est décroissante.

01,5 pt

3) Déduction que (u_n) est convergente et calcul de $\lim u_n$.

$$\left.\begin{array}{r}(u_n)\ est\ décroissante\\ et\ (u_n)\ est\ minorée\ (u_n \ge 4)\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)\ est\ convergente.$$

01 pt

- Calcul de $l = \lim u_n$.

  On a $l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{4+3l} \Leftrightarrow l^2 = 4 + 3l \Leftrightarrow l^2 - 3l - 4 = 0 \Leftrightarrow (l-4)(l+1) = 0$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} l = 4 \\ ou \\ l = -1 \text{ (rejeté } car\ \forall n \in \mathbb{N},\ 4 \le u_n \le 7). \end{cases}$$

  01 pt

  D'où

$$\lim u_n = 4.$$

Enseignant : Boukhelifa M[d] S.