Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

Interrogation № 2 d'analyse 1
2019/2020

Université de Béjaïa

Nom :............................ Prénom :............................ Groupe : **A4**

Exercice 1: (05 points).

1) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2+2i}$.
2) En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, et z^{1980}.
3) Linéariser $\cos^3 x$.

Exercice 2: (05 points).

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4-3u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$.
2) Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Corrigé de l'exercice 1 :

1) Forme algébrique : $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2+2i} . = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} i.$ **01 pt**

- Forme trigonométrique : on pose $z = \frac{z_1}{z_2}$, où $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$, et $z_2 = 2 + 2i$.

Et soit $\theta = \arg z$, $\theta_1 = \arg z_1$, $\theta_2 = \arg z_2$.

$|z_1| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, et $\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}).$

D'où $z_1 = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. **0,5 pt**

0,5 pt

$|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, et $\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$. D'où $z_2 = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Alors, $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1, et\ \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$. Et la forme trigonométrique de z est donnée par : $z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$. **0,5 pt**

2) Déduction de $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$:

En comparant la forme algébrique avec la forme trigonométrique on obtient :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad et\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$ **0,5 pt**

- Déduction de z^{1980} : En utilisant la formule de Moivre.

$z^{1980} = (\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})^{1980} = \cos\frac{1980\pi}{12} + i\sin\frac{1980\pi}{12} = \cos 165\pi + i\sin 165\pi = -1 + 0i = -1,$

$$z^{1980} = -1.$$ **01 pt**

3) Linéariser $\cos^3 x$: En utilisant les formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow (\cos x)^2 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}$$

$$\Rightarrow (\sin x)^3 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}\right) = \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

D'où :

$$(\cos x)^3 = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$ **1,5 pt**

Corrigé de l'exercice 2:

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$ ... $P(n)$

i) Pour $n = 0$: on a $\frac{1}{3} \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$, et donc $P(0)$ est vraie. **0,5 pt**

ii) On suppose que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$, et on montre que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $\frac{1}{3} \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$

$-3 \leq -3u_n \leq -1 \Rightarrow 1 \leq 4 - 3u_n \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{4-3u_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq u_{n+1} \leq 1$ **01 pt**

D'où $P(n+1)$ est vraie.

2) Montrons que la suite (u_n) est monotone.

On pose $u_{n+1} = f(u_n)$, telle que $f(x) = \frac{1}{4-3x},\ x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

$f'(x) = \frac{3}{(4-3x)^2} > 0\ \ \forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, alors f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. **01,5 pt**

f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right] \Rightarrow (u_n)$ est monotone.

Et puisque $u_0 = \frac{1}{2} > u_1 = \frac{2}{5}$, alors (u_n) est décroissante.

3) Déduction que (u_n) est convergente et calcul de $\lim u_n$.

$$\left.\begin{array}{r} (u_n)\ est\ décroissante \\ et\ (u_n)\ est\ minorée\ (u_n \geq \frac{1}{3}) \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)\ est\ convergente.$$ **01 pt**

4) Calcul de $l = \lim u_n$.

On a $l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{1}{4-3l} \Leftrightarrow 4l - 3l^2 = 1 \Leftrightarrow -3l^2 + 4l - 1 = 0 \Leftrightarrow -3\left(l - \frac{1}{3}\right)(l-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{3} \\ ou \\ l = 1\ \left(\text{rejeté } car\ (u_n)\ est\ décroissante\ et\ u_0 = \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$ **01 pt**

D'où

$$\lim u_n = \frac{1}{3}.$$

Enseignant : Boukhelifa M[d] S.