Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Interrogation № 2 d'analyse 1

2019/2020

Nom :........................ Prénom :........................ Groupe : **B1**

Exercice 1: (05 points).

1) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{3}i}$.
2) En déduire $\cos(-\frac{\pi}{12})$, $\sin(-\frac{\pi}{12})$, et z^{2004}.
3) Linéariser $\cos^3 x$.

Exercice 2: (05 points).

Soit la suite numérique (u_n) définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3-2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
2) Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Corrigé de l'exercice 1 :

1) Forme algébrique : $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}i$. **01 pt**

- Forme trigonométrique : on pose $z = \frac{z_1}{z_2}$, où $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$, et $z_2 = 1+\sqrt{3}i$.

Et soit $\theta = \arg z$, $\theta_1 = \arg z_1$, $\theta_2 = \arg z_2$.

$|z_1| = \sqrt{2+2} = 2$, et $\left.\begin{matrix} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. D'où $z_1 = 2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. **0,5 pt**

$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$, et $\left.\begin{matrix} \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$. D'où $z_2 = 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. **0,5 pt**

Alors, $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1, et\ \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Et la forme trigonométrique de z est donnée par : $z = \cos -\frac{\pi}{12} + i\sin -\frac{\pi}{12}$. **0,5 pt**

2) Déduction de $\cos(-\frac{\pi}{12})$, $\sin(-\frac{\pi}{12})$:

En comparant la forme algébrique avec la forme trigonométrique on obtient :

$$\cos -\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \quad et\ \sin -\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$ **0,5 pt**

- Déduction de z^{2004} : En utilisant la formule de Moivre.

$$z^{2004} = (\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})^{2004} = \cos\frac{2004\pi}{12} + i\sin\frac{2004\pi}{12} = \cos 167\pi + i\sin 167\pi = -1 + 0i = -1,$$

$$z^{2004} = -1.$$ **01 pt**

3) Linéariser $\cos^3 x$: En utilisant les formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow (\cos x)^2 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}$$

$$\Rightarrow (\sin x)^3 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}\right) = \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

D'où :

$$(\cos x)^3 = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$ **1,5 pt**

<u>Corrigé de l'exercice 2:</u>

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \dots P(n)$

i) Pour $n = 0$: on a $\frac{1}{2} \leq u_0 = \frac{2}{3} \leq 1$, et donc $P(0)$ est vraie. **0,5 pt**

ii) On suppose que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, et on montre que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

$-2 \leq -2u_n \leq -1 \Rightarrow 1 \leq 3 - 2u_n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3-2u_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ **01 pt**

D'où $P(n+1)$ est vraie.

2) Montrons que la suite (u_n) est monotone.

On pose $u_{n+1} = f(u_n)$, telle que $f(x) = \frac{1}{3-2x},\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$f'(x) = \frac{2}{(3-2x)^2} > 0\ \ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. **01,5 pt**

f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow (u_n)$ est monotone.

Et puisque $u_0 = \frac{2}{3} > u_1 = \frac{3}{5}$, alors (u_n) est décroissante.

3) Déduction que (u_n) est convergente et calcul de $\lim u_n$.

$$\left.\begin{array}{r} (u_n)\ est\ décroissante \\ et\ (u_n)\ est\ minorée\ (u_n \geq \frac{1}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)\ est\ convergente.$$

01 pt

4) Calcul de $l = \lim u_n$.

On a $l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{1}{3-2l} \Leftrightarrow 3l - 2l^2 = 1 \Leftrightarrow -2l^2 + 3l - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\left(l - \frac{1}{2}\right)(l-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{2} \\ ou \\ l = 1\ \left(\text{rejeté}\ car\ (u_n)\ est\ décroissante\ et\ u_0 = \frac{2}{3}\right). \end{cases}$$

01 pt

D'où

$$\lim u_n = \frac{1}{2}.$$

Enseignant : Boukhelifa Md S.