

Nom : Prénom : Groupe : B1

Exercice 1: (06 points).

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Etudier la continuité, la dérivabilité et la continuité éventuelle de la dérivée de f sur \mathbb{R} . f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?

Réponse :

7) Etude de la continuité de f sur \mathbb{R} :

- f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est la composition et le produit des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin 2x$ qui sont continues sur $]0, +\infty[$.
- f est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est une fonction polynomiale ($x \mapsto 2x$) qui est continue sur \mathbb{R} .
- Continuité de f en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue en } x = 0.$$

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R} .

0,5 pt

01 pt

8) Etude de la dérivabilité de f sur \mathbb{R} :

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la composition et le produit des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin 2x$ qui sont dérivables sur $]0, +\infty[$.
- f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ car elle est une fonction polynomiale ($x \mapsto 2x$) qui est dérivable sur \mathbb{R} .
- Dérivabilité de f en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \sin(2\sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \Rightarrow f \text{ est dérivable en } x = 0 \text{ et } f'(0) = 2$$

Conclusion : f est dérivable sur \mathbb{R} .

0,5 pt

01 pt

- Fonction dérivée de f :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \cos 2\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

01 pt

9) Etude de la continuité de la dérivée f' sur \mathbb{R} :

- f' est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est la composition et le rapport des fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ qui sont continues sur $]0, +\infty[$.
- f' est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est une fonction constante ($x \mapsto 2$) qui est continue sur \mathbb{R} .

0,5 pt

- Continuité de f' en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \cos 2\sqrt{x} = 1 + 1 = 2 = f'(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2 = f'(0).$$

Conclusion : f' est continue sur \mathbb{R} .

Conclusion générale : La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée f' est continue sur \mathbb{R}
alors f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

01 pt

0,5 pt

Enseignant : Boukhelifa M^d S.