Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

Interrogation № 3 d'analyse 1
2019/2020

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Nom :........................ Prénom :........................ Groupe : A4

Exercice 1: (06 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\, ln(1+\sqrt{x}) & si\ x \geq 0 \\ x & si\ x < 0 \end{cases}$

Etudier la continuité, la dérivabilité et la continuité éventuelle de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Réponse :

4) **Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$:**

- f est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est la composition et le produit des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ qui sont continues sur $]0,+\infty[$. **0,5 pt**
- f est continue sur $]-\infty,0[$ car elle est une fonction polynomiale ($x \mapsto x$) qui est continue sur $\mathbb{R}$.
- Continuité de f en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, ln\left(1+\sqrt{x}\right) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0 = f(0)$$ **01 pt**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue en } x = 0.$$

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

5) **Etude de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$:**

- f est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est la composition et le produit des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ qui dérivables sur $]0,+\infty[$. **0,5 pt**
- f est dérivable sur $]-\infty,0[$ car elle est une fonction polynomiale ($x \mapsto x$) qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Dérivabilité de f en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\, ln(1+\sqrt{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$ **01 pt**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \Rightarrow f \text{ est dérivable en } x = 0\ et f'(0) = 1$$

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Fonction dérivée de f :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{x})} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$ **01 pt**

6) **Etude de la continuité de la dérivée f' sur $\mathbb{R}$:**

- f' est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est la composition et le rapport des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ qui sont continues sur $]0,+\infty[$. **0,5 pt**
- f' est continue sur $]-\infty,0[$ car elle est une fonction constante ($x \mapsto 1$) qui est continue sur $\mathbb{R}$.

- Continuité de $\boldsymbol{f'}$ en $x = 0$:
  $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\boldsymbol{ln(1+\sqrt{x})}}{\boldsymbol{2\sqrt{x}}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2(1+\sqrt{x})}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = f'(0)$

  01 pt

  $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 = f'(0)$.

  Conclusion : $\boldsymbol{f'}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  Conclusion générale : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

  0,5 pt

Enseignant : Boukhelifa M^d S.