Faculté des Sciences exactes
Département de M/MI
Année d'étude : 1ère année MI

Interrogation № 3 d'analyse 1
2019/2020

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Nom :........................ Prénom :........................ Groupe : B5.

<u>Exercice 1:</u> (06 points)

Soit f la fonction définie par : $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \sqrt{x}\, sin(\sqrt{x}) & si\ x \geq 0 \\ x & si\ x < 0 \end{cases}$

Etudier la continuité, la dérivabilité et la continuité éventuelle de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Réponse :

1) **Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$:**
   - f est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est la composition et le produit des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ qui sont continues sur $]0,+\infty[$. **0,5 pt**
   - f est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est une fonction polynomiale ($x \mapsto x$) qui est continue sur $\mathbb{R}$.
   - <u>Continuité de f en $x = 0$</u> :

     $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, sin(\sqrt{x}) = 0 = f(0)$

     $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0 = f(0)$ **01 pt**

     $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow f$ est continue en $x = 0$.

     <u>Conclusion :</u> f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) **Etude de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$:**
   - f est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est la composition et le produit des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ qui sont dérivables sur $]0,+\infty[$. **0,5 pt**
   - f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ car elle est une fonction polynomiale ($x \mapsto x$) qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - <u>Dérivabilité de f en $x = 0$</u> :

     $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\, sin(\sqrt{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

     $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$ **01 pt**

     $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \Rightarrow f$ est dérivable en $x = 0$ $et f'(0) = 1$

     <u>Conclusion :</u> f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - <u>Fonction dérivée de f :</u>

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\cos\sqrt{x} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

01 pt

3) **Etude de la continuité de la dérivée f' sur $\mathbb{R}$:**
   - $\boldsymbol{f'}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est la composition et le rapport des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ qui sont continues sur $]0,+\infty[$. **0,5 pt**
   - $\boldsymbol{f'}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est une fonction constante ($x \mapsto 1$) qui est continue sur $\mathbb{R}$.

- Continuité de $\boldsymbol{f'}$ en $x = 0$:

  $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\boldsymbol{sin}(\sqrt{x})}{\mathbf{2}\sqrt{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{cos}\, \sqrt{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = f'(0)$

  01 pt

  $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 = f'(0)$.

  Conclusion : $\boldsymbol{f'}$est continue sur $\mathbb{R}$.

  Conclusion générale : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

  0,5 pt

Enseignant : Boukhelifa M[d] S.