جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Bejaia

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département ST2

2012/2013

Examen de rattrapage de Maths3

Exo 1 :

Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n e^{-\frac{1}{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^4+1}.$$

Exo 2 :

Donner la nature des séries alternées suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2+(-1)^n}$$

Exo 3 :

On considère la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

D son domaine de convergence, I son intervalle de convergence et R son rayon de convergence.

1. Calculer R, déduire I.
2. Déterminer D .

Indication : Utiliser $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$

Exo 4 :

Calculer la somme de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!+1}{n!} x^{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$$

Solutions

Exo 1

nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\, e^{-n}$?

$u_n = \sqrt{n}\, e^{-n} > 0,\ \forall n \geq 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ conv $\longrightarrow$ 1,25

- $v_n = n^n e^{-\frac{1}{n}} > 0,\ \forall n \geq 1$.

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n\to+\infty} n\, e^{-\frac{1}{n^2}} = +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} v_n$ div 1,25

- $w_n = \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} > 0,\ \forall n$

on a $w_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}\quad \forall n \geq 1$

la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ cv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} w_n$ cv (par comparaison) 1,25

- $k_n = \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^4+1} > 0;\ \forall n > 0$

$\log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ q^d n suffisamment grand.

$\left(k_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n^4+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^5} \right)$

$\sum \frac{1}{n^5}$ cv $\overset{cq}{\Longrightarrow} \sum k_n$ cv 1,25

Exo 2

- $U_n = \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ $\xrightarrow{\text{Tend}} 0$ $\Longrightarrow \sum (-1)^n U_n$ C.V (2,5)

  $\searrow$ (car $e^{\sqrt{n}} \nearrow$)

- $\cos n\pi = (-1)^n, \forall n$

  donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\pi}{n^2+(-1)^n} \equiv \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$.

  $\left\{ \begin{array}{l} W_n = \dfrac{1}{n^2+(-1)^n} \text{ décroît (car } n^2+(-1)^n \nearrow) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0 \text{ , d'après le critère de Leibniz} \end{array} \right.$

  on $\sum W_n$ CV (2,5)

Exo 3

$\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{n^n}{n!} = \lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{-1}$

$R = \dfrac{1}{\rho} = e \longrightarrow$ (1,5)

$I =]-e, e[\longrightarrow$ (0,5)

- En $x = e$, on obtient

  $\sum \dfrac{n!}{n^n} e^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\, e^n}{n^n} = +\infty \longrightarrow$

  La C.N.C n'est pas satisfaite, la série en question diverge en $x = e$. (1,25)

En $x = -e$, on obtient $\sum (-1)^n \dfrac{n!}{n^n} e^n$

$\lim_{n \to +\infty} \left| (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n \right| = +\infty \Longrightarrow$

$\lim (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n \neq 0 \Longrightarrow$

CNC n'est pas satisfaite, la série entière diverge en $x = -e$. (1,25)

$D =]-e, e[$ (0,5)

Exo 4.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n-1)! + 1}{n!} \right) x^{n+1} = S$?

$\frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}$

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \right) x^{n+1}$

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (0,25)

$\times x$ on obtient

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x e^x \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x(e^x - 1)}$

(0,75) pt

d'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in]-1, 1[\longrightarrow 0.25$$

En intégrant de 0 à x, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \quad 0.25 \iff$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad 0.25 \longrightarrow (*)$$

En multipliant $(*)$ par x $\quad 0.25$

on aura :

$$\forall x \in]-1, 1[: \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = -x \ln(1-x)} \quad 0.25$$

En fin, $\forall x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n-1)! + 1}{n!}\right) x^{n+1} = x\,(e^x - 1) - x \ln(1-x) \quad 0.25$$

$$= x\left[e^x - 1 - \ln(1-x)\right]$$