Corrigé des exercices 1 et 2 de la série 1 d'analyse 2 (2019/2020). Enseignant : M^d S. Boukhelifa.

Solution .1 .

RAPPEL :

• *La fonction Arcsinus est l'application réciproque de l'application* $\sin(.) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$*, elle est définie par* $\arcsin(.) : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, en d'autres termes son domaine de définition est* $[-1,1]$ *et pour tout* x *de* $[-1,1]$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

• *La fonction Arctangente est l'application réciproque de l'application* $\tan(.) :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$*, elle est définie par* $\arctan(.) : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*, en d'autres termes son domaine de définition est* $\mathbb{R}$ *et pour tout* x *de* $\mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$.

• *Rappelons quelques formules trigonométriques :*

i) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Longrightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$*, d'où*

$$\cos a = \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2 a} & si \ \cos a \geq 0 \\ -\sqrt{1-\sin^2 a} & si \ \cos a < 0 \end{cases}$$

iii) $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \begin{cases} \frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}} & si \ \cos a > 0 \\ \frac{\sin a}{-\sqrt{1-\sin^2 a}} & si \ \cos a < 0 \end{cases}$$

iv) $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\}, \tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}$*, d'où*

$$\cos a = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}} & si \ \cos a > 0 \\ \frac{1}{-\sqrt{1+\tan^2 a}} & si \ \cos a < 0 \end{cases}$$

Et puisque $\sin a = \frac{\sin a}{\cos a} \cos a = \tan a \cos a$*, alors*

$$\sin a = \begin{cases} \frac{\tan a}{\sqrt{1+\tan^2 a}} & si \ \cos a > 0 \\ \frac{\tan a}{-\sqrt{1+\tan^2 a}} & si \ \cos a < 0 \end{cases}$$

. ***.FIN DU RAPPEL*** ■

1) Montrons que : $\forall x \in [0,1], \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$.

On a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

En posant $a = \arcsin x$ *et* $b = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ *avec* $x \in [0,1]$*, on aura*

$$\sin(\arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2})) = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin(\sqrt{1-x^2})) + \sin(\arcsin(\sqrt{1-x^2}))\cos(\arcsin x) \quad ...(*)$$

On a : $\forall x \in [0,1]$

$$\bullet \sin(\arcsin x) = x$$
$$\bullet \ \sin(\arcsin(\sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}$$

• *Pour simplifier les expressions* $\cos(\arcsin x)$ *et* $\cos(\arcsin(\sqrt{1-x^2}))$*, il suffit d'écrire* " $\cos x$" *en fonction de* " $\sin x$".
On a pour tout x *de* $[0,1]$*,*

$$0 \leq \arcsin x \leq \tfrac{\pi}{2} \implies \cos(\arcsin x) \geq 0$$
$$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \implies 0 \leq \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \leq \tfrac{\pi}{2} \implies \cos(\arcsin(\sqrt{1-x^2})) \geq 0$$

Alors d'après la formule ii) du rappel, on a : $\forall x \in [0,1]$*,*

- $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$,

- $\cos(\arcsin(\sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(\sqrt{1-x^2}))} = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{x^2} = x.$

En remplaçant chaque terme par sa valeur dans $(*)$ *on aura :*

$$\sin(\arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2})) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} + x\ x = 1 - x^2 + x^2 = 1$$
$$\implies \sin(\arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2})) = 1$$

D'autre part, pour tout x *de* $[0,1]$ *on a*

$$0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ et } 0 \leq \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \leq \pi$$

Finalement

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leq \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \leq \pi \\ \text{et} \\ \sin(\arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2})) = 1 \end{array}\right\} \implies \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}, \text{ d'où le résultat.}$$

2) Montrons que : $\forall x \in]-1,1[, \tan(\arcsin x^2) = \tan(\arcsin x) \cdot \sin(\arctan x)$.

• *On a pour tout* x *de* $]-1,1[$,

$$-1 < x < 1 \implies 0 < x^2 < 1 \implies 0 \leq \arcsin x^2 < \frac{\pi}{2} \implies \cos(\arcsin x^2) > 0$$

Alors d'après la formule iii) du rappel :

$$\tan(\arcsin x^2) = \frac{\sin(\arcsin x^2)}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x^2)}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} \quad ...(1)$$

• *Il reste à simplifier les expressions* " $\tan(\arcsin x)$ *et* $\sin(\arctan x)$".

On a pour tout x *de* $]-1,1[$,

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2} \implies \cos(\arcsin x) > 0$$
$$-\frac{\pi}{4} < \arctan x < \frac{\pi}{4} \implies \cos(\arctan x) > 0$$

Alors d'après la formule iii) du rappel :

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et d'après la formule iv) du rappel :

$$\sin(\arctan x) = \frac{\tan(\arctan x)}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Par conséquent

$$\tan(\arcsin x)\cdot\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} \quad ...(2)$$

En comparant les équations (1) *et* (2) *on déduit :* $\forall x \in]-1,1[$ *:*

$$\tan(\arcsin x^2) = \tan(\arcsin x)\cdot\sin(\arctan x)$$

Solution .2 .

RAPPEL :

• *La fonction Arccosinus est l'application réciproque de l'application* $\cos(.) : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, *elle est définie par* $\arccos(.) : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$, *en d'autres termes son domaine de définition est* $[-1,1]$ *et pour tout* x *de* $[-1,1]$, $-0 \leq \arccos(x) \leq \pi$.

• *La fonction argument sinus hyperbolique est l'application réciproque de l'application* $sh(.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, *elle est définie par* $\arg sh(.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

• *Rappelons quelques formules trigonométriques :*

v) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, *alors*

$$\sin x = \begin{cases} \sqrt{1-\cos^2 x} & si\ \sin x \geq 0 \\ -\sqrt{1-\cos^2 x} & si\ \sin x < 0 \end{cases}$$

vi) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x = 2\tan x\cos^2 x,$$

et puisque $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$, *alors*

$$\sin(2x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

vii) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

et puisque $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$, *alors*

$$\cos(2x) = \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

. **.*FIN DU RAPPEL*■**

1) Simplifions l'expression : $\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha),\ \alpha \in [0, 2\pi]$.

L'application composée $\arccos\circ\cos$ *est définie de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *vers l'ensemble* $[0,\pi]$ $(\arccos\circ\cos(.) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\pi])$

L'application composée $\arcsin\circ\sin$ *est définie de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *vers l'ensemble* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $(\arcsin\circ\sin(.) : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

Alors on a pour tout x *de* $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} si\ x \in [0,\pi], alors\ \arccos(\cos x) = x \\ si\ x \notin [0,\pi], alors\ \arccos(\cos x) = \beta\ tel\ que\ \cos\beta = \cos x\ et\ \beta \in [0,\pi] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} si\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], alors\ \arcsin(\sin x) = x \\ si\ x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], alors\ \arcsin(\sin x) = \gamma\ tel\ que\ \sin\gamma = \sin x\ et\ \gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

<u>*Exemple*</u> :

$\arccos(\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos(\cos\pi) = \pi$, $\arcsin(\sin\pi) = 0$, $\arccos(\cos\frac{5\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$, $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$.

• *Pour simplifier* $\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha),\ \alpha \in [0, 2\pi]$, *on distingue 4 cas :*

<u>***1er cas :*** $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$:</u>

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \in [0,\frac{\pi}{2}] \subset [0,\pi] \implies \arccos(\cos\alpha) = \alpha \\ \alpha \in [0,\frac{\pi}{2}] \subset [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \implies \arcsin(\sin\alpha) = \alpha \end{array}\right\} \implies \arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = 2\alpha.$$

<u>*Exemple*</u> : *pour* $\alpha = \frac{\pi}{4}$, *on a* $\arccos(\cos\frac{\pi}{4}) + \arcsin(\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

<u>***2ème cas :*** $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$:</u>

$$\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \subset [0,\pi] \implies \arccos(\cos\alpha) = \alpha$$

$$\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \implies \alpha \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \implies \arcsin(\sin\alpha) = \gamma\ tel\ que\ \sin\gamma = \sin\alpha\ et\ \gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

D'autre part

$$\sin\gamma = \sin\alpha\ ,avec\ \gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ et\ \alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \implies \gamma = \pi - \alpha$$

D'où

$$\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = \alpha + \pi - \alpha = \pi$$

<u>*Exemple*</u> : *pour* $\alpha = \pi$, *on a* $\arccos(\cos\pi) + \arcsin(\sin\pi) = \pi + 0 = \pi$.

<u>***3ème cas :*** $\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}]$:</u>

$$\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}] \implies \alpha \notin [0,\pi] \implies \arccos(\cos\alpha) = \beta\ tel\ que\ \cos\beta = \cos\alpha\ et\ \beta \in [0,\pi]$$

$$\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}] \implies \alpha \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \implies \arcsin(\sin\alpha) = \gamma\ telque\ \sin\gamma = \sin\alpha\ et\ \gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

D'autre part

$$\cos\beta = \cos\alpha \ \textit{avec}\ \beta \in [0,\pi]\ \textit{et}\ \alpha \in]\pi, \tfrac{3\pi}{2}] \implies \beta = 2\pi - \alpha$$
$$\sin\gamma = \sin\alpha \ \textit{avec}\ \gamma \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\ \textit{et}\ \alpha \in]\pi, \tfrac{3\pi}{2}] \implies \gamma = -(\alpha - \pi) = \pi - \alpha$$

D'où

$$\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = 2\pi - \alpha + \pi - \alpha = 3\pi - 2\alpha$$

<u>Exemple</u> : pour $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, *on a* $\arccos(\cos\frac{5\pi}{4}) + \arcsin(\sin\frac{5\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} + (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$.

<u>4ème cas :</u> <u>$\alpha \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$:</u>

$$\alpha \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \implies \alpha \notin [0,\pi] \implies \arccos(\cos\alpha) = \beta \ \textit{tel que}\ \cos\beta = \cos\alpha \ \textit{et}\ \beta \in [0,\pi]$$

$$\alpha \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \implies \alpha \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \implies \arcsin(\sin\alpha) = \gamma \ \textit{telque}\ \sin\gamma = \sin\alpha \ \textit{et}\ \gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

D'autre part

$$\cos\beta = \cos\alpha \ \textit{avec}\ \beta \in [0,\pi]\ \textit{et}\ \alpha \in]\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi] \implies \beta = 2\pi - \alpha$$
$$\sin\gamma = \sin\alpha \ \textit{avec}\ \gamma \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\ \textit{et}\ \alpha \in]\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi] \implies \gamma = -(2\pi - \alpha) = \alpha - 2\pi$$

D'où

$$\arccos(\cos\alpha) + \arcsin(\sin\alpha) = 2\pi - \alpha + \alpha - 2\pi = 0$$

<u>Exemple</u> : pour $\alpha = 2\pi$, *on a* $\arccos(\cos 2\pi) + \arcsin(\sin 2\pi) = 0 + 0 = 0$.

2) Simplifions $\sin(\arccos a + 2\arctan b)$, *où* $-1 \leq a \leq 1$, $b \in \mathbb{R}$.

D'après la formule i) du rappel de la solution 1 on a :

$$\sin(\arccos a + 2\arctan b) = \sin(\arccos a)\cos(2\arctan b) + \sin(2\arctan b)\cos(\arccos a)$$

Simplifions les termes de cette expression

- *Pour tout a de* $[-1,1]$ *on a*

$$\cos(\arccos a) = a.$$

- *On a aussi*

$$-1 \leq a \leq 1 \implies 0 \leq \arccos a \leq \pi \implies \sin(\arccos a) \geq 0$$

Alors D'après la formule v) du rappel on a :

$$\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos a)} = \sqrt{1 - a^2}$$

- *D'autre part, d'après la formule vi) du rappel on a : pour tout b de* $\mathbb{R}$

$$\sin(2\arctan b) = \frac{2\tan(\arctan b)}{1 + \tan^2(\arctan b)} = \frac{2b}{1 + b^2}$$

• *Et d'après la formule vii) du rappel on a : pour tout b de* $\mathbb{R}$

$$\cos(2\arctan b) = \frac{1-\tan^2(\arctan b)}{1+\tan^2(\arctan b)} = \frac{1-b^2}{1+b^2}$$

En remplaçant chaque terme par sa valeur on aura : $\forall a \in [-1,1], \;\; b \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\arccos a + 2\arctan b) = \sqrt{1-a^2}\frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{2b}{1+b^2}a = \frac{(1-b^2)\sqrt{1-a^2}+2ab}{1+b^2}.$$

3) Simplifions $\arg sh(x - \frac{1}{4x}), \;\; x \in \mathbb{R}^*$.

D'après l'autre expression de la fonction $\arg sh$ *(voir le polycopié du cours sur les fonctions élémentaires page 3), on a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \arg sh(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$$

Alors pour tout x de $\mathbb{R}^*$

$$\arg sh(x - \frac{1}{4x}) = \ln(x - \frac{1}{4x} + \sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2})$$

D'autre part

$$\sqrt{1+(x-\tfrac{1}{4x})^2} = \sqrt{1+(x^2-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{16x^2})} = \sqrt{\tfrac{16x^4+8x^2+1}{16x^2}} = \sqrt{\frac{(4x^2+1)^2}{16x^2}} = \frac{4x^2+1}{4\,|x|}$$
$$\Longrightarrow x - \tfrac{1}{4x} + \sqrt{1+(x-\tfrac{1}{4x})^2} = x - \tfrac{1}{4x} + \frac{4x^2+1}{4\,|x|} = \frac{4x^2-1}{4x} + \frac{4x^2+1}{4\,|x|}$$

D'où

$$x - \frac{1}{4x} + \sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2} = \frac{4x^2-1}{4x} + \frac{4x^2+1}{4\,|x|}$$

On distingue deux cas :

1er cas : $x > 0$

$$x - \frac{1}{4x} + \sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2} = \frac{4x^2-1}{4x} + \frac{4x^2+1}{4x} = 2x$$

Par conséquent

$$\arg sh(x - \frac{1}{4x}) = \ln(2x)$$

2ème cas : $x < 0$

$$x - \frac{1}{4x} + \sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2} = \frac{4x^2-1}{4x} - \frac{4x^2+1}{4x} = -\frac{1}{2x}$$

Et par conséquent

$$\arg sh(x - \frac{1}{4x}) = \ln(-\frac{1}{2x})$$