2ème méthode pour la question 1 exercices 1 série 1 d'analyse 2 (2020). Enseignant : M^d S. Boukhelifa.

Solution .1 .

RAPPEL :

• *La fonction Arcsinus est l'application réciproque de l'application* $\sin(.) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$, *elle est définie par* $\arcsin(.) : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *en d'autres termes son domaine de définition est* $[-1, 1]$ *et pour tout* x *de* $[-1, 1]$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

• *La fonction Arcsinus est dérivable sur* $]-1, 1[$, *et sa fonction dérivée est définie par*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

. ***.FIN DU RAPPEL***■

1) Montrons que *:* $\forall x \in [0, 1], \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$.

On pose

$$f(x) = \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}), \quad x \in [0, 1]$$

On distingue deux cas :

1er cas $x = 1$ *:*

$$f(1) = \arcsin 1 + \arcsin(\sqrt{1-1}) = \arcsin 1 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}, \textit{ d'où le résutat.}$$

2ème cas $x \in [0, 1[$ *: Calculons la dérivée de* f *sur* $[0, 1[$

$$f'(x) = (\arcsin x)' + (\arcsin(\sqrt{1-x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2}}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow f'(x) = 0$$

Par conséquent, pour tout x *de* $[0, 1[$ *on a*

$$f(x) = c, \textit{ telle que } c \textit{ est une constante réelle.}$$

D'autre part, pour $x = 0$, *on a*

$$f(0) = \arcsin 0 + \arcsin \sqrt{1-0} = \arcsin 0 + \arcsin 1 = 0 + \frac{\pi}{2} = c \Longrightarrow c = \frac{\pi}{2}$$

En remplaçant par la valeur de c, on aura :

$$f(x) = \arcsin x + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in [0, 1[, \textit{ d'où le résultat.}$$