TD sur le Calcul Vectoriel

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé $R(O,x,y,z)$, soient trois points :

$A(-1,-2,1)$, $B(-3,1,4)$ et $C(-1,2,-3)$.

1) Donner l'expression des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

2) Déterminer les expressions de :

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$,$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right|$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$.

Solution :

1) Les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont :

$$\overrightarrow{OA} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\vec{h} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

2) Les expressions de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$,$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right|$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$ sont :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -9\vec{i} + 1\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{131}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right) = 32$$

Exercice 2 :

On donne les vecteurs suivants :

$\vec{r_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{r_2} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{r_1} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

1) Calculer leurs modules.

2) Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$\vec{A} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}$ et $\vec{B} = \vec{r_1} + \vec{r_2} - \vec{r_3}$

3) Déterminer le vecteur $\vec{U}$ porté par le vecteur $\vec{C} = \vec{r_1} + 2\vec{r_2}$

4) Calculer le produit scalaire de $\vec{r_1} et \vec{r_2}$

5) Calculer les produits $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$.

Solution :

1) $|\vec{r_1}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\vec{r_2}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

$|\vec{r_3}| = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$

2) $\vec{A} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$|\vec{A}| = \sqrt{81+4+16} = \sqrt{101}$

$\vec{B} = \vec{i} + 24\vec{j} - 2\vec{k}$

$|\vec{B}| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

3) $\vec{C} = 8\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$|\vec{B}| = \sqrt{74}$

$\vec{U} = \frac{8\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}}{\sqrt{74}}$

4) $\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 6 - 6 - 2 = -2$

5) $\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{\imath} - 19\vec{\jmath} - 33\vec{k}$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 90 + 38 - 132 = -4$

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 4 \\ 10 & -19 & -33 \end{vmatrix} = 142\vec{\imath} + 337\vec{\jmath} - 151\vec{k}$