TD sur la Cinématique du Point

Exercice 1 : ***(Recherche d'une trajectoire)***

Le mouvement d'un corps ponctuel est défini par les équations horaires $x = t^2 + 6t - 3$ et $y = 2t^2 + 3t$ où x et y sont les coordonnées du point mobil, à la date t, sur la base orthonormée du repère.

a) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobil.
b) Calculer les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération instantanées.
c) Quelle est la nature du mouvement ?

Solution :

a) Trajectoire

On observe, d'après les équations horaires que

$$\boxed{y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \text{ ou } \boldsymbol{y = 0,5x + 1,5}}$$

C'est l'équation de la trajectoire. Il s'agit d'une ***droite.***

b) Vecteurs vitesse et accélération

Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ s'obtient en dérivant par rapport au temps les coordonnées du vecteur position.

On a

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 4t^2 + & 6t - 3 \\ 2t^2 & +3t \end{pmatrix}$$

Et

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

d'où

$$\vec{v}\begin{pmatrix} \boldsymbol{8t + 6} \\ \boldsymbol{4t + 3} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur accélération s'obtiennent en dérivant par rapport au temps les coordonnées du vecteur vitesse.

On a

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 8t + 6 \\ 4t + 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

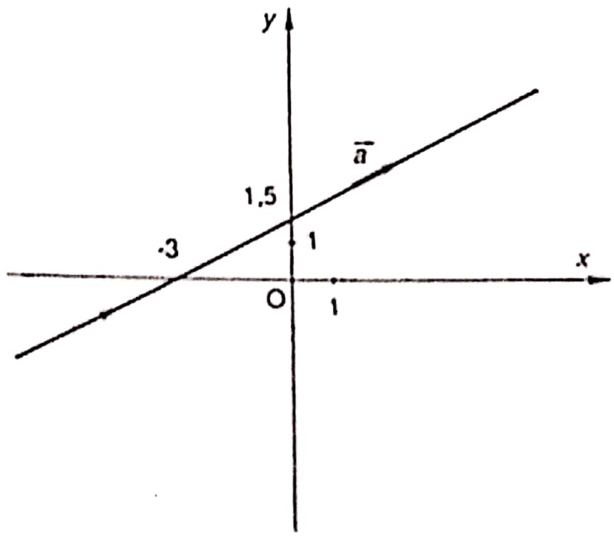
d'où

$$\vec{a}\binom{8}{4}.$$

On observe que le vecteur accélération est constant.

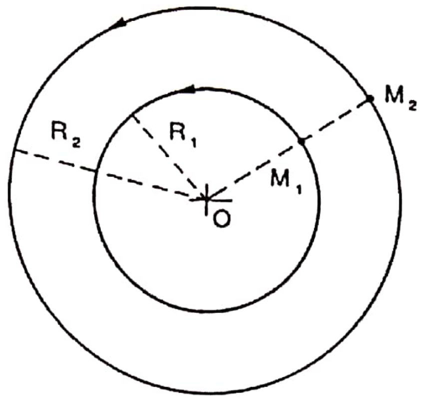
c) Nature du mouvement

Les coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ montrent que ces deux vecteurs sont colinéaires et de même sens à tout instant. Il s'agit donc d'un ***mouvement rectiligne uniformément accéléré.***



Exercice 2 : *(Mouvements circulaires)*

Deux mobiles ponctuels M_1 et M_2 se déplacent dans le même sens sur deux cercles concentriques de rayons R_1 et R_2 avec des vitesses constantes notées v_1 et v_2.



A tout instant, les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

a) Comparer les vitesses v_1 et v_2 des deux mobils.
b) Comparer les périodes de rotation T_1 et T_2.
c) Comparer les accélérations a_1 et a_2.

Solution :

a) Vitesses v_1 et v_2

Puisque les points O, M_1 et M_2 restent alignés au cours du mouvement, leurs vitesses angulaires $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$ et $\omega_2 = \frac{v_2}{R_2}$ sont égales. On obtient ainsi

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2}$$

ou

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

b) Périodes de rotation

Les périodes de rotation des deux mobiles s'écrivent

$$T_1 = \frac{2\pi R_1}{v_1}$$

et

$$T_2 = \frac{2\pi R_2}{v_2}$$

d'où

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1 v_2}{R_2 v_1}$$

L'égalité $T_1 = T_2$ exprime l'égalité des vitesses angulaires.

c) *Accélérations a_1 et a_2*

Les accélérations a_1 et a_2 des deux mobiles ont une expression

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R_1}$$

et

$$a_2 = \frac{v_2^2}{R_2}$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Puisque

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

on a

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

Exercice 3 : ***(Destruction d'une cible)***

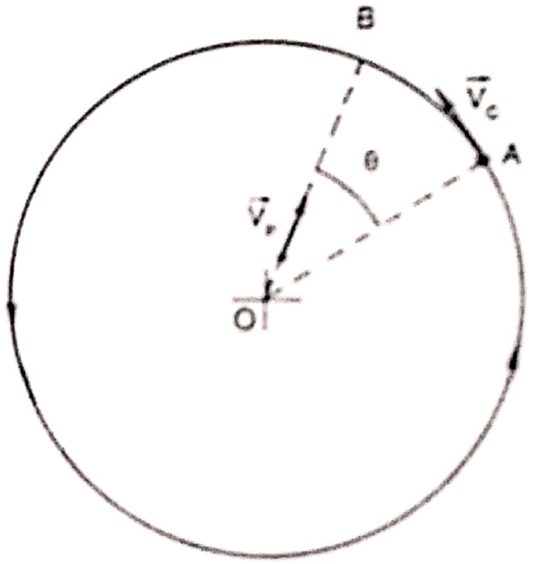
Une cible C, assimilé à un point, se déplace à la vitesse constante $v_c = 15\ m \cdot s^{-1}$ sur un cercle de rayon R=*100m.* Un projectile ponctuel P est tiré du point O, centre du cercle, et se déplace à la vitesse constante $v_P = 500\ m \cdot s^{-1}$.

Déterminer complètement la position du point qui doit être visé pour atteindre la cible.

Solution :

Il faut viser un point situé en avant de la position instantanée de la cible pour parvenir à la détruire.

Soit t la date du tir du projectile. A cette date la cible est au point A.



Le projectile et la cible doivent arriver au même temps t'.

En appelant ε la durée que met le projectile pour parcourir la distance OB, on a

$$t' = t + \varepsilon\,.$$

Or,

$$\varepsilon = \frac{OB}{v_P} = \frac{R}{v_P},$$

d'où

$$t' = t + \frac{R}{v_P}.$$

D'autre part, pendant la durée ε, la cible doit parcourir la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$, d'où

$$l = v_c \cdot \varepsilon .$$

En introduisant la valeur de $\boldsymbol{\varepsilon}$, on obtient

$$\boldsymbol{l = v_c \cdot \frac{R}{v_P}}.$$

En appelant $\boldsymbol{\theta}$, l'angle $\boldsymbol{AOB}$ on a, puisque $\boldsymbol{l = R \cdot \theta}$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{v_c}{v_P}}.$$

Applications numériques :

$v_c = 15\ m \cdot s^{-1}\ ; R = 100\ m\ ; v_P = 500\ m \cdot s^{-1}$.

$$l = 15 \times \frac{100}{500}$$

soit $\boldsymbol{l = 3\ m}$.

$$\theta = \frac{15}{100}$$

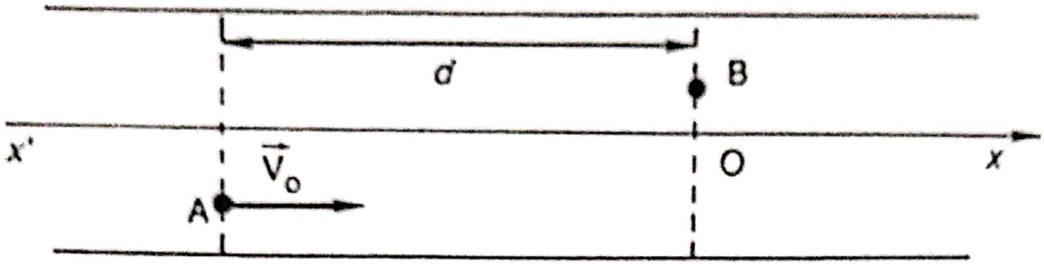
soit $\boldsymbol{\theta \equiv 3.10^{-2} rad}$ ou $\boldsymbol{\theta = 1,72^{\circ}}$.

La direction de la vitesse doit faire un angle $\boldsymbol{\theta = 1,72^{\circ}}$ avec la direction $\boldsymbol{OA}$ donnant la position instantanée de la cible.

Exercice 4 : ***(Dépassements)***

Une automobile A se déplace à la vitesse constante $v_0 = 72\ km \cdot h^{-1}$ sur une route rectiligne. Une deuxième automobile B, initialement immobile, démarre et se déplace dans le même sens que A d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 1\ m \cdot s^{-2}$.

Au moment de démarrage, l'automobile A se trouve à la distance $d = 150\ m$ derrière B.



a) On choisit l'origine des dates au moment où l'automobile B démarre et on prend la position initiale de B comme origine de l'axe $x'x$ parallèle à la route. Déterminer les équations horaires $x_A(t)$ et $x_B(t)$ pour les deux automobiles.

b) Montrer graphiquement et quantitativement que deux dépassements peuvent se produire.

c) Calculer les abscisses des points où ont lieu les dépassements.

Solution :

a) Les équations horaires

L'automobile A se déplace avec un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v_0. Son abscisse à la date t s'écrit

$$x_A(t) = v_0 \cdot t + x_A(t = 0).$$

Or

$$x_A(t = 0) = -d,$$

d'où

$$x_A(t) = v_0 \cdot t - d.$$

L'automobile B possède un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération a .

Son abscisse à la date t s'écrit

$$x_B(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_{(t=0)} \cdot t + x_B(t = 0)\,.$$

avec $v_{(t=0)} = 0$ et $x_B(t = 0) = 0$, on a

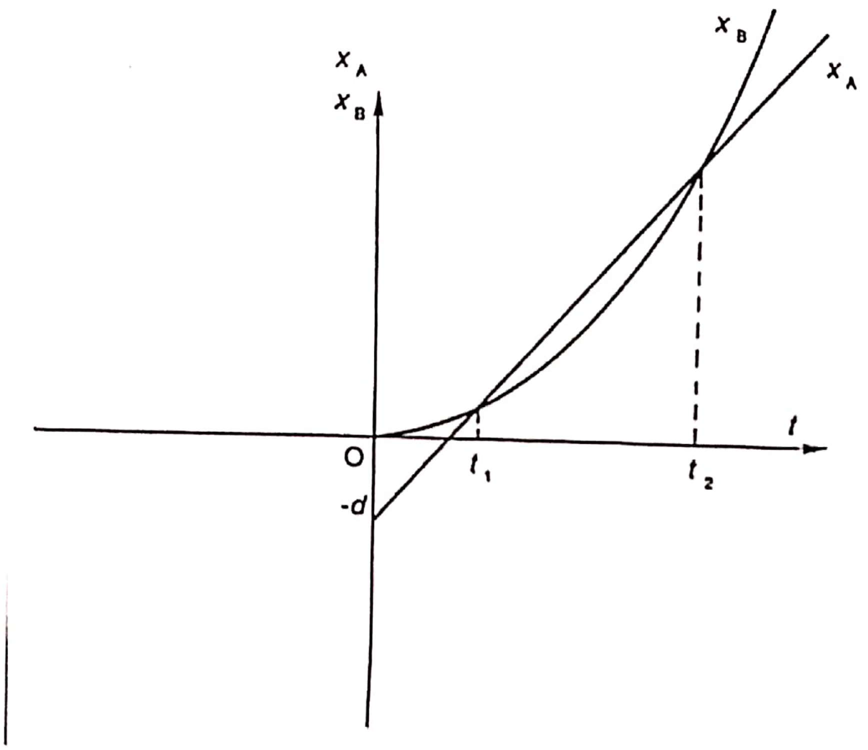
$$\boldsymbol{x_B(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2} .$$

b) Etude graphique

Représentons x_A et x_B en fonction du temps.

Les courbes représentatives des fonctions $x_A(t)$ et $x_B(t)$ sont respectivement une droite et une parabole.

On observe que deux points d'intersection sont possibles. Ils correspondent à deux dépassements. ***A*** la date t_1, ***A*** dépasse ***B*** puis à la date t_2, ***B*** dépasse ***A*** (Voir schéma cidessous).



c) Etude des dépassements

Au moment d'un dépassement, les abscisses des deux automobiles sont égales, on a ainsi

$$x_A(t) = x_B(t)$$

soit

$$v_0 \cdot t - d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

ou

$$a \cdot t^2 - 2 . v_0 \cdot t + 2d = 0 .$$

Les solutions de cette équation sont les dates des dépassements

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot d \cdot a}}{a}.$$

On obtient

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot d \cdot a}}{a}$$

et

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot d \cdot a}}{a}.$$

Applications numériques :

$$v_0 = 72\, km \cdot h^{-1} = 20\, m \cdot s^{-1};\ d = 150\, m; a = 1\, m \cdot s^{-2}.$$

Vérifions que $(v_0^2 - 2 \cdot d \cdot a)$ est bien positif.

$v_0^2 - 2 \cdot d \cdot a = 20^2 - 2 \times 150 \times 1 = 100$

$$t_1 = \frac{20 - \sqrt{100}}{1}$$

soit

$$\boldsymbol{t_1 = 10\, s}$$

et

$$t_1 = \frac{20 + \sqrt{100}}{1}$$

soit

$$\boldsymbol{t_1 = 30\, s}.$$

Les abscisses x_1 et x_2 des dépassements s'écrivent

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$$

et

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2$$

En valeurs numériques on a

$$x_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^2$$

soit

$$\boldsymbol{x_1 = 50\ m}$$

et

$$x_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 30^2$$

soit

$$\boldsymbol{x_1 = 450\ m.}$$