Probabilités

I) Introduction

Le but de la theorie des probas est de degager des methodes permettant de faire des predictions, qualitatives ou quantifiées sur le déroulement des phénomème regies par le hasard.

II/ Notion d'experience aléatoire

Pour étudier un phéno, on realise une experience, dont l'aboutissement est inconnu avant que l'experience ne soit produite. On dit que l'experience est aléatoire. c.a.d, si on reproduit l'expé dans les mê conditions, le résultat varie et semble dependre du hasard

Exp

III / Ensemble fondamental ou univers.

Def : Ensemble fonda Ω associé à une exp $\mathcal{E}$, l'ensemble de toutes les resultats possibles

Exp

IV / Evenements.

Une propriete E liée à l'exp aléatoire $\mathcal{E}$. A chaque mise en oeuvre de $\mathcal{E}$ ou bien E est realisé ou bien ne l'est pas.

Exp : Dé affichant un nombre pair.

Une telle propriete permet de partage Ω en 2 parties, l'ensemble A_E des elts $\omega \in \Omega$ (un resultat de $\mathcal{E}$) pour le quel E a lieu, d'autre part la partie $\overline{A_E} \subset \Omega$ formé des resultats de $\mathcal{E}$, $\omega \in \Omega$, associés à une issue ne realisant pas E.

On dit A_E est l'evement attachee à la propriété E.

/ Algebre des evenements

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de evenements liée à une exp alea $\mathcal{E}$.

- reunion $A, B \in \mathcal{A}$ $A \cup B \subset \Omega$. A ou $B = A \cup B$
- intersection A et $B \subset \Omega$ et on a A et $B = A \cap B$
- Evenements incompatibles $A \cap B = \emptyset$
- système complet est $A_1, \ldots, A_k$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ tq, $\bigcup A_i = \Omega$ partition de

Rq : Un evenement est un sous ensemble de Ω.

Exp : On roule un dé

On considère l'evenement A : " Il sort un nombre pair ".

Donc $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

- Si Ω est fini ou infini denombrale, tout singleton $\{\omega\}$ est appelé évènement element aire.

Déf : Soit A un évènement d'une experience aleatoire
On dit que ω réalise A si $\omega \in A$

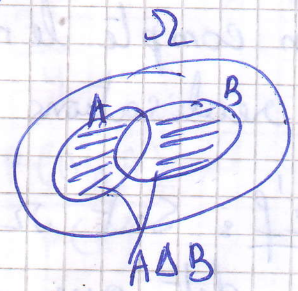
V / Operation sur les èvènements.

Soit Ω l'univers d'une experience aléatoire. A et B deux évènements de Ω.

- On dit que A réalise B ssi B se réalise dès que A se réalise autrement dit, en terminologie des ensembles, dès que $A \subset B$
- On appelle conjonction (ou intersection) des évenement A et B note $A \cap B$, l'évenement qui se realise dès que A et B se réalisent
- On dit que deux evènements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$
- On appelle disjonction (ou réunion) de A et B, l'evènement noté $A \cup B$, qui se réalise dès que A ou B se réalise
- On appelle negation (ou complementaire) de l'evènement A, l'evènement noté A^c ($\bar{A}$ ou C_Ω^A) qui se realise dès que A ne se réalise pas.

De même, on defini, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$



Rq : On peut generaliser la notion de réunion ou d'intersection d'évènements à un nombre quelconque d'evenement (fini ou infini dénombrable.)

VI / Notions intuitives sur les probabilités

Par exemple : On jette une pièce de monnaie non biaisée, on dit que la probabilité d'avoir T est égale à 1/2 et la probabilité d'avoir F est 1/2, c.à.d on a autant de chance d'avoir T ou F

Intuitivement parlant, si la probabilité d'un évènement A est égale à $1/2 = 0{,}5$ après un très grand nombre de répétition de l'expérience, l'évènement A se réalise 50 fois sur 100.

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

L'ensemble vide ϕ est dit évènement impossible.

Ω est dit évènement certain.

La probabilité que ϕ se réalise est égale à 0 et la probabilité que Ω se réalise est égale à 1.

Déf. Une probabilité est une application de l'ensemble des évènements d'une expérience aléatoire d'univers Ω dans l'intervalle $[0, 1]$ tq

- $P(\Omega) = 1$
- Si A et B sont deux évènements de Ω tq $A \cap B = \phi$ alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si on note par F l'ensemble des évènements.

$$P : F \longrightarrow [0, 1].$$

D'une manière expérimentale, pour assigner la probabilité aux évènements

On compte le nombre de fois que A se réalise sur le nombre de réalisations possibles $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{N^{bre} \text{ de cas favorables}}{N^{bre} \text{ de cas possibles}}$

Déf : Soit Ω un univers et $\mathcal{F}$ une classe de s-ensembles de Ω

On dit que $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre ou tribu ssi

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) $\forall A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$

iii) Pour toute suite dénombrable d'élts de $\mathcal{F}$ notée $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Déf 1: Si Ω est un univers

$\mathcal{F}$ une tribu de partie de Ω

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est dit espace probabilisé.

Déf 2:

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisé.

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, toute application P

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1] \text{ tq.}$$

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $\mathcal{F}$ tq $A_n \cap A_m = \phi$ (pour $n \neq m$) alors

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit espace probabilisté.

Proposition:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisté, on a

i) $P(\phi) = 0$.

ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$

iii) $\forall A$ et B si $A \subset B$ alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ et donc $P(A) \leq P(B)$

VII / Probabilité conditionnelle.

Exp: Soit Ω l'ensemble des familles à deux enfants.

S'achant qu'une famille choisi au hasard, a un garçon, quelle est la probabilité que cette famille ait deux garçons.

$\Omega = \{g.g ; g.f ; f.g , f.f\}$ avec $P(g.g) = P(g.f) = P(f.g) = P(f.f) = 1/4$

A : "Avoir au moins garçon" $A = \{g.g, g.f, f.g\}$ $\quad P(A) = \frac{3}{4}$

B : "Avoir deux garçon" $B = \{g.g\}$ $\quad P(B) = 1/3$

La probabilité de B sachant A noté $P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

$(B \cap A) = \{g.g\}$ $\qquad P(B\cap A) = 1/4$

alors $P(B/A) = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$

V. ~~Proposition~~

Def : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace proba.
Soit $A \in \mathcal{F}$ tq $P(A > 0)$

On appelle probabilité conditionnelle de B $(B \in \mathcal{F})$ sachant A et on note $P(B/A)$ la quantité donnée par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace proba. Et soit $A \in \mathcal{F}$ tq $P(A) > 0$, alors

1) $\forall B \in \mathcal{F} \quad 0 \leq P(B/A) \leq 1$

2) $P(A/A) = 1$

3) si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite disjointes 2 à 2 d'elts de $\mathcal{F}$ alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n / A\right) = \sum_{n \geq \mathbb{N}} P(B_n / A)$$

4) Si $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1/A) \leq P(A_2/A)$

5) Si $B \in \mathcal{F} \quad P(B^c/A) = 1 - P(B/A)$.

7) $\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{F}^n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n / A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Preuve

1) on a $B \cap A \subset A \Rightarrow 0 \leq P(B \cap A) \leq P(A)$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{\frac{P(B \cap A)}{P(A)}}_{P(B/A)} \leq 1$$

2) $P(A/A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

3) $P\left(\bigcup_n B_n / A\right) = \dfrac{P(\bigcup_n B_n \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P\left(\bigcup_n (B_n \cap A)\right)}{P(A)} = \dfrac{\sum_n P(B_n \cap A)}{P(A)} = \sum_n P(B_n / A)$

4) si $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1 \cap A \subset A_2 \cap A$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A) \leq P(A_2 \cap A)$$

$$\Rightarrow P(A_1 / A) \leq P(A_2 / B)$$

5) $P(\overline{B}/A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A \setminus B)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= 1 - P(B/A)$

6) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B/A) = P(B \cap A)$

7) $P(A_1)\, P(A_2/A_1) \cdots P(A_n / A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_2 \cap A_1)}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{P(A_3 \cap \cancel{A_2 \cap A_1})}{P(\cancel{A_2 \cap A_1})} \cdots \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

Rq:

La probabilité conditionnelle sachant A, est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ où toute la masse est consentrée en A.

Indépendance

I) Indépendance de deux évènements.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace proba.

A et B deux évenements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$.

On dit que A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Proposition

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace proba., A et B deux évènements.

a) si $P(A) > 0$.

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(B/A) = P(B)$

b) si A et B sont indépendants, tous les couples suivants sont indépendants.

$(A, \bar{A}^c)$; $(\bar{A}, B)$ $(\bar{A}, \bar{B})$

Preuve

a) $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$

b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$ $\quad (B \cap A \subset A)$

$= P(A) - P(A) \cdot P(B)$

$= P(A)(1 - P(B))$

$= P(A) \cdot P(\bar{B})$

De la m̂ manière pour les autres.

II) Formule de Bays.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace proba.

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de Ω (ie $\forall n$ $A_n \in \mathcal{F}$ $\cup A_n = \Omega$) et $A_n \neq$

Alors

1) $\forall B \in \mathcal{F}$ $\quad P(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B/A_n) \cdot P(A_n)$

2) Si $P(B) > 0$ et $m \in \mathbb{N}$

$$P(A_m / B) = \frac{P(B/A_m) \cdot P(A_m)}{\sum P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

Preuve.

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n)$$

1) $$P(B) = P\left(\bigcup_n (B \cap A_n) \right) = \sum_n P(B \cap A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

2) $$P(A_m/B) = \frac{P(A_m \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_m) \cdot P(A_m)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$