Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté de Technologie
Département de Technologie

L1 (ST)

Corrigé de la Série N4 Maths II
2019/2020

1 Série N4 Maths II

Exercice 1.1.
On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathrm{S}) : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ où } \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que la matrice inverse de A est la matrice suivante :*

$$B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Solution : *B est la matrice inverse de A si est seulement si $AB = BA = I_3$*
On a

$$BA = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} (2\times 3)+(-10\times -1)+(4\times 0) & (2\times 4)+(-10\times 2)+(4\times 3) & (2\times -2)+(-10\times 0)+(4\times 1) \\ (1\times 3)+(3\times -1)+(2\times 0) & (1\times 4)+(3\times 2)+(2\times 3) & (1\times -2)+(3\times 0)+(2\times 1) \\ (-3\times 3)+(-9\times -1)+(10\times 0) & (-3\times 4)+(-9\times 2)+(10\times 3) & (-3\times -2)+(-9\times 0)+(10\times 1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{16} & \frac{0}{16} & \frac{0}{16} \\ \frac{0}{16} & \frac{16}{16} & \frac{0}{16} \\ \frac{0}{16} & \frac{0}{16} & \frac{16}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Remarque : *c'est la même chose aussi $AB = I_3$*

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -9 & 10 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. *Déduire la solution du système linéaire* (S).
Solution : *On a*

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donc,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} (2 \times -8) + (-10 \times -4) + (4 \times 2) \\ (1 \times -8) + (3 \times -4) + (2 \times 2) \\ (-3 \times -8) + (-9 \times -4) + (10 \times 2) \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 \\ -16 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{16} \\ \frac{-16}{16} \\ \frac{80}{16} \end{pmatrix}$$

donc la solution est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2.
Soit le système linéaire (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Résoudre le système linéaire (S) :

1. *En utilisant la méthode de la matrice inverse.*
   Solution :
   En terme matriciel le système s'écrit

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow AX = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On trouve la solution du système en inversant la matrice :

$$X = A^{-1}b.$$

L'inverse d'une matrice A se calcule ainsi :
si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}(comA)$$

avec

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1 - 2 + 2 \\ &= -1, \end{aligned}$$

et

$$comA = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$${}^{t}(comA) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ici on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}(comA) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et comme $det(A) \neq 0$, *on trouve*

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Par la méthode de Cramer.*
   Solution :

   On a $det(A) = -1 \neq 0$, *donc* (S) *est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

et donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3.
On considère le système (S_m) *suivant*

$$(S_m) \begin{cases} (m-1)x + y + z = 1 \\ x + (m-1)y + z = 1 \\ x + y + (m-1)z = 1 \end{cases}$$

où m *est un paramètre réel.*

1. *Ecrire le système (S_m) sous forme matricielle : $A_mX = b$ où A_m est une matrice à expliciter.*
   Solution :

$$(S_m)\begin{cases}(m-1)x+y+z=1\\x+(m-1)y+z=1\\x+y+(m-1)z=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}(m-1) & 1 & 1\\ 1 & (m-1) & 1\\ 1 & 1 & (m-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

   avec

$$A_m=\begin{pmatrix}(m-1) & 1 & 1\\ 1 & (m-1) & 1\\ 1 & 1 & (m-1)\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

2. *Calculer le déterminant de A_m et donner une condition pour que (S_m) admet une solution unique. Puis donner cette solution.*
   Solution :
   On a

$$\begin{aligned}det(A_m) &= \begin{vmatrix}(m\text{-}1) & 1 & 1\\ 1 & (m\text{-}1) & 1\\ 1 & 1 & (m\text{-}1)\end{vmatrix}\\ &= (m-1)^3+1+1-(m-1)-(m-1)-(m-1)\\ &= (m^3-3m^2+3m-1)+1+1-(m-1)-(m-1)-(m-1)\\ &= m^3-3m^2+3m-1+1+1-m+1-m+1-m+1\\ &= m^3-3m^2+4\\ &= (m+1)(m-2)^2,\end{aligned}$$

   si $m \in \mathbb{R}-\{-1,2\}$ alors $det(A_m) \neq 0$ d'où le système (S_m) est de Cramer et donc admet une unique solution.

– *Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ alors la solution est la suivante*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (m-1) & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{vmatrix}}{det(A_m)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (m-1) & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{vmatrix}}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{(m-1)^2 + 1 + 1 - (m-1) - (m-1) - 1}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{m^2 - 2m + 1 + 1 + 1 - m + 1 - m + 1 - 1}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{m^2 - 4m + 4}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{(m-2)^2}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{1}{m+1},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (m-1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{vmatrix}}{det(A_m)} = \frac{\begin{vmatrix} (m-1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (m-1) \end{vmatrix}}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{(m-1)^2 + 1 + 1 - 1 - (m-1) - (m-1)}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{m^2 - 2m + 1 + 1 + 1 - 1 - m + 1 - m + 1}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{m^2 - 4m + 4}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{(m-2)^2}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{1}{m+1},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} (m\text{-}1) & 1 & 1 \\ 1 & (m\text{-}1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{det(A_m)} = \frac{\begin{vmatrix} (m\text{-}1) & 1 & 1 \\ 1 & (m\text{-}1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{(m-1)^2 + 1 + 1 - (m-1) - 1 - (m-1)}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{m^2 - 2m + 1 + 1 + 1 - m + 1 - 1 - m + 1}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{m^2 - 4m + 4}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{(m-2)^2}{(m+1)(m-2)^2}$$

$$= \frac{1}{m+1},$$

et donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{m+1} \end{pmatrix}.$$