FORMULES DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1. Formules de Taylor

On a déjà vu que si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point x_0 de I, alors on peut écrire au voisinage de x_0 : $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$. Ce qui revient à approximer f par un polynôme de degré 1 au voisinage de x_0. Dans ce chapitre, nous donnons des théorèmes qui généralisent ce résultat, appelés *formules de Taylor* : sous certaines hypothèses sur la fonction f, on approche f au voisinage d'un point x_0 par un polynôme en $(x-x_0)$ plus un reste. Autrement dit : $f(x) = P_n(x) + R_n(x, x_0)$, où P_n **est un polynôme de degré** $\leq n$, c'est à dire : $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$.

1.1. Formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Théorème .1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ avec $f^{(n)}$ dérivable sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in [a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, il existe $c \in]x_0,x[$ tel que :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cette formule s'appelle formule de Taylor d'ordre n de la fonction f avec reste de Lagrange $R_n(x,x_0) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Démonstration. La démonstration de ce théorème repose sur l'application du théorème des accroissements finis généralisés à deux fonctions convenablement choisie. Supposons que $x > x_0$. Considérons les deux fonctions φ et γ définies par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [x_0,\ x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \gamma : & [x_0,\ x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{array}$$

Les deux fonctions φ et γ sont continues sur $[x_0, x]$, dérivables sur $]x_0, x[$ et admettent sur $]x_0, x[$ les dérivées suivantes :

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!},\ \gamma'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!},\ \forall t \in]x_0, x[.$$

En vertu du théorème des accroissements finis généralisés, on obtient :

$$\exists c \in]x_0, x[\texttt{ tel que } \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\gamma(x)-\gamma(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\gamma'(c)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!\gamma'(c)}$$

Par ailleurs, on a :

$$\varphi(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \texttt{ et } \varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k = f(x) - f(x) = 0.$$

$$\gamma(x) = \frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,\ \gamma(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \texttt{ et } \gamma'(c) = \frac{(x-c)^n}{n!}.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
-f(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} &= -f^{(n+1)}(c)(x-c)^n\frac{(\gamma(x)-\gamma(x_0))}{n!\gamma'(c)}\\
&= -f^{(n+1)}(c)(x-c)^n\frac{0-\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}{(-n!)\ \dfrac{(x-c)^n}{n!}}\\
&= -\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\forall x\in[a,b],\ \exists c\in]x_0,x[,(x>x_0)\ \texttt{tel que:}\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration analogue pour $x<x_0$. ■

1.2. Formule de Taylor avec reste de Cauchy.

Théorème .1.2. *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ avec $f^{(n)}$ dérivable sur $]a,b[$. Soit $x_0\in[a,b]$. Alors $\forall x\in[a,b],\ x\neq x_0,\ \exists\theta\in]0,1[$ tel que :*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}\Big(x_0+\theta\,(x-x_0)\Big).$$

Cette formule s'appelle formule de Taylor d'ordre n avec reste de Cauchy $R_n(x,x_0)=\dfrac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}\Big(x_0+\theta\,(x-x_0)\Big),\ \theta\in]0,1[$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème repose sur l'application du théorème des accroissement fini à une fonction convenablement choisie. Supposons que $x>x_0$. Considérons la fonction φ définie par :

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & [x_0,\ x] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & \varphi(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.\end{array}$$

La fonction φ est continue sur $[x_0,x]$, dérivable sur $]x_0,x[$ et en utilisant les règles de dérivation des sommes et des produits on obtient : application des règles de dérivation des sommes et des produits :

$$\forall t\in]x_0,x[:\ \varphi'(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}.$$

Comme φ et continue sur $[x_0,x]$ et dérivable sur $]x_0,x[$, alors en vertu du théorème des accroissements finis, on obtient :

$$\exists c\in]x_0,x[\ \texttt{tel que}\ \varphi(x)-\varphi(x_0)=(x-x_0)\varphi'(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)(x-c)^n}{n!}$$

Par ailleurs, on a :

$$\varphi(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ \texttt{et}\ \varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k=f(x).$$

Il en résulte que :

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)(x-c)^n}{n!}.$$

Ou encore :

$$\exists c\in]x_0,x[\ \texttt{tel que}\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}+\frac{(x-x_0)(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c).$$

D'autre part, on a : $x_0 < c < x \Longrightarrow 0 < c - x_0 < x - x_0$. Comme $x \neq x_0$ alors $0 < \dfrac{c - x_0}{x - x_0} < 1$.

On pose : $\theta = \dfrac{c - x_0}{x - x_0} \Longrightarrow c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$.

Par suite, $x - c = x - x_0 - \theta x + \theta x_0 = (x - x_0)(1 - \theta) \Longrightarrow (x - c)^n = (x - x_0)^n (1 - \theta)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

D'où,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + \frac{(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}\Big(x_0 + \theta(x - x_0)\Big),\ 0 < \theta < 1.$$

Ce qui achève cette démonstration. Démonstration analogue pour $x < x_0$. ■

1.3. Formule de Taylor avec reste de Young.

Théorème .1.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$. Alors :*

$$\forall x \in v(x_0),\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\,(x - x_0)^n\,.$$

Cette formule s'appelle formule de Taylor d'ordre n de la fonction f au voisinage du point x_0, avec reste de Young $R_n(x, x_0) = o\,(x - x_0)^n = (x - x_0)^n\,\varepsilon(x),\ \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Démonstration. Soit $x_0 \in [a, b]$. On écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(n - 1)$ sur l'intervalle $[a, b]$ on obtient :

$$\forall x \in [a, b],\ x \neq x_0,\ \exists c \in]x_0, x[\texttt{ tel que} : f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

ou encore :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\Big(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)\Big).$$

On pose, pour $x \neq x_0$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{(x - x_0)^n}\Big(f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\Big)$$

En passant à la limite lorsque x tend vers x_0, le réel c tend vers x_0 (car $c \in]x_0, x[$). Comme $f^{(n)}$ est continue en x_0, on déduit de l'égalité précédente que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Il en résulte que :

$$f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = o(x - x_0)^n.$$

■ Ce théorème demeure vrai avec une hypothèse encore plus forte sur f : il suffit de supposer que $f^{(n)}(x_0)$ existe (fini) au lieu que f soit de classe C^n pour avoir le même résultat.

Théorème .1.4. *Soient I un intervalle ouvert contenant x_0 et n un entier naturel. Soit f une fonction $(n - 1)$ fois dérivable sur I avec $f^{(n)}(x_0)$ existe. Soit $R_n(x, x_0)$ son reste de Taylor d'ordre n en x_0 :*

$$R_n(x, x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,.$$

Alors, au voisinage de x_0, $R_n(x, x_0)$ est négligeable devant $(x - x_0)^n$: $R_n(x, x_0) = o(x - x_0)^n$.

Démonstration. Ce théorème se démontre par récurrence sur n. Tout d'abord, notons par :

$P_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ le polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 et A_n la propriété :

$$A_n : \Big[R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x) = o(x - x_0)^n\ ,\ \forall x \in v(x_0)\Big].$$

(1) Pour $n = 1$, Comme f est dérivable en x_0 alors : $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$,
ou encore (d'une manière équivalente) :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)}{x - x_0} = 0 .$$

Ceci signifie que $f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$ est négligeable devant $x - x_0$ au voisinage de x_0 :

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) = f(x) - P_1(x) = R_1(x, x_0) = o(x - x_0) .$$

La propriété A_n est donc vraie pour $n = 1$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Supposons que la propriété A_n est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle demeure vraie à l'ordre $(n + 1)$. Si f vérifie les hypothèses à l'ordre $(n + 1)$, alors f' les vérifie à l'ordre n. Le polynôme de Taylor d'ordre n de f' est exactement $P'_{n+1}(x)$. C'est à dire :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right)' .$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que :

$$R'_{n+1}(x, x_0) = f'(x) - P'_{n+1}(x) = o(x - x_0)^n .$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R'_{n+1}(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ce qui signifie (pas définition même de la limite) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \eta \implies \left| \frac{R'_{n+1}(x, x_0)}{(x - x_0)^n} \right| < \varepsilon .$$

Par ailleurs, soit $x \in]x_0, x_0 + \eta]$ (fixé). Comme $R_{n+1}(x, x_0)$ est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$ (en tant que somme de deux fonctions dérivables), alors en vertu du théorème des accroissement finis, on obtient :

$$\exists c \in]x_0, x[\texttt{ tel que } \quad R_{n+1}(x, x_0) - R_{n+1}(x_0, x_0) = (x - x_0)R'_{n+1}(c, x_0) .$$

Ou encore :

$$\exists c \in]x_0, x[\texttt{ tel que } \quad \frac{R_{n+1}(x, x_0)}{x - x_0} = R'_{n+1}(c, x_0) .$$

Alors :

$$\left| \frac{R_{n+1}(x, x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} \right| = \left| \frac{R'_{n+1}(c, x_0)}{(x - x_0)^n} \right| \leqslant \left| \frac{R'_{n+1}(c, x_0)}{(c - x_0)^n} \right| < \varepsilon .$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n+1}(x, x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0.$$

D'où, $R_{n+1}(x, x_0)$ est négligeable devant $(x - x_0)^{n+1}$. Raisonnement analogue pour $x \in [x_0 - \eta, x_0[$.
La propriété A_n est donc vraie à l'ordre $(n + 1)$.

Ce qui achève cette récurrence et la démonstration du théorème. ■

Remarques 1.

(1) La formule de Taylor avec reste de Young ne donne des informations qu'au voisinage de x_0, elle ne pourra donc être utile que pour résoudre des problèmes locaux. Elle est pratique par exemple pour le calcul des limites et l'étude de la position de la courbe représentative d'une fonction au voisinage d'un point par rapport à sa tangente en ce point. Par contre, la formule de Taylor avec reste de Lagrange ou de Cauchy est valable sur l'intervalle tout entier.

(2) *Les théorèmes 1.1 et 1.2 précédents demeurent vrais avec des hypothèses plus faibles. En effet, pour $f \in C^{n+1}(I)$ où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, on a :*

$$\forall x \in I,\ x \neq x_0,\ \exists c \in]x_0, x[\ \mathtt{tel\ \ que} : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0)$$

Le reste $R_n(x, x_0)$ peut être de Lagrange ou de Cauchy.

1.4. Formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème .1.5. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. Soit $x_0 \in [a,b]$. Alors pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Cette formule s'appelle formule de Taylor d'ordre n de la fonction f avec reste intégral ou bien reste de Laplace $R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$.

Démonstration. Ce théorème se démontre par récurrence sur n en utilisant une intégration par parties.

(1) Pour $n = 0$, on doit avoir l'égalité : $f(x) = \dfrac{(x - x_0)^0}{0!} f^{(0)}(x_0) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)\ dt,\ \forall x \in [a,b]$.
Tout d'abord, notons P_n la propriété :

$$P_n : \Big[f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt,\ \forall x \in [a,b]\Big].$$

On a,

$$\frac{(x - x_0)^0}{0!} f^{(0)}(x_0) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)\ dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\ dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x),\ \forall x \in [a,b].$$

La propriété P_n est donc vraie pour $n = 0$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété P_n est vraie à l'ordre n est montrons quelle reste vraie à l'ordre $(n+1)$. On a :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

On pose :

$$u = f^{(n+1)}(t),\ dv = (x-t)^n dt \Longrightarrow du = f^{(n+2)}(t) dt,\ v = \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt &= \left[\tfrac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \tfrac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt \\
&= \tfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \tfrac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \tfrac{1}{n!}\Big(\tfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \tfrac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \tfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \tfrac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \tfrac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Il en résulte, la propriété P_n est vraie à l'ordre $(n+1)$.

Ce qui achève cette récurrence et la démonstration du théorème. ■

Remarque .1.1. *En effectuant le changement de variable $t = x_0 + \theta(x - x_0)$, le reste intégral peut s'écrire sous la forme :*

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))\, d\theta.$$

2. Formule de Maclaurin

Lorsque $x_0 = 0$ la formule de Taylor est appelée *formule de Maclaurin* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$.

2.1. Formule de Maclaurin-Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \theta < 1,\ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ (Reste de Lagrange).}$$

2.2. Formule de Maclaurin-Cauchy.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} x^{n+1}, 0 < \theta < 1,\ R_n(x) = \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} x^{n+1} \text{ (Reste de Cauchy).}$$

2.3. Formule de Maclaurin-Young.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),\ R_n(x) = o(x^n) = x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \text{ (Reste de Young).}$$

2.4. Formule de Maclaurin-Laplace.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)\, d\theta}{n!} x^{n+1},\ R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)\, d\theta \text{ (Reste intégral).}$$

3. Développements limités

D'après ce qui précède, les formules de Taylors montrent que sous certaine hypothèses, une fonction f peut être approximée par un polynôme. Plus précisément, si $f^{(n)}(x_0)$ existe alors il existe un polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ tel que : $f(x) - P_n(x) = o(x - x_0)^n$. Nous allons voir qu'un tel polynôme peut exister sans que $f^{(n)}(x_0)$ existe et même sans que f soit continue en x_0.

3.1. Développements limités d'ordre n au voisinage de 0.

Définition .3.1. *Soit f une fonction définie au voisinage $v(0)$ sauf peut être en 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n $(n \in N)$ au voisinage de 0, noté $(DL_n\ (0))$, s'il existe des constantes $a_0,\ a_1, ..., a_n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que $\forall x \in I - \{0\}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est appelé partie régulière du développement limité et $x^n \varepsilon(x) = o(x^n)$, $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ est le reste.*

Proposition .3.1. *Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors : $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe.*

Démonstration. En effet, comme f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe un polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que :

$$\forall x \in I - \{0\},\ f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Par passage à la limite on obtient : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \right) = a_0$. ∎

Remarque .3.1. *Si f admet un développement limité d'ordre n $(n \geq 1)$ au voisinage de 0 et $f(0) = a_0$, alors f est dérivable en 0.*

Démonstration. En effet, comme f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe un polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que :

$$\forall x \in I - \{0\}\,,\ f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-a_0}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)\right) = a_1$(existe et finie) D'où, f est dérivable en 0 et on a, $f'(0) = a_1$. ■

Théorème .3.1 (unicité du DL). *Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement est unique.*

Démonstration. Supposons que f admet deux développements limités d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe deux polynômes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ de degré $\leq n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que : $f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$. Autrement dit, pour tout $x \in I - \{0\}$, on a :
$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Par suite, $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n = x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$. Passage à la limite quand x tend vers 0, on obtient : $a_0 = b_0$. Par suite : $(a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n = x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$. On divise alors par x et il vient : $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + ... + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$. Passage encore à la limite quand x tend vers 0, on obtient : $a_1 = b_1$. Ainsi, en poursuivant de cette manière on obtient alors au bout de n étapes : $a_0 = b_0, ..., a_n = b_n$ et ainsi $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$, pour tout $x \in I - \{0\}$. D'où l'unicité du $DL_n(0)$. ■

Corollaire .3.1. *Si une fonction f paire (respectivement impaire) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, sa partie régulière ne contient que des puissances paires (respectivement impaires).*

Démonstration. En effet, comme f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe des constantes $a_0,\ a_1, ..., a_n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que :

$$\forall x \in I - \{0\}\,,\ f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Supposons que f est paire, alors : $\forall x \in I - \{0\}, (-x) \in I - \{0\},\ f(-x) = f(x)$.
On a, $f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + ... + a_n(-1)^n(x)^n + (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$.
Donc, $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) = a_0 - a_1 x + ... + a_n(-1)^n(x)^n + (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$.
Il en résulte de l'unicité du DL de f que : $a_k = (-1)^k a_k$ pour $0 \leq k \leq n$ et $\varepsilon(x) = (-1)^n \varepsilon(-x)$, $(x \neq 0)$.
Ce qui entraine que $a_1 = a_3 = a_5 = ... = a_{2i+1} = 0$. De même, si f est impaire, on trouve que tous les coefficients dont l'indice est pair sont nuls. ■

Théorème .3.2. *Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet au voisinage de 0, l'unique développement limité d'ordre n suivant :*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration. Comme $f^{(n)}(0)$ existe, alors d'après la formule de MacLaurin avec reste de Young, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

L'unicité du développement limité de f permet de conclure. ■

Corollaire .3.2. *Si $f^{(n)}(o)$ existe et si f admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors :

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, ...,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Démonstration. D'après le Théorème 3.2

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+x^n\varepsilon(x).$$

L'unicité du développement limité entraine que tous les coefficients $a_k:=\dfrac{f^k(0)}{k!},\ 0\leq k\leq n.$ ∎

4. Développements limités usuels obtenus par la formule de Maclaurin

Les développements limités permettent d'approcher une fonction au voisinage de 0 par une fonction plus simple : un polynôme. Cela peut être très efficace dans le calcul des limites. La formule de **Maclaurin-Young** fournit un développement limité d'ordre n pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(0)$ existe.
$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)=f(0)+\dfrac{x}{1!}f'(0)+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+x^n\varepsilon(x)$ **où** $o(x^n)=x^n\varepsilon(x)$ **avec** $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$
Cela va fournir les principaux développements limités des fonctions usuelles au voisinage de zéro. Par exemple si $f(x)=e^x$ alors, pour tout $n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(x)=e^x$ et $f^{(n)}(0)=1$. Donc $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right).$
Ci-dessous on donne les développements limités usuels au voisinage de zéro.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right).\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right).\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right).\\
\text{tg } x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right).\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6.8\ldots(2n)}x^n+o\left(x^n\right).\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+o\left(x^n\right),\ (\alpha\in\mathbb{R}).\\
\arcsin x &= x+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+o\left(x^{2n+2}\right).\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\ldots-\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+o\left(x^{2n+2}\right).\\
\text{arctg } x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right).\\
\text{ch } x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right).\\
\text{sh } x &= x-\frac{x^3}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right).\\
\text{th } x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right).\\
\text{arg sh } x &= x-\frac{x^3}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right).\\
\text{arg th } x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right).
\end{aligned}$$

5. Opérations sur les développements limités

5.1. Développements limités obtenus par restriction.

Proposition .5.1. *Soit f une fonction admettant, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n. Alors pour tout $n \geq m$, f admet un développement limité d'ordre m au voisinage de 0.*

Démonstration. En effet, comme f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe des constantes a_0, $a_1, ..., a_n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que :

$$\forall x \in I - \{0\}\,,\ f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Cette dernière peut s'écrire : $\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x), \\ &= a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m + x^m \left(a_{m+1} x + ... + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x)\right), \end{aligned}$

On pose $\varepsilon_1(x) = a_{m+1} x + ... + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x)$. Comme $n \geq m$ et $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, alors $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. par suite, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m + x^m \varepsilon_1(x)$, $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Il en résulte, f admet un ($DL_m(0)$). ■

5.2. Opérations algébriques sur les développements limités.

On peut additionner, soustraire, multiplier des développements limités de même ordre à condition de ne conserver que les termes de degré plus petit ou égal à l'ordre commun. La division est également possible, mais sous une forme particulière : la division selon les puissances croissantes (au lieu de l'habituelle division euclidienne qui est selon les puissances décroissantes).

Théorème .5.1. *Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités au même ordre n au voisinage de zéro.*

1. *La somme $f + g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de zéro, dont la partie régulière est la somme des parties régulières des développements limités de f et g.*
2. *Le produit fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de zéro, dont la partie régulière est le produit des parties régulières des développements limités de f et g, en gardant que les termes de degré inférieure ou égal à n.*
3. *Si $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$, la division $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de zéro, dont la partie régulière s'obtient en faisant la division euclidiènne selon les puissances croissantes à l'ordre n de la partie régulière de f par celle de g.*
4. *Si $g(0) = 0$, la fonction composée $f \circ g$ admet un développement limité ordre n au voisinage de zéro ; sa partie régulière s'obtient en substituant dans la partie régulière du développement limité de f la partie régulière du développement limité de g et en ne gardant que les puissances de x d'ordre inférieure ou égale à n.*

Démonstration. Comme f et g admetent des développements limités d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe des constantes $a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que :

$$\forall x \in I - \{0\}\,,\ f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n).$$

$$\forall x \in I - \{0\}\,,\ g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n).$$

Tout d'abord, rappelons que si deux fonctions sont négligeables devant x^n, alors leur somme, ainsi que leurs produits par des fonctions bornées sont encore négligeables devant x^n. En particulier :

1. Pour la somme, on a :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \Big(P_n(x) + o(x^n)\Big) + \Big(Q_n(x) + o(x^n)\Big) \\ &= P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

(2) Pour le produit, on a :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \Big(P_n(x)+o(x^n)\Big)\Big(Q_n(x)+o(x^n)\Big) \\ &= P_n(x)Q_n(x)+o(x^n) \\ &= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)x^n+o(x^n). \end{aligned}$$

Si on note $D_n=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)x^n$ le polynôme formé des termes de degré au plus n dans P_nQ_n, alors;

$$P_n(x)Q_n(x)-D_n(x)=o(x^n).$$

Donc on a bien : $f(x)g(x)=D_n(x)+o(x^n)$.

(3) Pour la division, selon les puissances croissantes de P_n par Q_n à l'ordre n, on obtient l'existence d'un polynôme $A(x)$ de degré inférieure ou égale à n tel que :

$$P_n(x)=A(x)Q_n(x)+o(x^n).$$

Pas suite, comme $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{P_n(x)+o(x^n)}{Q_n(x)+o(x^n)} \\ &= \frac{A(x)Q_n(x)+o(x^n)}{Q_n(x)+o(x^n)} \\ &= A(x)+o(x^n). \end{aligned}$$

(4) Pour la composition, le raisonnement est analogue par celui du produit. On a :

$$\begin{aligned} f(x)\circ g(x) &= P_n(Q_n(x))+o(x^n) \\ &= a_0+a_1(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n)+\ldots+a_n(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n)^n+o(x^n). \end{aligned}$$

Il faut bien prendre garde à la condition $g(0)=0$ et de garder que les puissances de x d'ordre inférieure ou égale à n quand on substitue.

■

5.3. Intégration d'un développement limité.

Théorème .5.2. *Soit $f:[-a,a]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction intégrable et admettant au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant :*

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x).$$

Alors la fonction $F:x\longmapsto F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :

$$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+x^{n+1}\varepsilon_1(x),\ \textit{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0.$$

Démonstration. Comme f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe des constantes a_0, $a_1,\ldots,a_n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que :

$$\forall x\in I-\{0\},\ f(x)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n+t^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x (a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n+t^n\varepsilon(x))\ dt. \\ &= \int_0^x (a_o+a_1t+\ldots+a_nt^n)\ dt+\int_0^x t^n\varepsilon(t)dt. \\ &= \Big[a_ot+\tfrac{a_1t^2}{2}+\ldots+\tfrac{a_nt^{n+1}}{n+1}\Big]_0^x+\int_0^x t^n\varepsilon(t)dt. \\ &= a_ox+\tfrac{a_1x^2}{2}+\ldots+\tfrac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\int_0^x t^n\varepsilon(t)dt. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que :
$$\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt = o\left(x^{n+1}\right).$$
Soit $x > 0$. Comme $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$, alors la fonction ε est bornée et $|\varepsilon(t)| \leq \sup_{t\in[0,x]}|\varepsilon(t)|,\ \forall t \in [0,x]$. Par suite,
$$\left|\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt\right| \leqslant \int_0^x t^n\,|\varepsilon(t)|\,dt \leqslant \int_0^x t^n \sup_{t\in[0,x]}|\varepsilon(t)|\,dt = \sup_{t\in[0,x]}|\varepsilon(t)|\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sup_{t\in[0,x]}|\varepsilon(t)|\,.$$
Comme $x \neq 0$, on aura alors,
$$\frac{\left|\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt\right|}{x^{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}\sup_{t\in[0,x]}|\varepsilon(t)|\,.$$
Passage à la limite quand x tend vers 0, on obtient :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt\right|}{x^{n+1}} = 0.$$
Il en résulte que :
$$\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt = o\left(x^{n+1}\right).$$
Ce qui achève cette démonstration. ■

Théorème .5.3. *Si f est dérivable au voisinage de 0 et si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 donné par :*
$$f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$
alors f admet un développement limité à l'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0, obtenu en intégrant le développement limité de f'.
$$f(x) = f(0) + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. Posons $\varphi(x) = f(x) - f(0) - a_0x - \frac{a_1}{2}x^2 - \dots - \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, alors φ est dérivable au voisinage de 0 et a pour dérivée :
$$\varphi'(x) = f'(x) - a_0 - a_1x - \dots - a_nx^n = o(x^n) = x^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
La fonction φ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ $(x > 0)$, alors en vertu du théorème des accroissements finis on obtient :
$$\exists\theta \in]0,1[\ \texttt{tel que :}\ \ \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\theta x) = \theta^n x^{n+1}\varepsilon(\theta x)$$
Posons $\varepsilon_1(x) = \theta^n\varepsilon(\theta x)$, on a alors :
$$|\varepsilon_1(x)| = |\theta^n\varepsilon(\theta x)| \leq |\varepsilon(\theta x)|.$$
Il en résulte que : $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$. D'où, $\varphi(x) = x^{n+1}\varepsilon_1(x) = o(x^{n+1})$. ■

5.4. Dérivation d'un développement limité.

Théorème .5.4. *Soit $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si sa dérivée f' admet un admet un développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0, alors la partie réguliere du développement limité de f' est la dérivée de la partie réguliere du développement limité de f.*

Démonstration. Comme f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors il existe un polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ et un intervalle ouvert I centré à l'origine tels que :
$$\forall x \in I - \{0\}\,,\ f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
$$\forall x \in I - \{0\}\,,\ f'(x) = Q_{n-1}(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0.$$

Comme f' est intégrable sur $[-a, a]$, alors d'après le théorème 5.2, P_n est une primitive de Q_{n-1}, donc Q_{n-1} est la dérivée de P_n. D'où :

$$f'(x) = P'_n(x) + x^{n-1}\varepsilon_2(x), \ \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

L'unicité du développement limité permet de conclure que $P'_n(x) = Q_{n-1}(x)$. Ce qui achève cette démonstration. ■

6. Développement limité au voisinage d'un point x_0

Définition .6.1. *Soit f une fonction défine au voisinage d'un point x_0, sauf peut-être en x_0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si la fonction $X \longmapsto F(X) = f(x_0 + X)$ admet un admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. On aura alors :*

$$F(X) = f(x_0 + X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n + o(X^n).$$

En posons $x = x_0 + X$, on obtient alors : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$.
Donc, on se ramène du voisinage du point x_0 à celui de 0.

7. Développement limité au voisinage de l'infini

Définition .7.1. *Une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ si la fonction $t \longmapsto F(t) = f\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. On a alors :*

$$f\Big(\frac{1}{t}\Big) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + o(t^n).$$

En posons $x = \dfrac{1}{t}$, on obtient alors : $f(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dots + \dfrac{a_n}{x^n} + o\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big)$
Donc, on se ramène du voisinage du $+\infty$ à celui de 0.

8. Développement limité généralisé

Définition .8.1. *Soit f une fonction défine au voisinage d'un point 0, sauf peut-être en 0. On suppose que f n'admet pas de développement limité au voisinage de 0 mais la fonction $x \longmapsto x^\alpha f(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) admet un admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. On peut alors écrire au voisinage de 0 et pour $x \neq 0$:*

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

D'où, le développement limité généralisé de f au voisinage de 0 est :

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\Big[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)\Big].$$

Fin