Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques/MI

1ère année MI
Année universitaire
2019/2020

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Les développements limités permettent d'approcher une fonction au voisinage de 0 par une fonction plus simple : un polynôme. Cela peut être très efficace dans le calcul des limites. La formule de **Maclaurin-Young** fournit un développement limité d'ordre n pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(0)$ existe. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$ **où** $o(x^n) = x^n \varepsilon(x)$ **avec** $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Ci-dessous on donne les principaux développements limités usuels au voisinage de zéro.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6.8\ldots(2n)} x^n + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n), \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}).$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \ldots - \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\sinh x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8).$$

$$\operatorname{arg\,sinh} x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

$$\operatorname{arg\,tanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

N.B : Il faut les connaitre par coeur ou bien savoir les retrouver très vite.