Université A.Mira-Bejaia
Faculté de Sciences Exactes.
Départment de Mathématiques/MI.
2019/2020

Analyse II - Corrigé de la série 1(exo:3-exo:6)

Enseignant: Kessoum khaled.

Dans la suite, nous ferons, pour la guise du lecteur, quelques rappels sur la formule de Taylor et ses conséquences. Beaucoup de détails techniques ont été omis délibérément pour simplifier l'exposé, référez vous au cours de Yahiaoui Yanis pour plus d'informations, vous y trouverez notamment les démonstrations des résultats exposés ici.

Notre exposé suit la forme d'un tutoriel plutôt qu'un cours, ce qui explique son caractère assez verbeux, aussi je n'ai pas lésiné sur les exemples, espérant que ça vous aidera à résoudre les exercices de la série d'une façon autonome.

Certainement ce documents contient des erreurs qui ont échappées à mon attention, prière de me les signaler (Utiliser la messagerie du site).

1 Rappel sur le théorème de Taylor

Théorème 1 (Théorème de Taylor)
Soit $k \geq 1$ un entier et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, (k-1)-fois dérivable sur I et telle que $f^{(k)}(a)$ existe. Alors il existe une fonction $\epsilon_k : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \epsilon_k(x)(x-a)^k,$$

ou sous une forme plus compacte, avec la convention que $f^{(0)}(a) = f(a)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \epsilon_k(x)(x-a)^k,$$

avec $\lim_{x\to a} \epsilon_k(x) = 0$.

Remarque 1
Dans le cas ou $a = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}x^k + \epsilon_k(x)x^k.$$

1) Cette formule est appelé formule de Maclaurin, qui est un cas particulier de la formule de Taylor.
2) Dans d'autre littératures, Le théorème de Taylor s'appelle aussi théorème de Taylor-Young, et le reste est appelé reste de Young.

Il ne faut pas se laisser intimider par la complexité de cette formule, ce qu'il faut retenir ici c'est que la partie

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k$$

, est un polynôme, qu'on appelle polynôme de Taylor, et la partie

$$R_k(x) = \epsilon_k(x)(x-a)^k = f(x) - P_k(x),$$

qu'on appelle le reste, est l'erreur d'approximation obtenue quand f est approché par un polynôme. L'idée même de la formule de Taylor, est d'essayer d'approcher des fonctions quelconque par des polynôme. On peut facilement imaginer l'utilité d'une telle approche, notamment pour calculer les valeurs prises par des fonctions qui ne sont pas des polynôme, ce que nous verrons tout à l'heure.
En réalité, les seuls fonctions qu'on peut calculer sont les polynôme, pour la simple raison que leurs calculs, ne nécessite que des multiplications et additions. Il est donc bien vital, pour calculer les valeurs de fonctions transcendante (comme sin, cos, e), de pouvoir les approcher par des polynômes.
Avant de se lancer dans plus d'explications sur cette formule de Taylor, nous allons d'abords préciser la notion de vitesse de convergence. Considérons deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Pour être plus concret nous prendrons par exemple $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^2$, ici $a = 0$(ceci ne diminue en rien la généralité de cette discussion). Le lecteur peut se convaincre facilement par de simples calculs que f converge plus rapidement vers 0 que g (voire la table ci-dessous). Mais comment quantifier mathématiquement, cette re-

Table 1: Comparaison des vitesses de convergence de f et g

x	$g(x)$	$f(x)$
0.1	0.01	0.0001
0.01	0.001	0.00000001
0.001	0.000001	1E-12

lation qu'une fonction converge plus rapidement vers une valeur donnée qu'une autre fonction? Si f converge plus rapidement vers 0 que g, qu'elle sera la limite du rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ quand x tend vers a? En faisant un remplacement aveugle, on tomberai sur une forme indéterminée, mais comme f converge plus rapidement vers 0, il y a lieu de croire que cela donnerai au fait comme limite 0. Ainsi dans notre exemple ci-dessus, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Dans le jargon mathématique, on dits que f est négligeable devant g au voisinage de a, au lieu de dire que f converge plus rapidement vers g vers 0, quand x tend vers a. Ce qui nous amène donc à poser cette définition

Définition 1
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définie sur un même intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On dits que f est négligeable devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En supposant bien sure que g ne s'annule pas dans un certain voisinage de a. On utilise souvent la notation de Landau suivante pour dénoter que f est négligeable devant g:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{quand} \quad x \to a.$$

On peut omettre la dernière expression "quand $x \to a$" si le contexte est claire.

Remarque 2
Dans le théorème de Taylor 1, on remarque que le reste $R_k(x) = \epsilon_k(x)(x-a)^k$ *est négligeable devant* $(x-a)^k$*, en notation de Landau;*

$$R_k(x) = o(x-a)^k.$$

On pourrai alors récrire la formule de Taylor comme suit:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^k\right).$$

Cette notation possède l'avantage d'occulter la fonction $\epsilon_k(x)$*, qui ne donne aucune information supplémentaires sur la nature du reste, et elle met en exergue le fait que le reste* $R_k(x)$ *est une fonction négligeable devant* $(x-a)^k$*. Bien évidemment vous pouvez utiliser la notation qui vous conviens le mieux.*

La proposition suivante vous sera utile quand on abordera les développements limités.

Proposition (Règle de calcul avec les notations de Landau)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions définie sur un intervalle* I *et* $a \in I$*. Supposons que*

$$f(x) = o(h(x)) \quad et \quad g(x) = o(h(x)),$$

où $h : I \to \mathbb{R}$ *est une autre fonctions. Alors*

(a) $cf(x) = o(h(x))$, $\forall c \in \mathbb{R}$ *(Multiplier par une constante donnera une fonction négligeable devant* h*).*

(b) $f(x) + g(x) = o(h(x))$, *(La somme de deux fonctions négligeable devant* h*, est une autre fonction négligeable devant* h*).*

(c) $f(x) \times g(x) = o(h(x)^2)$,

(c) si $k : I \to \mathbb{R}$ *est une fonction quelconque, alors* $k(x)f(x) = o(k(x)h(x))$.

Revenons à présent à nous moutons et la formule de Taylor. Considérons le cas ou $k = 1$ dans le théorème de Taylor, on obtient ainsi la formule

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \epsilon_1(x)(x-a),$$

ici le polynôme de Taylor est

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

et le reste est

$$R_1(x) = \epsilon_1(x)(x-a).$$

P_1 est une approximation linéaire de f au voisinage de 0 et quand x tends vers a, l'erreur R_1 tends plus rapidement vers 0 que $(x-a)$.
Pour k=2, on obtient

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \epsilon_2(x)(x-a)^2$$

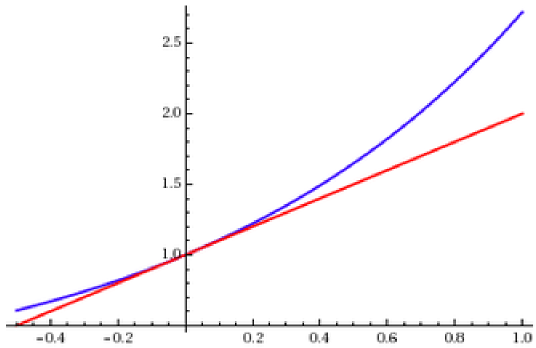

Figure 1: Graphe de $f(x) = e^x$ (bleu) avec son approximation linéaire $P_1(x) = 1 + x$ (rouge) au point $a = 0$.(Wikipedia)

Ici le polynôme de Taylor est donné par

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

et le reste (ou l'erreur) est

$$R_2(x) = \epsilon_2(x)(x - a)^2.$$

Ici le reste R_2 tends plus rapidement vers 0, quand x tends vers a, que $(x - a)^2$.
Noter une nette amélioration de l'approximation dans cette dernière figure, par rapport à la première. On imagine bien qu'on obtient une meilleur approximation de la fonction $f(x)$ par

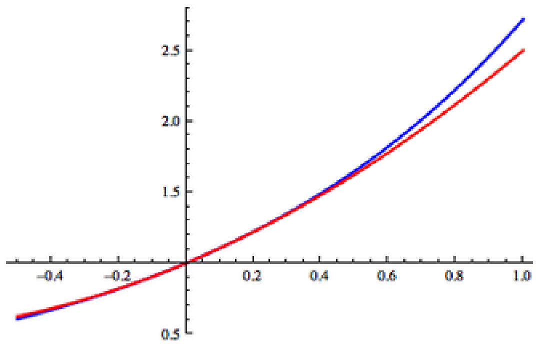

Figure 2: Graphe de $f(x) = e^x$ (bleu) avec son approximation quadratique $P_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (rouge) au point $a = 0$.(Wikipedia)

le polynôme de Taylor avec des valeurs plus grande de k.

La nature asymptotique du reste dans le théorème de Taylor, dans le sens ou la seule information connue sur l'erreur R_k est qu'elle est négligeable devant $(x-a)^k$, le rend impraticable quand on veut calculer des valeurs approchées de $f(x)$ avec une certaine tolérance donnée. Le théorème qui va suivre, donne avec des hypothèses de régularité supplémentaire sur f, un développement de Taylor avec une erreur plus concrète qu'on pourrai estimer.

Théorème 2 (Taylor-Lagrange)
Soit $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k sur $[u, v]$ et telle que la dérivée $k^{ème}$ de f, i.e. f^k est dérivable sur $]u, v[$. Soit $a \in [u, v]$. Alors pour tout $x \in [u, v]$, il existe $c \in]u, v[$ compris strictement entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x - a)^k + R_k(x),$$

où

$$R_k(x) = \frac{f^{k+1}(c)}{(k+1)!}(x - a)^{k+1}.$$

Comme promis, nous allons dans ce qui suit essayer de calculer une valeur approchée de e à 10^{-7} prés. Je sais que certains d'entre vous ne savent pas ce que veut dire une valeur approchée de e^x à 10^{-5} prés, ne vous alarmez pas, on va l'expliquer tout de suite.

Soit une valeur inconnue $a_e \in \mathbb{R}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de a_e à ϵ prés, si

$$|a_e - a| < \epsilon.$$

En général ϵ est sous la forme 10^{-n}, $n \geq 1$. Concrètement si on a par exemple $|a_e - a| < 10^{-n}$, $n \geq 1$, cela veut dire que a et a_e possède exactement au moins n décimale identique après la virgule, ainsi par exemple 3.14 est une approximation à 10^{-2} de $\pi = 3.141592654\cdots$, et 3.14159352 est une approximation de π avec une erreur de l'ordre de 10^{-5}.

La fonction $x \to e^x$ étant de classe C^∞, alors on a pour toute $n \in \mathbb{N}$, il existe c compris strictement entre 0 et x tel que

$$e^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

ou R_n est le reste de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Ici on a juste appliqué, le théorème 2 sur la fonction $x \to e^x$, avec $a = 0$.
En utilisant les propriétés bien connues de la fonction exponentielle;

$$e^0 = 1, \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x,$$

on obtient

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Pour $x = 1$ on obtient ainsi

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \quad \text{avec} \quad 0 < c < 1. \\ &= U_n + \frac{e^c}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Il faut à présent trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que U_n soit une valeur approchée de e à 10^{-7} prés, c'est-à-dire que

$$|e - U_n| < 10^{-7}.$$

Ceci étant bien entendu réalisé si on a l'inégalité

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} < 10^{-7}.$$

On va se servir de cette dernière inégalité pour trouver notre n, mais à il y a ici un terme qui dérange, à savoir e^c, on se rappelant que la fonction exponentielle est croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $c < 1$, on aura $e^c < e$ (pas aussi dérangeant finalement!), ce qu'on a donc jusqu'ici est

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}.$$

A notre grande infortune, on est pas encore sorti de l'auberge, on se retrouve avec le même e qu'on veut approcher! Et bah, si on ne peut pas le calculer, on peut certainement le majorer, mais comment? la réponse c'est en utilisant encore une fois la formule de Taylor-Lagrange mais cette fois juste à l'ordre 1, on obtient ainsi pour tout $x > 0$,

$$e^x = 1 + x + \frac{e^c}{2}x^2 < 1 + x + \frac{e^x}{2}x^2, \quad 0 < c < x.$$

donc

$$e^x < \frac{1+x}{1-\frac{x^2}{2}} = 2\frac{1+x}{2-x^2}, \quad \forall x > 0,$$

en remplaçant x par 1 dans cette dernière inégalité, on obtient $e < 4$. En somme, on a

$$R_n(x) < \frac{4}{(n+1)!}.$$

Et donc on a bien entendu $|e - U_n| < 10^{-7}$ si $\dfrac{4}{(n+1)!} < 10^{-7}$, un calcul à la main nous donne

$$\frac{4}{(n+1)!} < 10^{-7} \Leftrightarrow 4 \times 10^7 < (n+1)! \Leftrightarrow n >= 11.$$

Il s'ensuit alors que $U_{11} = 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{11!} = 2.718281828459045$ est une valeur approchée de e à 10^{-7} prés.

Exercice 3

1) Montrer

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad x - \frac{x^3}{2} < \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) < x.$$

Posons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $\forall x \in]0, +\infty[$. *Il s'agit ici d'appliquer le théorème de Taylor-Lagrange sur f et encadrer ensuite le reste de Lagrange pour aboutir aux inégalités demandées. Les polynômes figurant dans l'inégalité, suggèrent qu'il faudra développer la fonction f à l'ordre* 1. *Le lecteur pourra facilement vérifier que toute les conditions sont vérifié pour appliquer le théorème de Taylor-Lagrange sur f. f est de classe C^2 sur* $]0, +\infty[$ *(elle est même de classe C^∞). On obtient donc* $\forall x \in]0, +\infty[$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2}x^2 \quad \textit{avec} \quad 0 < c < x.$$

Il est temps de se salir les mains et calculer ces dérivées:
$f(0) = 0.$
$f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \to f'(0) = 1.$
$f''(x) = \dfrac{\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \to f''(c) = \dfrac{-c}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}.$
On obtient donc

$$f(x) = x - \frac{c}{2(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}x^2 \quad 0 < c < x.$$

Tachant à présent d'encadrer le reste. Comme $0 < c < x$, *alors*

$$0 < \frac{c}{2(1+c^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{x}{2},$$

et donc

$$0 < \frac{c}{2(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}x^2 < \frac{x^3}{2}$$

par suite

$$x - \frac{x^3}{2} < f(x) = x - \frac{c}{2(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}x^2 < x.$$

(2) (a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *il existe* $\theta = \theta(x) \in]0,1[$ *tel que*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta(x)).$$

La fonction $x \to \sin x$ *étant de classe* C^∞, *appliquons alors le théorème 2 à l'ordre* $k = 2$, *on obtient*

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2}x^2 + \frac{\sin^{(3)}(c)}{6}x^3, \quad \textit{avec} \;\; 0 < c < x,$$

ce qui donne après calcul des dérivée

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(c), \quad 0 < c < x. \tag{1}$$

Posons $\theta(x) = \frac{c}{x}$, *il est clair* $0 < c < 1$ *et on a* $c = x\theta(x)$, *en remplaçant dans l'égalité 1 on obtient*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta(x)).$$

(b) En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$.
Reprenons l'égalité obtenue à la question (a), on a $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *et* $\theta(x) \in]0,1[$, *donc* $x\theta(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *il suit que*

$$0 < \cos(x\theta(x)) < 1,$$

par conséquent

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta(x)) < x.$$

Exercice 4

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} *prés de* $\sqrt[3]{9}$.
A l'évidence ceci se fera par la formule de Taylor-Lagrange, il nous manque juste une fonction! Essayons la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, *j'espère que vous avez tous remarqué, que cette fonction n'est même pas dérivable en* 0, *donc le théorème de Taylor-Lagrange ne s'applique pas! On peut changer légèrement l'expression de* f *pour avoir une fonction dérivable en* 0, *on posera alors*

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction, contrairement à la première est dérivable en 0, *et elle est même de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$. *Au lieu d'appliquer le théorème de Taylor-Lagrange sur* f, *nous choisirons plutôt la fonction suivante qui elle est plus général:*

$$h(x) = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière est de classe C^∞ *dans sont domaine de définition, ainsi pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* x, *il existe* c *entre* 0 *et* x, *tel que*

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{h^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Tout ce qui reste à présent c'est de trouver l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ *de* h. *On peut facilement deviner cette expression en calculant quelques dérivées de* h:
- $h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

- $h''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$.
- $h^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$.
- $h^{(4)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(1+x)^{\alpha-4}$.

Ainsi la dérivée $n^{\text{ème}}$ de h est:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Je vous laisse le soin de le démontrer par récurrence. On déduit alors la forme suivante:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Dans le cas de notre fonction f ($\alpha = \frac{1}{3}$) on obtient donc la formule de Taylor-Lagrange suivante:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^n + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\cdots(\frac{1}{3}-n)(1+c)^{\frac{1}{3}-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

On posera dans la suite

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^n$$

et

$$R_n(x) = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\cdots(\frac{1}{3}-n)(1+c)^{\frac{1}{3}-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Tâchons à présent de calculer $\sqrt[3]{9}$ avec la précision exigée. D'après ce qui précède on a,

$$\sqrt[3]{9} = f(8) = P_n(8) + R_n(8).$$

On cherche donc $n \in \mathbb{N}$ de telle sorte que

$$|f(8) - P_n(8)| < 10^{-2}.$$

Cette inégalité est réalisée dés que

$$|R_n(8)| < 10^{-2}.$$

En prenant soins de majorer $(1+c)^{\frac{1}{3}-n-1}$ par 1 dans $R_n(8)$, il suffit donc de trouver $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\left|\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\cdots(\frac{1}{3}-n)}{(n+1)!}8^{n+1}\right| < 10^{-2}.$$

Avant de continuer à lire essayer de trouver le premier $n \in \mathbb{N}$ qui réalise cette dernière inégalité.

Je ne sais pas si vous vous êtes rendu compte, mais malheureusement le reste $R_n(8)$ converge vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, en l'occurrence $P_n(8)$ ne converge même pas vers $f(8)$. Oui je sais, je vous ai menti tout à l'heure en vous disant que plus en augmente n, plus on obtient une meilleur approximation de $f(x)$ par le polynôme de Taylor, mais c'était pour votre bien. En vérité, dans certains cas, le polynôme de Taylor converge vers $f(x)$ mais seulement dans un intervalle restreint contenant 0, pour la fonction h par exemple, on a convergence ssi $|x| < 1$.

Mais comment alors calculer une valeur approchée de $f(x)$ quand x n'appartient pas à l'intervalle de convergence. La réponse s'est d'essayer de se ramener moyennant une transformation, dans un intervalle ou le polynôme de Taylor converge vers $f(x)$. Tout ça a l'air plutôt abstrait, voyons comment le faire pour calculer la valeur approchée de $\sqrt[3]{9}$. Récrivons d'abords $\sqrt[3]{9}$ comme suit:

$$\sqrt[3]{9} = (1+8)^{\frac{1}{3}} = (8(1+\frac{1}{8}))^{\frac{1}{3}} = 2(1+\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = 2f(\frac{1}{8}).$$

Il suffit donc d'obtenir une approximation avec la précision exigé de $f(\frac{1}{8})$. Cette fois-ci, le polynôme de Taylor $P_n(x)$ converge bien vers $f(x)$ au point $x = \frac{1}{8}$ puisque $\frac{1}{8} < 1$. Pour obtenir donc une valeur approchée de $f(\frac{1}{8})$ il suffit de trouver le premier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ai

$$\left| f(\frac{1}{8}) - P_n(\frac{1}{8}) \right| < 10^{-2}$$

Cette inégalité est réalisée comme on l'a déjà vu dés que

$$|R_n(\frac{1}{8})| < 10^{-2}$$

On faisant un calcul manuel, on obtient

$$|R_n(\frac{1}{8})| < \left| \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\cdots(\frac{1}{3}-n)}{(n+1)!} \frac{1}{8^{n+1}} \right| < 10^{-2} \iff n \geq 1.$$

Ainsi

$$P_1(\frac{1}{8}) = 1 + \frac{1}{24} \approx 1.0416$$

est valeur approchée de $f(\frac{1}{8})$ avec une erreur de l'ordre de 10^{-2} prés. En déduit en conséquence une valeur approchée de $\sqrt[3]{9}$ à 10^{-2} prés

$$\sqrt[3]{9} = 2f(\frac{1}{8}) \approx 2 \times 1.0416 = 2.0832.$$

2 Rappel sur les développement limités

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de x_0, si il existe un polynôme de degré n

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n,$$

tel que

$$f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n.$$

P_n est appelé la partie régulière du développement limité de f et le terme $o(x-x_0)^n$ est appelé le reste. En se limitera dans la suite au développement limité au voisinage de 0, puisque on peut facilement se ramener à ce cas via le changement de variable $X = x - x_0$.

2.1 Quelques propriétés du développement limité

Théorème 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement est unique.

Preuve: Supposons que f admet deux développements limités à l'ordre n, i.e. il existe deux polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $Q_n(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ tels que,

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$$

En faisant la différence on obtient,

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + o(x^n),$$

En faisant tendre x vers 0 dans cette dernière égalité, on obtient $a_0 = b_0$, ainsi on

$$0 = (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + o(x^n),$$

Divisant cette égalité par x nous donne

$$0 = (a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

et à limite on obtient $a_1 = b_1$. On répète ainsi cette dernière étape, pour obtenir au final $a_k = b_k$, $\forall 0 \leq k \leq n$, ce qui montrer l'unicité.

A présent qu'on a définit le développement limité, on aimerai certainement savoir comment le calculer? Pour les fonctions qui satisfont aux conditions du théorème de Taylor, on a bien la formule de Maclaurin. Ainsi si f est définie au voisinage de 0 et dérivable en 0 n fois, on aura

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Attention!, une fonction peut admettre un DL à un ordre n sans être n fois dérivable en 0 (et donc la formule de Maclaurin ne s'applique pas ici), mais ce sont des cas pathologiques dont nous nous soucierons guère dans la suite.

2.2 Développement limité des fonctions usuelles

Dans cette partie, nous donnerons le développement limités de quelques fonctions usuelles.

Théorème 4
Soit n un entier > 0, on a

(1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$

(2) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$

(3) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$

(4) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)} x^n}{n} + o(x^n).$

(5) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$

(6) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

Démonstration. (2) La fonction $x \mapsto \sin x$, étant de classe C^∞, alors la formule de Maclaurin nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Il suffit donc de trouver l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \sin x$. On montre facilement par récurrence que

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Par conséquent

$$\sin^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\sin^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ n = 2p, \ p \in \mathbb{N} \\ (-1)^p & \text{si } \ n = 2p+1. \end{cases}$$

Ainsi si $n = 2p+1$, pour $p \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

. Et dans le cas ou $n = 2p+2$, on obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

.

Comme vous l'avez compris, le développement limité d'une fonction f par la formule de Maclaurin, nécessite juste de trouver l'expression de la $n^{\text{ème}}$ dérivée de f. Je vous laisse alors le soin de faire les autres cas.

Vous trouverez un fichier posté sur mon espace, qui contient le développement limité de la plupart des fonctions usuelles.

Les fonctions traités dans le théorème précédent, sont assez simples et le calcul de leurs dérivées se fait sans difficulté, qu'on-est-il alors des fonctions dont l'expression est beaucoup plus complexe. Considérons par exemple la fonctions $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+x}} - e\cos(\ln(1+x))}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[$$

La fonctions est clairement de classe C^∞ dans son domaine de définition, par conséquent on peut très bien utiliser la formule de Maclaurin. Je vous invite donc à calculer le DL de f à l'ordre 3.

J'imagine que vous vous êtes vite rendu compte que c'est déjà impraticable de calculer ne serais-ce que la première dérivée, et vous vous demander à présent si il existe bien un autre moyen pour calculer le DL de f. La réponse est oui, on calcule d'abords le DL des fonctions simple composants f, et ensuite on se sert des règles énoncées dans le théorème qui va suivre, pour former le DL de f. Je vous promis de revenir sur la fonction f à la fin de cette section.

Théorème 5 (Opération sur les développement limités)
Soit I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définie sur I, admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0, i.e.

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \textit{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

1. *$f+g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est la somme de P_n et Q_n.*

2. *fg admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme constitué des termes du polynôme produit P_nQ_n de degré inférieur ou égal à n.*

3. *Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $f\circ g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme constitué des termes du polynôme composé $(P_n \circ Q_n)$ de degré inférieur ou égal à n.*

Je pense que les exemples parlent plus que la théorie

Exemple 1 (Somme)
1. Calculer le DL de $x \mapsto \sin x + \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
Cette fonction est la somme de deux fonctions usuelle, $x\mapsto \sin x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$. On développe alors chaque fonction à l'ordre 4. on obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Pour obtenir le développement limité à l'ordre 4 de notre fonction, il suffit de faire la somme des parties régulières de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\sin x + \ln(1+x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + o(x^4).\\ &= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).\square\end{aligned}$$

2. Développer à l'ordre 4 la fonction $f(x) = e^x - 2\cos x$ au voisinage de 0.
On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

et ainsi

$$\begin{aligned}2\cos x &= 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\\ &= 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4).\square\end{aligned}$$

Multiplier une fonction négligeable devant x^4 par une constante, donnera une fonction négligeable devant x^4, i.e, $2o(x^4) = o(x^4)$ voir la proposition 1.
En déduit à présent le DL à l'ordre 4 de f,

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x - 2\cos x\\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \left(2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)\\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(2 - x^2 + \frac{x^4}{12}\right) + o(x^4)\\ &= -1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).\square\end{aligned}$$

Exemple 2 (Multiplication)
1. *Donner le Dl à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = xe^x$ au voisinage de 0.*
Il est inutile d'invoquer la règle de multiplication des DL pour cette exemple, il suffit juste de multiplier tout le développement limité de e^x par x, cela suggère donc de développer d'abords e^x à l'ordre 3, pour obtenir un DL d'ordre 4 de f, on a donc

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

on déduit alors

$$\begin{aligned} f(x) = xe^x &= x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4).\square \end{aligned}$$

Où on a utilisé la proposition 1, pour avoir $xo(x^3) = o(x^4)$. Si on avais utilisé la règle de multiplication ici, on aurez eu à développer $x \to e^x$ jusqu'à l'ordre 4, ensuite multiplier sa partie régulière par x et garder uniquement les termes de degré inférieurs ou égal à 4.

En règle général si on a par exemple une fonction $f(x) = P(x)h(x)$, où P est un polynôme d'ordre m et h est une autre fonction, qu'on veut développer à un ordre $n > m$, il suffit juste de développer h à l'ordre $n - m$. En supposant que $h(x) = Q(x) + o(x^{n-m})$ où Q est un polynôme de degré $(n - m)$, partie régulière du DL de h à l'ordre $(n - m)$, on obtient alors le DL de f à l'ordre n, en multiplions le polynôme P et Q qui donne un polynôme de degré n,

$$f(x) = P(x)Q(x) + o(x^n).$$

2. *Donner le Dl à l'ordre 3 de la fonction $g(x) = \sin x \ln(1 + x)$ au voisinage de 0.*
On développera d'abords les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \ln(1 + x)$ à l'ordre 3, on obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On obtient ensuite le DL à l'ordre 3 de g en utilisant la règle de multiplication des DL,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x \ln(1 + x) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big\rfloor_3 + o(x^3) \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).\square \end{aligned}$$

Le signe $\rfloor_3$ veut dire tronquer le polynôme à l'ordre 3, i.e. garder uniquement les termes dont le degré est inférieur ou égal à 3.
3. *Donner le Dl à l'ordre 3 de la fonction $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0.*
Si vous regardez la table des DL des fonctions usuelles, vous ne trouverez pas la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, ce qui est tout à fait normal car cette fonction n'admet pas de développement limités au voisinage

de 0*. Il suffit ici de développer la fonction* $x \mapsto \sin x$ *à l'ordre* 4*, et diviser ensuite par* x*, pour obtenir le développement limité de* h *à l'ordre* 3*.*

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x} \\ &= \frac{x}{x} - \frac{x^3}{6x} + \frac{o(x^4)}{x} \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3). \square \end{aligned}$$

Exemple 3 (Composition)

1. *Donner le Dl à l'ordre* 5 *de la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

On remarque que $f = f_1 \circ f_2$ *avec* $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *et* $f_2(x) = x^2$*. Il suffit donc de développer les fonctions* f_1 *et* f_2 *à l'ordre* 5 *et d'utiliser la règle de composition des DL pour obtenir celui de* f*. On a alors*

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5),$$

f_2 *c'est déjà un polynôme, il n'y a rien à développer ici. En déduit alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^2} \\ &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)_{x=x^2}\Big]_5 + o(x^5) \\ &= 1 + x^2 + x^4 + o(x^5). \square \end{aligned}$$

2. *Donner le DL à l'ordre* 4 *de la fonction* $g(x) = \sin(\ln(1+x))$.

On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

En déduit alors le DL de g *par composition,*

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(\ln(1+x)) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)_{x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}\Big]_4 + o(x^4) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^3}{6}\Big]_4 + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4). \square \end{aligned}$$

3. *Donner le DL à l'ordre* 3 *de la fonction* $h(x) = e^{\cos x}$.

Il faut faire attention ici, car $\cos 0 \neq 0$*, donc la règle de composition des DL ne s'applique pas. On va devoir récrire un peu la fonction* h *pour pouvoir calculer son DL par composition.*

$$h(x) = e^{\cos x} = e^{\cos x - 1 + 1} = e e^{\cos x - 1}.$$

Ainsi la fonction $x \mapsto e^{\cos x-1}$ *peut être développé en utilisant la règle de composition. On a*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

donc

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

D'autre part,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

En déduit alors,

$$\begin{aligned} e^{\cos x-1} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)_{x=-\frac{x^2}{2}}\Big]_3 + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

On obtient en conséquence le DL à l'ordre 3 *de* h *en multiplions par* e*,*

$$\begin{aligned} h(x) &= ee^{\cos x-1} \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3). \square \end{aligned}$$

4. *Donner le DL à l'ordre* 5 *de la fonction* $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *au voisinage de 0.*
Développons le $\sin$ *à l'ordre* 5*,*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

Pour obtenir le développement de $\dfrac{1}{\cos x}$ *il suffit de remarque que*

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + \cos x - 1}.$$

Elle est donc composée des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ *et* $x \mapsto \cos x - 1$*. Développons ces deux fonctions à l'ordre* 5*.*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

On déduit alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 + \cos x - 1} \\ &= \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5\right)_{x=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}\Big]_5 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5). \end{aligned}$$

On peut à présent calculer le développement limité à l'ordre 5, de tan *en utilisant la règle de multiplication des DL,*

$$\begin{aligned}
\tan x &= \sin x \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)\Big]_5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).\square
\end{aligned}$$

Exemple 4
Comme promis, nous allons calculer le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0*, de la fonction monstrueuse* f

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+x}} - e\cos(\ln(1+x))}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

Commençons par développer à l'ordre 3 *la fonction* $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$*, il s'agit donc d'une composée de deux fonctions, mais comme la fonction* $x \mapsto \sqrt{1+x}$ *ne s'annule pas à l'origine, on devra donc user de l'astuce des exemples précédents, on a*

$$e^{\sqrt{1+x}} = e^{1+\sqrt{1+x}-1} = ee^{\sqrt{1+x}-1}.$$

Développons les fonction e^x *et* $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$ *à l'ordre* 3*,*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

On déduit alors,

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{1+x}-1} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)_{x=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}}\Big]_3 + o(x^3) \\
&= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^3}{6}\right)\Big]_3 + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{48} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Et on trouve,

$$e^{\sqrt{1+x}} = ee^{\sqrt{1+x}-1} = e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48} + o(x^3).\square$$

Le développement de $\cos(\ln(1+x)$*, ressemble à celui de l'exemple 3 (2), on l'omettra ici par brièveté,*

$$e\cos(\ln(1+x)) = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^3}{2} + o(x^3).$$

Et ainsi, on obtient

$$
\begin{aligned}
e^{\sqrt{1+x}} - e\cos(\ln(1+x)) &= \left(e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48} + o(x^3)\right) - \left(e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^3}{2} + o(x^3)\right) \\
&= \left(e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48}\right) - \left(e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^3}{2}\right) + o(x^3) \\
&= \frac{ex}{2} + \frac{ex^2}{2} - \frac{23ex^3}{48} + o(x^3).
\end{aligned}
$$

Calculons à présent le DL à l'ordre 3 *de* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*, au voisinage de* 0*. Nous nous servirons du DL de la fonction* $x \mapsto (1+x)^{\frac{-1}{2}}$ *que vous trouverez dans la table des DL. On a*

$$x \mapsto (1+x)^{\frac{-1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3).$$

On déduit alors,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16}\right)_{x=-x^2}\Big\rfloor_3 + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).
\end{aligned}
$$

On obtient finalement le DL de f *par la règle de multiplication,*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{\sqrt{1+x}} - e\cos(\ln(1+x))}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \left(e^{\sqrt{1+x}} - e\cos(\ln(1+x))\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \left(\frac{ex}{2} + \frac{ex^2}{2} - \frac{23ex^3}{48}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\Big\rfloor_3 + o(x^3) \\
&= \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{4} + \frac{ex^2}{2} - \frac{23ex^3}{48} + o(x^3) \\
&= \frac{ex}{2} + \frac{ex^2}{2} - \frac{11ex^3}{48} + o(x^3). \square
\end{aligned}
$$

Exercice 5

(1) Écrire le développement limité de f *au voisinage de* 0*, à l'ordre 3.*

Calculer le développement limités de f*, requière d'écrire le développement limité des fonction élémentaires la composant à l'ordre 3, et d'utiliser ensuite les règles du calcul des DL déjà expliqué pour déduire celui de* f*: On a*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$

donc

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + o(x^3).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

ainsi

$$\begin{aligned}\ln(1+(x+x^2)) &= (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3}\Big]_3 + o(x^3)\\ &= x + x^2 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\square.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x(1+ax)}{1-x^2} &= \frac{x+ax^2}{1-x^2}\\ &= (x+ax^2)(1+x^2+o(x^3))\\ &= (x+ax^2)(1+x^2)\Big]_3 + o(x^3)\\ &= x + x^3 + ax^2 + o(x^3)\\ &= x + ax^2 + x^3 + o(x^3)\square.\end{aligned}$$

Il nous nous reste qu'à combiner tout ses DL pour obtenir celui de f;

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x(1+ax)}{1-x^2} - \ln(1+x+x^2)\\ &= (x+ax^2+x^3+o(x^3)) - (x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3))\\ &= x + ax^2 + x^3 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\\ &= \frac{2a-1}{2}x^2 + \frac{5x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

(2) (a) Le plus grand travail a été fait à la question (1), on a donc

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x^3} &= \frac{\frac{2a-1}{2}x^2 + \frac{5x^3}{3} + o(x^3)}{x^3}\\ &= \frac{2a-1}{2x} + \frac{5}{3} + o(1),\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2a-1}{2x} + \frac{5}{3} + o(1)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2a-1}{2x} + \frac{5}{3} \quad (\lim_{x\to 0} o(1) = 0).$$

Tout dépendra donc de la limite de $\frac{2a-1}{2x}$. Le seul cas ou cette limite est fini est quand $2a-1=0$, i.e. $a=\frac{1}{2}$, autrement si $a \neq \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{2a-1}{2x} = \pm\infty$, dans ce cas on aura

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \frac{5}{3}.$$

Exercice 6

(1) Écrire le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.
On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Écrivons le DL à l'ordre 3 de la fonction $x \to e^{-x}\ln(x+1)$ On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, et donc en remplaçant x par $-x$, on obtient le DL à l'ordre 3 de $x \to e^{-x}$;

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

D'autre part, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On peut donc calculer le DL de $x \to e^{-x}\ln(x+1)$ en utilisant la règle de multiplication des DL, ainsi

$$\begin{aligned}
e^{-x}\ln(x+1) &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\\
&= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big]_3 + o(x^3)\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\
&= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\square.
\end{aligned}$$

Et ainsi on obtient,

$$\begin{aligned}
\sin x - e^{-x}\ln(x+1) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)\\
&= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) + +o(x^3)\\
&= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)\square.
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

on obtient au final le DL de f à l'ordre 3, en utilisant la règle de multiplication,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\sin x - e^{-x}\ln(x+1)) \times \frac{1}{x+1}\\
&= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right)\\
&= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3\right)\left(1 - x + x^2 - x^3\right)\Big]_3 + o(x^3)\\
&= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)\\
&= \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 + o(x^3)\square.
\end{aligned}$$

(2) En déduire la valeur de la limite suivante:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^{-x}\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x}\right).$$

On peut (Je vous recommande vivement de le faire) calculer cette limite en utilisant les développement limités. Mais comme il s'agit plutôt de déduire cette limite, nous allons essayer d'exploiter au mieux la question (1).
On peut récrire f comme suit (multiplier tout simplement le nominateur et le dénominateur par e^x):

$$f(x) = \frac{e^x\sin x - \ln(x+1)}{(x+1)e^x}.$$

En utilisant le DL de f déjà calculé, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x^2} &= \frac{e^x \sin x - \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} \\ &= \frac{1}{x^2}(\frac{3}{2}x^2 - 3x^3 + o(x^3)) \\ &= \frac{3}{2} - 3x + o(x)\square.\end{aligned}$$

On calcul alors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}(\frac{3}{2} - 3x + o(x)) = \frac{3}{2}.$$

Posons à présent

$$h(x) = \frac{-e^{-x}\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x}.$$

Nous allons essayer de faire apparaître le terme $\frac{f(x)}{x^2}$ dans cette fonction h.

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{-e^{-x}\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} \\ &= \frac{-e^{-x}\sin x + e^x \sin x - e^x \sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})\sin x - e^x \sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})\sin x}{x^2(x+1)e^x} - \frac{e^x \sin x - \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})\sin x}{x^2(x+1)e^x} - \frac{f(x)}{x^2}\square.\end{aligned}$$

Tâchons à présent de la calculer limite suivante:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})\sin x}{x^2(x+1)e^x}.$$

Je vous rassure tout de suite, on ne vas pas développer cette dernière fonction en entier, mais seulement une partie. plus précisément

$$e^x - e^{-x} = (1 + x + o(x)) - (1 - x + o(x)) = 2x + o(x).$$

où on a développé les fonctions $x \to e^x$ et $x \to e^{-x}$ juste à l'ordre 1. On peut à présent calculer cette dernière limite,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})\sin x}{x^2(x+1)e^x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2x + o(x))\sin x}{x^2(x+1)e^x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{2x + o(x)}{x} \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{e^x}\right) \\ &= 2.\square\end{aligned}$$

On obtient au final,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^{-x}\sin x + \ln(x+1)}{x^2(x+1)e^x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x - e^{-x})\sin x}{x^2(x+1)e^x} - \frac{f(x)}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})\sin x}{x^2(x+1)e^x} - \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \\ &= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.\square\end{aligned}$$