EXAMEN D'ANALYSE I

Durée : (02) deux heures.

Exercice 1 (04 pts). *Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum s'ils existent des deux ensembles suivants* (**en justifiant, si nécessaire, vos réponses en utilisant la caractérisation des bornes supérieures et inférieures**).

$$A = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}, \quad B = \left\{1 + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 2 (06 pts). *Soit la fonction f définie par :*

$$f: \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x+1} \end{array}.$$

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

(1) *Étudier la monotonie des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(2) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - v_{n+1}| \le \frac{1}{2}|u_n - v_n|$.*

(3) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - v_n| \le (\frac{1}{2})^n$.*

(4) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

(5) *Calculer la limite de chacune des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 3 (06 pts). *On définit la fonction f suivante :* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(2 - e^x)}{x} & si\ x < 0 \\ -x - 1 & si\ x \ge 0 \end{cases}.$

(1) *Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.*

(2) *Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.*

(3) *La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? justifier votre réponse*

☞ *Il est permis d'utiliser la règle de l'Hôpital en cas de besoin.*

Exercice 4 (04 pts).

(1) *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que :* $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

(2) *Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ tel que :* $f(0) = 0$ *et* $f'(1).f(1) < 0$.

— *Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.*

☞ *Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Rolle.*

Bon courage

Date: Jeudi, 24 mars 2016.

Université A. MIRA - Bejaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques / MI

/ Corrigé de l'examen d'Analyse 1 /

/ 2015 / 2016 /

(S1)

Exercice 1 (4 pts) $A = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, $B = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

1) $A \neq \phi$ car $\exists x_0 = -1 \in \mathbb{R} / x_0 \in A$

$\forall x \in A : -1 \leq x \leq \sqrt{2}$

Donc $\exists M = \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \exists m = -1 \in \mathbb{R} / \forall x \in A : -1 \leq x \leq \sqrt{2}$

par suite A est bornée (A est majorée et minorée)

$A \neq \phi$ majorée, minorée $\Rightarrow$ sup A, inf A existent (0,25)

Min A = -1 (0,25) (existe) $\Rightarrow$ inf A = min A = -1 (0,25)

Montrons que sup A = $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ est un majorant de A, reste à montrer qu'il est le plus petit des majorants de A

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 \in A / x_0 > \sqrt{2} - \varepsilon$

on a, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. (1)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in \mathbb{Q} / \sqrt{2} - \varepsilon < r < \sqrt{2}$

si $\varepsilon \geq \sqrt{2} + 1$ alors, il suffit de prendre $x_0 = -1$

sinon ($\varepsilon < 1 + \sqrt{2}$)

comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors il suffit de prendre $x_0 = r \in \mathbb{Q} \cap]\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2}[\subset A$

D'où, $\sqrt{2}$ est le plus petit des majorants de A

Il en résulte, sup A = $\sqrt{2}$

Comme sup A = $\sqrt{2} \notin A$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) (0,25)

alors MAX A n'existe pas.

2) $B \neq \phi$ car $\exists x_0 = 2 \in \mathbb{R} / x_0 \in B$

$\forall x \in B : 1 < x \leq 2$

Donc $\exists M = 2, m = 1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in B : 1 < x \leq 2$

B est bornée (B est majorée et minorée)

$B \neq \emptyset$ majorée et minorée $\Rightarrow$ sup B, inf B existent (0,25)

MAX B = 2 (existe) car 2 est un majorant de B (0,2

qui est lui même dans B. Ce qui entraine que

sup B = MAX B = 2.

Montrons que inf B = 1 :

1 est un minorant de B, reste à montrer qu'il est le plus

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in B / \ x_0 < 1 + \varepsilon$

On cherchera x_0 sous la forme $x_0 = 1 + \frac{1}{n_0}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + \frac{1}{n_0} < 1 + \varepsilon \iff \frac{1}{n_0} < \varepsilon \iff n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$ (1)

Il suffit de prendre $n_0 = 1 + E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

(ou bien comme $\mathbb{R}$ est Archimédien ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \ n_0 >$

l'existance de n_0 est assurée)

D'où, 1 est le plus grand des minorants de B.

Il en résulte, inf B = 1

Comme $1 \notin B$ alors MIN B n'existe pas. (0,25)

Exercice 2 (6 pts) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 1} \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 1}{v_n + 1} \end{cases}$

1/. La monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pour $D = [0, +\infty[$ on a bien $f(D) \subset D$ car :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1} \geq 0$$

ceci montre que les deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont

bien définies. Par suite la monotonie des deux suites

(U_n) et (v_n) résulte de la croissance de f

$$\forall x \in D : \ f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$ (0,5)

Donc f est strictement croissante. Ce qui entraine

les deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement

Monotones.

On a, $U_0 = 1$ et $U_1 = f(U_0) = f(1) = \frac{3}{2}$ (0,5)
comme $U_0 < U_1$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissan

On a de même, $v_0 = 2$ et $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ (0,5)
comme $v_0 > v_1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissa

2/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} ; |U_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |U_n - v_n|$

On a, $U_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+1} - \frac{2v_n+1}{v_n+1} = \frac{(2U_n+1)(v_n+1) - (U_n+1)(2\ldots}{(U_n+1)(v_n+1)}$

$= \frac{2U_nv_n + 2U_n + v_n + 1 - 2U_nv_n - U_n - 2v_n - 1}{(U_n+1)(v_n+1)}$

$= \frac{U_n - v_n}{(U_n+1)(v_n+1)}$ (0,5)

D'où, $|U_{n+1} - v_{n+2}| = \frac{|U_n - v_n|}{(U_n+1)(v_n+1)} \leqslant \frac{|U_n - v_n|}{U_n+1}$ (0,5) (car v_n

comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geqslant U_0 = 1$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{U_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ (0,5)

Et en résulte, $\forall n \in \mathbb{N} : |U_{n+1} - v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2} |U_n - v_n|$

3/ Montrons (par récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N} : |U_n - v_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(a) Pour $n = 0$: on a, $|U_0 - v_0| = |1-2| = 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ (0,5)
la propriété est donc vraie pour $n = 0$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|U_n - v_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montr
que $|U_{n+1} - v_{n+1}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (0,5)

On a, $|U_{n+1} - v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2} |U_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N} : |U_n - v_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4/ En déduire que (U_n) et (v_n) sont adjacentes :

On a, $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 \leqslant |U_n - v_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ alors d'après le théorème de Gen (0,5)

$\lim |U_n - v_n| = 0$

Par ailleurs comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
Décroissante et $|U_n - v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors (U_n) et (v_n) sont adja

5/ Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite

$\exists!\ l \in \mathbb{R}\ /\ l = \lim U_n = \lim v_n$ (0,25)

En partant de la relation $U_{n+1} = f(U_n)$ et en prenant les limites de ces deux membres quand n tend vers $(+\infty)$, on trouve (vue la continuité de f)

$l = f(l) = \dfrac{2l+1}{l+1}$ (0,25)

ce qui donne, $l^2 - l - 1 = 0$

Les solutions de cette équation sont : $l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

comme $l_2 < 0$ alors l_2 ne peut être la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (0,25)

car $\forall n \in \mathbb{N}\ \ U_n \geq 0$

D'où, $l = l_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (0,25)

Exercice 3 (6pts)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(2-e^x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ -x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1/ La continuité de f:

pour $x > 0$: $f(x) = -x-1$

f est un polynôme continue sur $\mathbb{R}$, par suite f est continue sur $]0,+\infty[$ (0,5)

pour $x < 0$: $f(x) = \dfrac{\ln(2-e^x)}{x}$

f est le produit, composée des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \frac{1}{x}$ fraction rationnelle continue sur $D_{f_1} = \mathbb{R}^*_-$

$f_2(x) = \ln x$ fonction usuelle continue sur $]0,+\infty[$

(0,5) $f_3(x) = 2 - e^x$ fonction usuelle continue sur $\mathbb{R}$, par suite sur $\mathbb{R}$

$(f = f_1 \cdot f_2 \circ f_3)$ on a $f_3(]-\infty,0[) =]1,2[$ et f_2 est bien continue sur $]1,2[$ par suite $f_2 \circ f_3$ est continue sur $\mathbb{R}^*_-$

Il en résulte, f est continue sur $\mathbb{R}^*_-$ car elle est le produit de deux fonctions f_1 et $(f_2 \circ f_3)$ continues sur cet intervalle. (0,25)

En $x = 0$ on a $f(0) = -1$ $\lim f(x) = \lim (-x-1) = -1 = f(0)$ f est continue à droite de x

Il reste à étudier la continuité de f à gauche en zéro. (on a f(0) = -1)

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\ln(2-e^x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ (F I)}$$

$$\frac{\ln(2-e^x)}{x} = \frac{\ln[1+(1-e^x)]}{x} = \frac{1-e^x}{x} \cdot \frac{\ln[1+(1-e^x)]}{(1-e^x)}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\ln(2-e^x)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1-e^x}{x} \cdot \frac{\ln[1+(1-e^x)]}{(1-e^x)}$$ (0,5)

$$= (-1)(1) = -1 = f(0)$$

d'où f est continue à gauche de $x_0 = 0$. Comme $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0) = -1$ alors f est continue en 0 (0,25)

Conclusion : f est continue sur IR.

La dérivabilité :

Sur $]0, +\infty[$ $f(x) = -x - 1$ dérivable sur IR car (0,5)
f est un polynôme par suite f est dérivable sur $]0, +\infty[$

Sur $]-\infty, 0[$: $f(x) = \frac{\ln(2-e^x)}{x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$
car f est le produit, composée de fonctions dérivables sur IR^*_- (0,5)
(pour les mêmes raisons que celles citées précédemment)

En $x = 0$ $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-x-1+1}{x} = -1$. f est dérivable à droite de $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = -1$ (0,25)

Il reste à étudier la dérivabilité de f à gauche en 0

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{\ln(2-e^x)}{x}+1}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

$$\frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2} = \frac{\ln(2-e^x)+\ln e^x}{x^2} = \frac{\ln(2-e^x)e^x}{x^2} = \frac{\ln[2e^x - e^{2x}]}{x^2}$$

$$= \frac{\ln[1+(2e^x - e^{2x} - 1)]}{x^2} = \frac{-(1-e^x)^2}{x^2} \cdot \frac{\ln[1-(1-e^x)^2]}{-(1-e^x)^2}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -\left(\frac{1-e^x}{x}\right)^2 \cdot \frac{\ln[1-(1-e^x)^2]}{-(1-e^x)^2} = -1 \cdot 1 = -1$$ (0,5)

f est dérivable à gauche en 0 et on a : $f'_g(0) = -1$

comme $f'_d(0) = -1 = f'_g(0)$ alors f est dérivable en 0 (0,25)

et on a $f'(0) = -1$

Conclusion : f est dérivable sur IR.

2/ f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Il s'agit d'étudier la continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

on a $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x(e^x-2)} - \dfrac{\ln(2-e^x)}{x^2} & \text{si } x<0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ (0,5)

→ sur $]-\infty, 0[$ $\quad f'(x) = \dfrac{e^x}{x(e^x-2)} - \dfrac{\ln(2-e^x)}{x^2}$ est continue sur car elle est la somme, produit, et composée de fonctions usuelles continues sur les intervalle requis. (0,25)

→ Sur $[0, +\infty[$: $f'(x) = -1$ constante donc continue sur cet intervalle (0,25)

Il reste à étudier la continuité à gauche de zéro :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)}{x^2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x}\left[1 + \frac{e^x}{e^x-2}\right] - \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2e^x-2}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{2}{e^x-2}}_{\to -2} - \underbrace{\frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}}_{\to -1}$$ (0,5)

$$= -2+1$$

$$= -1 = f'(0)$$

D'où, f' est continue à gauche de 0.

Comme $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = f'(0) = -1$ (0,25)

Alors f' est continue en 0.

Conclusion : f' est continue sur $\mathbb{R}$.
D'où, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. (0,25)

→ Remarque : La limite $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x)$ peut être également calculée en utilisant la règle de l'Hôpital.

Exercice 4 (4 pts).

1/ Montrons que : $\exists x \in]0,1[\,/\, 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+$

Soit f la fonction suivante :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)\,x$$ (1)

f est un polynôme continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, par suite continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$

On a $f(0) = 0$ et $f(1) = (a+b+c) - (a+b+c) = 0$

Donc $f(0) = f(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0,1] \\ f \text{ dérivable sur }]0,1[\\ f(0) = f(1) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{théorème}]{\text{de Rolle}} \begin{pmatrix} \exists x_0 \in]0,1[\text{ tel que} \\ f'(x_0) = 0 \end{pmatrix}$$ (1)

$$f'(x_0) = 0 \iff 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 = a+b+c$$

2/ On introduit la fonction g suivante :

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} & \text{si } x \in [0,1[\\ f'(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$ (0,5)

g est continue sur $[0,1]$ car :

sur $[0,1[$: $g(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ produit de deux fonctions continues sur $[0,1[$

$g = g_1 \cdot g_2$ où $g_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ continue sur $[0,1[$ (0,25)

$g_2(x) = f(x) - f(1)$ continue sur $[0,1[$ (car f est continue sur $[0$

En $x = 1$ (à gauche) Comme f est dérivable au pts $x_0 =$

on a, $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$ (0,25)

C'est à dire $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1)$

D'où, la continuité de g à gauche du pts $x_0 = 1$

Conclusion : g est continue sur $[0,1[$

g est dérivable sur $]0,1[$ car elle est le produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. 0,25

On a $\begin{cases} g(0) = \dfrac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = f(1) & \text{car } f(0) = 0 \\ g(1) = f'(1) \end{cases}$

0,25

comme $f'(1) \cdot f(1) < 0$ (Hypothèse) alors $g(0) \cdot g(1) < 0$
ce qui entraîne d'après le théorème des valeurs intermédiaire
qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $g(x_0) = 0$
ce qui revient à dire :

$\exists\, x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = f(1)$

il en résulte d'après le théorème de Rolle 0,5

$\exists\, c \in]x_0, 1[\subset]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$

Barème de l'examen d'Analyse 1

(2015 - 2016)

Exercice 1 (4pts)

$\begin{cases} A \neq \emptyset \text{ majorée et minorée} \Rightarrow \sup A, \inf A \text{ existent} \longrightarrow 0{,}25\,pt \\ B \neq \emptyset \text{ majorée et minorée} \Rightarrow \sup B, \inf B \text{ existent} \longrightarrow 0{,}25\,pt \end{cases}$

$\inf A = -1 \longrightarrow 0{,}25\,pt$

$\min A = \inf A = -1 \longrightarrow 0{,}25\,pt$

$\max A$ n'existe pas $\longrightarrow 0{,}25\,pt$

$\sup A = \sqrt{2} \longrightarrow 1\,pt$

$\inf B = 1 \longrightarrow 1\,pt$

$\min B$ n'existe pas $\longrightarrow 0{,}25\,pt$

$\max B = 2 \longrightarrow 0{,}25\,pt$

$\sup B = \max B = 2 \longrightarrow 0{,}25\,pt$

Exercice 2 (6pts) f est strictement croissante $\longrightarrow 0{,}5\,pt$

1/ Monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\longrightarrow 0{,}5\,pt$

Monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\longrightarrow 0{,}5\,pt$

2/ $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - v_{n+1}| < \frac{1}{2}|u_n - v_n| \longrightarrow 1{,}5\,pt$

3/ $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1\,pt$

4/ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes $\longrightarrow 1\,pt$

5/ $\lim u_n = \lim v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow 1\,pt$

Exercice 3 (6pts)

1/ La continuité de f $\begin{cases} \text{sur }]0,+\infty[\longrightarrow 0{,}5\,pt \\ \text{sur }]-\infty,0[\longrightarrow 0{,}5\,pt \\ \text{en } x=0 \longrightarrow 1\,pt \end{cases}$

2/ La dérivabilité de f $\begin{cases} \text{sur }]0,+\infty[\longrightarrow 0{,}5\,pt \\ \text{sur }]-\infty,0[\longrightarrow 0{,}5\,pt \\ \text{en } x=0 \longrightarrow 1\,pt \end{cases}$

3/ f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ $\longrightarrow 2\,pt$

Exercice 4 (4pts)

1/ $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x,\ x \in [0,1] \longrightarrow 1\,pt$

Rolle sur $[0,1]$ $\longrightarrow 1\,pt$

2/ $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} & \text{si } x \in [0,1[\longrightarrow 0{,}5 \\ f'(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow 1\,pt$

(a) TVI sur $[0,1]$ $\longrightarrow 0{,}5$