

Examen de rattrapage d'Analyse I

Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. (06 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.
- 2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- 3) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. (07 pts)

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .
- 2) Etudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
- 3) La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 3. (07 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

- 1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 2) Montrer que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 3) Déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.
- 4-a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.
- 4-b) Déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Bon courage

Corrigé d'Analyse I (rattrapage)

Solution 1.

1) On raisonne par récurrence.

Pour $n = 0$, $0 \leq u_0 = 0 \leq 3$, la propriété est vraie.

Supposons que $0 \leq u_n \leq 3$ et on montre que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$. On a

$$0 \leq u_n \leq 3 \implies 3 \leq 2u_n + 3 \leq 9 \implies \sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3 \implies 0 \leq \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

2) La suite est une suite récurrente. On a

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } f([0, 3]) \subset [0, 3], \text{ où } f(x) = \sqrt{2x + 3}.$$

L'étude de la monotonie de la suite (u_n) revient à celle de la fonction f . Comme f est croissante sur $[0, 3]$ ($f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 3}} > 0, \forall x \in [0, 3]$) et $f(u_0) - u_0 = \sqrt{3} \geq 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 3, donc elle converge. Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
On a

$$u_{n+1} = f(u_n) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) \implies l = f(l).$$

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{2l + 3} \Leftrightarrow l^2 = 2l + 3 \Leftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0.$$

Cette dernière équation elle admet deux solutions $l_1 = -1$ et $l_2 = 3$,
donc $l = 3$ (car $u_n \geq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$).

Solution 2.

La fonction f est définie sur \mathbb{R} .

1) Etude de la continuité de f sur \mathbb{R}

1-a) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, La fonction f est continue (car rapport de deux fonctions continues)

1-b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, La fonction f est continue, (car f est un polynôme).

1-c) La continuité de f en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = 0 = f(0).$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Alors f est continue en 0. D'où la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

2) Etude de la dérivabilité de f sur \mathbb{R}

2-a) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, La fonction f est dérivable (car rapport de deux fonctions dérivables)

2-b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, La fonction f est dérivable, (car f est un polynôme).

2-c) La dérivabilité de f en 0. On a

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$$

et

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2},$$

La fonction f est dérivable en 0. D'où f est dérivable sur \mathbb{R} .

3) La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$? On a

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

3-a) On a f' est continue sur \mathbb{R}^* (car sur $]-\infty, 0[$, rapport de deux fonctions continues et sur $]0, +\infty[$ est constante).

3-b) La continuité de f' en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0), \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0).$$

Alors f' est continue en 0. D'où f est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Solution 3. 1) Montrons que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[n, n+1]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\exists c \in]n, n+1[, f(n+1) - f(n) = f'(c),$$

ou encore

$$\exists c \in]n, n+1[, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

On a

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

donc

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Montrons que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}, \forall k \in \mathbb{N}^* \implies 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \implies 2\sqrt{n+1} - 2 < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (car $u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = +\infty$).

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

a) Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone. On a

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} = (u_{n+1} - u_n) - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < 0.$$

D'où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

b) Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée. On a

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2 \implies u_n - 2\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 > -2 \implies v_n > -2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et minorée donc elle converge.