PROGRAMMATION LINÉAIRE

20 Juin 2020
2.0

Table of contents

Objectives 3

I - **Chapitre III : Algorithme du Simplexe** 4

1. Position du problème 4
2. Amélioration de la fonction objectif 4
3. Schéma de l'Algorithme du Simplexe 7
4. Tableaux du Simplexe 8
5. Initialisation de l'Algorithme du Simplexe 11
   - *5.1. Solution réalisable initiale* 11
   - *5.2. Méthode du Big-M (méthode de la base artificielle)* 12
   - *5.3. Méthode des deux Phases* 14
6. Quiz: 17

Objectives

Ce module a pour objectifs de sensibiliser l'étudiant à l'importance pratique des problèmes d'optimisation linéaires, de maîtriser l'ensemble numérique sous-jacent, et de pouvoir utiliser ces techniques dans des problèmes pratiques.

Près-requis

Pour que les étudiants puissent assimilés ce cours il faut bien avoir au moins ces connaissances ci-dessous :

- Mathématiques et informatique générale,
- Métriser le calcul matricielle.

Chapitre III : Algorithme du Simplexe

I

1. Position du problème

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$max\ \ Z = c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad (3.1)$$

où $A = (I, J), I = \{1, 2, ..., m\}, J = \{1, 2, ..., n\}$ et $rang(A) = m < n$

2. Amélioration de la fonction objectif

Le principe de l'algorithme du Simplexe est de déterminer une solution optimale en se déplaçant de sommet en sommet de façon à améliorer la fonction objectif. Le déplacement se fait à partir de la solution de base de départ vers une solution de base réalisable en suivant une arête le long de laquelle l'objectif s'ccroit.

Soit $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ une solution de base réalisable et A_B la matrice de base associée. Si le critère d'optimalité *(2.10)* est vérifie alors x est une solution optimale du problème *(3.1) (théorème 2.6)* sinon, deux cas peuvent se présenter :

1. Il existe un indice j_0 dans J_N tel que E_{j_0} est strictement négatif auquel correspond le vecteur non positif $A_B^{-1}a_{j_0}$ auquel cas le problème *(3.1)* n'admet pas de solution optimale *(théorème 2.7)*.
2. Pour tout indice négatif j_0 dans J_N le vecteur $A_B^{-1}a_{j_0}$ contient des composantes positives alors une itération de l'algorithme du simplexe consiste à construire une autre solution réalisable de base $\overline{x}$ telle que $Z(\overline{x}) \geq Z(x)$.

La construction d'une nouvelle solution réalisable basique $\overline{x}$ doit assurer un accroissement maximal de la fonction objectif, pour cela, il faudrait choisir dans la relation *(2.16)* le paramètre θ aussi grand que possible et choisir l'indice j_0 tel que :

$$E_{j_0} = min\{E_j / j \in J_N\} \qquad\qquad (3.2)$$

Le paramètre θ aussi grand que possible, doit aussi être choisi de telle sorte que le vecteur $\overline{x}$ donné par la relation (*2.16)* soit une solution réalisable. Pour cela, il faudrait avoir :

$$\overline{x_B} = x_B + \theta l_B \geq 0$$

$$\Rightarrow \overline{x_j} = x_j + \theta l_j \geq 0, \ \ \forall j \in J_B \qquad\qquad (3.3)$$

En posant $A_B^{-1}a_{j_0} = \{x_{jj_0},\ \ j \in J_B\}$ on aura :

$$\overline{x_j} = x_j - \theta x_{jj_0}, \quad j \in J_B \qquad (3.4)$$

Pour $x_{jj_0} > 0$ on a :

$$\theta \leq \frac{x_j}{x_{jj_0}}, \quad x_{jj_0} > 0, \quad j \in J_B \qquad (3.5)$$

Pour $x_{jj_0} \leq 0$ on a :

$$\overline{x_j} \geq 0, \quad \forall \theta > 0. \qquad (3.6)$$

Ainsi, le vecteur $\overline{x}$ construit par la relation *(2.16)* sera une solution réalisable pour le problème *(3.1)*, si

$$\theta \leq \{\theta_j \ = \ \frac{x_j}{x_{jj_0}}, \quad x_{jj_0} > 0, \quad j \in J_B\}. \qquad (3.7)$$

Dans le cas contraire, c'est à dire, si

$$\theta > \{\theta_j \ = \ \frac{x_j}{x_{jj_0}}, \quad x_{jj_0} > 0, \quad j \in J_B\}.$$

le vecteur $\overline{x}$ aura des composantes négatives et par conséquent il ne sera pas une solution réalisable. Ainsi, la plus grande valeur θ^0 telle que le vecteur $\overline{x} = x + \theta^0 l$ soit une solution réalisable est :

$$\theta^0 = min\{\theta_j \ = \ \frac{x_j}{x_{jj_0}}, \quad x_{jj_0} > 0, \quad j \in J_B\} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} = \theta_{j_1}. \qquad (3.8)$$

Dans le cas où x est une solution réalisable de base non dégénérée, la valeur de θ^0 sera strictement positive et en vertu de la relation *(2.17)* on aura :

$$\Delta Z = Z(\overline{x}) - Z(x)$$

$$= -\theta^0 E_{j_0 > 0}$$

$$\Rightarrow Z(\overline{x}) > Z(x)$$

Montrons que la solution $\overline{x} = x + \theta l$ est une solution réalisable de base.

On a :

$$\overline{x_j} = x_j = 0, \quad j \in J_N, \quad j \neq j_0$$

$$\overline{x_{j_1}} = x_{j_1} + \theta l_{j_1}, \quad j_1 \in J_B$$

$$A_B^{-1} a_{j_0} = (x_{jj_0}, \quad j \in J_B) \qquad (3.9)$$

$$l_B = A_B^{-1} a_{j_0}$$

$$\Rightarrow l_B = -x_{jj_0}, \quad j \in J_B$$

pour la composante d'indice j_1 on aura :

$$l_{j_1} = -x_{j_1 j_0}, \quad j_1 \in J_B$$

$$\theta^0 = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}}$$

En remplaçant les valeurs de l_{j_1} et θ dans la relation *(3.9)* on aura :

$$\overline{x_{j_1}} = x_{j_1} + \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}}(-x_{j_1 j_0}) = 0$$

alors :

$$\overline{x_j} = 0, \quad \forall j \in \overline{J}_N = \{J_N / j_0\} \cup j_1$$

Le vecteur $\overline{x}$ possède ainsi n-m composantes nulles.

On note :

$$\overline{A}_B = A(I, \overline{J}_B)$$

où

$$\overline{J}_B = (J/\overline{J}_N) = (J_B/j_1) \cup j_0$$

La matrice $\overline{A}_B$ est une base réalisable si les vecteurs $a_j,\ \ j \in \overline{J}_B$ sont linéairement indépendants. On a :

A_B=(I,J_B)

$$A_B^{-1} = A(J_B, I) = (u_{ij},\ i \in J_B,\ j \in I)$$

on a alors

$$A_B A_B^{-1} = I_m = \sum_{i\in J_B} a_i u_{ij} = e_j, \quad j \in I \qquad (3.10)$$

On fait sortir le vecteur a_{j_1} de la base et pour y entrer le vecteur a_{j_0}.

$$A_B^{-1} a_{j_0} = x_{jj_0}, \quad j \in J_B$$
$$\Rightarrow a_{j_0} = A_B x_{jj_0}, \quad j \in J_B$$
$$= \sum_{i\in J_B} a_i x_{jj_0}, \quad j \in J_B \qquad (3.11)$$

De la relation *(3.11)* on déduit :

$$a_{j_0} = a_{j_1} x_{j_1 j_0} + \sum_{i\in J_B/j_1} a_i x_{jj_0}, \quad j \in J_B$$
$$\Rightarrow a_{j_1} = \frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} - \sum_{i\in J_B/j_1} a_i \frac{x_{jj_0}}{x_{j_1 j_0}}$$

De la relation *(3.10)* on a:

$$\sum_{i\in J_B} a_i u_{ij} = e_j, \quad j \in I$$
$$\Rightarrow a_{j_1} u_{j_1 j} + \sum_{i\in J_B/j_1} a_i u_{ij} = e_j, \quad j \in I$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} - \sum_{i\in J_B/j_1} a_i \frac{x_{jj_0}}{x_{j_1 j_0}}\right) u_{j_1 j} + \sum_{i\in J_B/j_1} a_i u_{ij} = e_j, \quad j \in I$$
$$\Rightarrow \frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} u_{j_1 j} - \sum_{i\in J_B/j_1} a_i u_{j_1 j} \frac{x_{jj_0}}{x_{j_1 j_0}} + \sum_{i\in J_B/j_1} a_i u_{ij} = e_j, \quad j \in I$$
$$\Rightarrow \frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} u_{j_1 j} + \sum_{i\in J_B/j_1} a_i \left(u_{ij} - u_{j_1 j} \frac{x_{jj_0}}{x_{j_1 j_0}}\right) = e_j, \quad j \in I \qquad (3.12)$$

Formons une matrice $\overline{U}$ de la manière suivante :

$$\overline{U} = (\overline{J}_B, I) = (\overline{u}_{ij}, \quad i \in \overline{J}_B, \quad j \in I)$$

où

$$\overline{u}_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - u_{j_1 j} \dfrac{x_{jj_0}}{x_{j_1 j_0}} \quad si \ \ i \neq j_0, \quad i \in \overline{J}_B, \quad j \in I, \\ \dfrac{u_{j_1 j}}{x_{j_1 j_0}} \quad si \ \ i = j_0, \quad j \in I, \end{cases}$$

De la relation *(3.12)* on a :

$$\sum_{i\in \overline{J}_B} a_i \overline{u}_{ij} = e_j, \quad j \in I$$

$\Rightarrow A(I, \overline{J}_B).\overline{U} = I_m$

$\Rightarrow \overline{A}_B.\overline{U} = I_m$

donc $\overline{A}_B$ est inversible et on a :

$$\overline{A_B^{-1}} = \overline{U} \qquad (3.13)$$

Le calcul de E_{j_0} selon le relation *(3.2)* peut s'avérer peut efficace si J_N est relativement grand, on peut alors calculer les éléments overline{u}_{ij} de la matrice $\overline{A_B^{-1}}$ en fonction de ceux de la matrice A_B^{-1} et des composantes du vecteur $A_B^{-1}a_{j_0}$

$$\overline{A_B^{-1}}(\overline{J}_B, I) = D(\overline{J}_B, J_B).A_B^{-1}(J_B, I) \qquad (3.14)$$

où

$$D(\overline{J}_B, J_B) = (d_{ij}, \quad i \in \overline{J}_B, \quad j \in J_B)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 \quad si \;\; i = j, \\ 0 \quad si \;\; i \neq j, \;\; j \neq j_1, \\ -\dfrac{x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}} \quad si \;\; i \neq j_0, \;\; j \neq j_1, \\ \dfrac{1}{x_{j_1 j_0}} \quad si \;\; i = j_0, \;\; j = j_1, \end{cases}$$

3. Schéma de l'Algorithme du Simplexe

Supposons que nous avons obtenu une solution réalisable de base $x = (x_B; x_N)$, la base correspondante $AB = A(I; J_B)$, ainsi que la matrice inverse A_B^{-1}.

Une itération de l'algorithme du simplexe se résume alors dans les étapes suivantes :

- *Étape 1 :* Calculer le vecteur des potentiels $u^T = c_B^T A_B^{-1}$
- *Étape 2 :* Calculer le vecteur des estimations $E_j = u^T a_j - c_j, \quad j \in J_N$
- *Étape 3 :* Si $E_j \geq 0, \quad \forall j \in J_N$, alors x est une solution optimale pour le problème *(3.1)*, terminer le processus de résolution, *sinon*
  - *Si* $\exists j_0 \in J_N / E_{j_0} < 0$ et le vecteur $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$, le problème *(3.1)* n'admet pas de solution finie
  - *Sinon*
    1. Calculer l'indice j_0 tel que :
       $E_{j_0} = min\{E_j / j \in J_N\}$
    2. Calculer les composantes x_{jj_0} du vecteur $A_B^{-1}a_{j_0}$
    3. Calculer $\theta^0 = min\{\theta_j = \dfrac{x_j}{x_{jj_0}}, \;\; x_{jj_0} > 0, \;\; j \in J_B\} = \dfrac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} = \theta_{j_1}$
    4. Calculer $\overline{x} = (\overline{x}_B; \overline{x}_N)$ où $\begin{cases} \overline{x}_B = x_B - \theta^0 l_B, \\ \overline{x}_j = x_j = 0 \qquad \forall j \in J_N / j_0, \\ \overline{x}_{j_0} = \theta^0, \end{cases}$
    5. Poser $\overline{J}_B = \{J_B / j_1\} \cup j_0$ et $\overline{J}_N = \{J_B / j_0\} \cup j_1$
    6. Calculer $\overline{A_B^{-1}}(\overline{J}_B, I) = D(\overline{J}_B, J_B).A_B^{-1}(J_B, I)$ par la relation *(3.14)*
- *Étape 4 :* Poser $x = \overline{x}$ et aller à *Étape 1.*

Note:Remarque 3.1.

Dans le cas où toutes les solutions réalisables basiques dans le problème de programmation linéaire (3.1) sont non dégénérées, la croissance stricte de la fonction objectif à chaque itération empêche de passer deux fois par le même point extrême, et comme le nombre de points extrêmes est fini, il en résulte que l'algorithme du simplexe construit une solution optimale en un nombre fini d'itérations.

4. Tableaux du Simplexe

Les tableaux du simplexe sont une autre façon de présenter les calculs algébriques et les opérations que l'on fait sur le système d'équations en effectuant les calculs sur le tableau des coefficients qui porte le nom de tableau Simplexe.

Example

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &max\ \ 2x_1 + x_2 \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-2x_1 + 3x_2 \leq 6 \qquad\qquad (3.15) \\ &2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La mise sous forme standard du programme linéaire *(3.15)* écrit sous forme canonique, consiste `a ajouter des variables dites variables d'écart aux contraintes du problème *(3.15)* afin de transformer toutes les

inégalités en égalités. En ajoutant ainsi trois variables d'écart on obtient le problème *(3.15)* sous sa forme standard :

$$\begin{aligned} &max\ \ 2x_1 + x_2 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ &-2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \qquad\qquad (3.16) \\ &2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6 \\ &x_i,\ \ i = 1, ..., 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

$x = (0, 0, 5, 5, 6)$ est une solution réalisable de base avec $A_B = (a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

on a : $J_B = \{3, 4, 5\}$, $J_N = \{1, 2\}$, $x_B = \{5, 6, 6\}$, $x_N = \{0, 0\}$, et $Z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T x_B = c_B^T$

Le premier tableau du simplexe sera construit comme suit :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c			2	1	0	0	0		
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
0	a_3	5	1	1	1	0	0	5	
0	a_4	6	-2	3	0	1	0	∞	
0	a_5	6	2	-3	0	0	1	3	$\leftarrow j_1$
Z=0		E	-2	-1	0	0	0		
			$j_0 \uparrow$						

La valeur de Z est donnée par

$$Z = c_B^T x_B = 0$$

Les composantes du vecteur des estimations sont données par :

$$E_j = c_B^T a_j - c_j, \quad j = 1, ..., 5$$

L'indice j_0 tel que $E_{j_0} = min\{E_j, \quad j \in J_N\} = E_1 \; et \; j_0 = 1$

Le paramètre θ^0 tel que :

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = min\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, \quad x_{jj_0} > 0, \quad j \in J_B\} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} = \frac{x_5}{x_{51}} = \frac{6}{2} = 3 \quad \Rightarrow j_1 = 5$$

La nouvelle base est alors : $\{a_3, a_4, a_1\}$ et le nouveau tableau du simplexe est :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c			2	1	0	0	0		
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
0	a_3	2	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\leftarrow j_1$
0	a_4	12	0	0	0	1	1	∞	
2	a_1	3	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	∞	
Z=6		E	0	-4	0	0	1		
				$j_0 \uparrow$					

Dans cette deuxième itération de l'algorithme on trouve :

$$Z = 6, \quad j_0 = 2, \quad \theta^0 = \frac{x_3}{x_{31}} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow j_1 = 3$$

La nouvelle base est alors : $\{a_2, a_4, a_1\}$ et le nouveau tableau du simplexe est :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c			2	1	0	0	0	
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
1	a_2	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
0	a_4	12	0	0	0	1	1	∞
2	a_1	$\frac{21}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	∞
$Z=\frac{46}{5}$		E	0	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	

Dans la troisième itération, la nouvelle solution de base et la nouvelle valeur de l'objectif valent :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{21}{5}, \frac{4}{5}, 0, 12, 0)$$

$$Z = \frac{46}{5}$$

Le vecteur des estimations $E_j \geq 0, \quad \forall j = 1, ..., 5$ la solution courante est optimale.

Example:problème non borné

Résoudre par la méthode du simplexe le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} & max\ \ 2x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (3.17) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

On écrit le problème *(3.17)* sous forme standard en ajoutant deux variables décart x_3 et x_4, on aura :

$$\begin{aligned} & max\ \ 2x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

En dressant le premier tableau du simplexe on aura :

x			x_1	x_2	x_3	x_4		
c			2	1	0	0		
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	θ	
0	a_3	2	1	-2	1	0	2	$\leftarrow j_1$
0	a_4	2	-2	1	0	1	∞	
Z=0		E	-2	-1	0	0		
			$j_0 \uparrow$					

La variable x_1 doit entrer en base et la variable x_3 doit quitter la base. La nouvelle base est ainsi $\{a_1, a_4\}$. Le nouveau tableau du simplexe sera :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	
c			2	1	0	0	
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	θ
2	a_1	2	1	-2	1	0	2
0	a_4	6	0	-3	2	1	∞
Z=10		E	0	-5	0	1	
				$j_0 \uparrow$			

La variablex_2 est seule candidate à y entrer en base. Comme tous les coefficients de la colonne a_2 sont non positifs, on en conclut que le problème est non borné.

5. Initialisation de l'Algorithme du Simplexe

Dans les cas précédemment traités par l'algorithme du simplexe, on a supposé l'existence d'une solution réalisable de base initiale, ce qui n'est pas toujours le cas dans les problèmes de programmation linéaires. Nous verrons dans ce qui suit deux méthodes permettant d'initialiser l'algorithme du simplexe. Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &max\ \ Z = C^T x \\ &Ax \leq b \qquad\qquad (3.18) \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

où A est une $m \times n$ matrice et $b \geq 0$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et $rang(A) = m < n$.

5.1. Solution réalisable initiale

En introduisant m variables d'écart $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ dans les contraintes du problème *(3.18)*, on obtient le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &max\ \ Z = C^T x \\ &Ax + x_e = b \qquad\qquad (3.19) \\ &x \geq 0,\ \ x_e \geq 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $(x = 0,\ x_e = b)$ est une solution réalisable pour le problème (3.19). De plus, on a la base

$$B = \{a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{n+m}\} = I_m$$

alors le vecteur $(x = 0,\ x_e = b)$ est une solution réalisable basique pour le problème *(3.19)*.

Note

Les problèmes (*3.18*) et (*3.19*) sont équivalents.

5.2. Méthode du Big-M (méthode de la base artificielle)

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$max\ \ Z = C^T x$$

$$Ax = b \qquad (3.20)$$

$$x \geq 0$$

où A est une $m \times n$ matrice et $b \geq 0$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et $rang(A) = m < n.$

En introduisant m variables artificielles $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ dans les contraintes et la fonction objectif du problème *(3.20)*, on obtient le problème auxiliaire suivant, appelé le M-problème défini par :

$$max\ \ Z = C^T x - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$Ax + x_a = b \qquad (3.21)$$

$$x \geq 0, \quad x_a \geq 0$$

Le problème *(3.21)* admet une solution réalisable de base $y = (x, x_a) = (0, b)$ et $B = \{a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{n+m}\}$

Fundamental:Théorème 3.1.

Si l'ensemble X des solutions réalisables du problème *(3.20)* est vide, alors toute solution optimale $y^* = (x^*, x_a^*)$ du problème *(3.21)* est telle que $x_a \neq 0$.

$X = \emptyset$~~et~~$y^* = (x^*, x_a^*)$ est une solution optimale du probème *(3.21)* $\Rightarrow \quad x_a \neq 0$

Preuve.

Supposons $X = \emptyset$,~~$y^* = (x^*, x_a^*)$ est une solution optimale du probème *(3.21)* et $x_a = 0$

alors x^* est une solution réalisable pour le problème *(3.20)* c'est à dire X n'est pas vide (contradiction avec l'hypothèse).

Fundamental:Théorème 3.2.

Si le vecteur $y^* = (x^*, x_a^* = 0)$ est une solution optimale pour le problème *(3.21)*, alors x^* est une solution optimale pour le problème *(3.20)*.

$y^* = (x^*, x_a^* = 0)$ est une solution optimale pour le problème *(3.21)* $\Rightarrow$ x^* est une solution optimale pour le probl`eme *(3.20)*

Fundamental:Théorème 3.3.

Si $y^* = (x^*, x_a^* = 0)$ est une solution optimale dans le problème M-problème *(3.21)* alors y^* est aussi une solution optimale dans le M_1-problème de type *(3.21)*, pour tout $M_1 > M$.

$y^* = (x^*, x_a^* = 0)$ est une solution optimale pour le problème *(3.21)* $\Rightarrow$ $\forall\ M_1 > M$, y^*est une solution optimale pour le M_1-problème

Fundamental:Théorème 3.4.

Si x^* est une solution optimale du problème *(3.20)*, alors pour un (M>0) suffisamment grand, le vecteur $y^* = (x^*, x_a^*)$ est une solution optimale du problème *(3.21)*.

Example

Résoudre par la M-méthode le problème de programmation linéaire suivant :

$$max \;\; Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 = 5 \qquad (3.22)$$

$$2x_1 - x_2 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

En introduisant deux variables artificielles t_1 et t_2 on aura le problème auxiliaire suivant :

$$max \;\; Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - Mt_1 - Mt_2$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + t_1 = 5 \qquad (3.23)$$

$$2x_1 - x_2 + t_2 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, t_1, t_2 \geq 0$$

Itération 1

On construit le premier tableau du simplexe :

		x	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2		
		c	2	-1	1	-M	-M		
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
1	a_3	1	3	-1	1	0	0	1/3	$j_1 \leftarrow$
-M	a_4	5	1	2	0	1	0	5	
-M	a_5	3	2	-1	0	0	1	3/2	
Z=-8M+1		E	1-3M	-M	0	0	0		
			$j_0 \uparrow$						

La nouvelle base est $\{a_1, a_4, a_5\}$

Itération 2

		x	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2		
		c	2	-1	1	-M	-M		
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
2	a_1	1/3	1	-1/3	1/3	0	0		$j_1 \leftarrow$
-M	a_4	14/3	0	7/3	-1/3	1	0	2	
-M	a_5	7/3	0	-1/3	-2/3	0	1		
Z=-7M+2/3		E	0	-M	0	0	0		
				$j_0 \uparrow$					

La nouvelle base est $\{a_1, a_2, a_5\}$

Itération 3

		x	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	
		c	2	-1	1	-M	-M	
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
2	a_1	1	1	0	2/7	1/7	0	
-1	a_2	2	0	1	-1/7	3/7	0	
-M	a_5	3	0	0	-5/7	1/7	1	
Z=-3M		E	0	0	(5M/7)-2/7	(3M/7)+2/7	0	

Le critère d'optimalité étant vérifié $(E \geq 0)$, alors le vecteur $y^* = (1, 2, 0, 0, 3)$ est une solution optimale pour le problème (3.23). Mais en vertu du *théorème 3.1*, l'ensemble des solutions réalisables du problème *(3.22)* est vide.

Fundamental:Théorème 3.5.

si il existe une solution optimale $y^* = (x^*, x_a^*)$ pour le M-problème telle que $x_a^* \neq 0$, alors $X = \emptyset$.

Note

Cependant, la méthode du big-M pose certains problèmes, notamment lorsque le programme linéaire est résolu par ordinateur. Contrairement aux calculs à la main, le recours à un ordinateur nécessite en effet le choix d'une valeur numérique pour M. Cette valeur doit être beaucoup plus grande que n'importe quel autre coefficient de la fonction objectif. Si M est trop petit, on peut trouver une solution avec une variable artificielle positive dans la base, ce qui indique un problème non réalisable, alors qu'en réalité il est tout à fait réalisable.

5.3. Méthode des deux Phases

Comme son nom l'indique, cette méthode consiste à résoudre un problème de programmation linéaire en deux parties.

La première partie, appelée phase I, consiste à résoudre un problème auxiliaire correspondant au problème original en utilisant une fonction objectif artificielle et annuler toutes les variables artificielles. Si l'on ne peut pas annuler toutes les variables, alors le problème n'est pas réalisable.

La phase II consiste à remplacer la fonction objectif artificielle de la phase I par la vraie fonction objectif à maximiser. On utilise alors la solution réalisable de base obtenue à la fin de la phase I.

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$max \;\; Z = C^T x$$
$$Ax = b \qquad (3.24)$$
$$x \geq 0$$

et considérons le problème auxiliaire suivant, correspondant au problème linéaire *(3.24)* :

$$max \;\; \overline{Z}(y) = -\sum_{i=1}^{m} x_{i+n}$$
$$Ax + x_a = b \qquad (3.25)$$
$$x, x_a \geq 0$$

où $y = (x, x_a), x_a = (x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})^T, b \geq 0.$

Le vecteur $y = (0, b)$ est une solution réalisable de base pour le problème *(3.25)* avec la matrice unité comme base associée à $y(X \neq \emptyset)$.

Note

La fonction objectif du problème *(3.25)* est bornée supérieurement par zéro, par conséquent le problème *(3.25)* admet toujours une solution optimale.

Fundamental:Théorème 3.6.

Soit $y^* = (x^*, x_a^*)$ une solution réalisable basique optimale du problème *(3.25)*, nous avons alors le théorème suivant :

1. Si $\overline{Z}(y^*) = 0$ alors x^* est un point extrême
2. Si $\overline{Z}(y^*) < 0$ alors $X = \emptyset$

Note

Si la solution réalisable basique $y^* = (x^*, x_a^*)$ correspond à une base comprenant des vecteurs colonnes artificiels, alors il est tout à fait commode d'utiliser les transformations de Gauss-Jordan pour les faire sortir de la base.

Example

Résoudre par la méthode des deux phases le problème de programmation linéaire suivant :

$$max \;\; Z(x) = -x_1 - 4x_2 - x_3$$
$$5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9$$
$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11 \qquad (3.26)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

PHASE I

On définit le problème auxiliaire correspondant au problème (3.26) :

$max \ Z(x) = -x_4 - x_5$

$5x_1 + 12x_2 + 2x_3 + t_1 = 9$

$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + t_2 = 11 \qquad (3.27)$

$x_1, x_2, x_3, t_1, t_2 \geq 0$

Une solution réalisable basique évidente pour le problème *(3.27)* est $y = (x, t) = (0, 0, 0, 9, 11)$

Itération 1

		x	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2		
		c	0	0	0	-1	-1		
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
-1	a_4	9	5	12	2	1	0	9/12	$\leftarrow j_1$
-1	a_5	11	3	4	4	0	1	11/12	
Z=-20		E	-8	-16	-6	0	0		
				$j_0 \uparrow$					

La nouvelle base est : $\{a_2, a_5\}$

Itération 2

		x	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2		
		c	0	0	0	-1	-1		
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
0	a_2	3/4	5/12	1	1/6	1/12	0	9/2	
-1	a_5	8	4/3	0	10/3	-1/3	1	24/10	$\leftarrow j_1$
Z=-8		E	-4/3	0	-10/3	4/3	0		
					$j_0 \uparrow$				

La nouvelle base est $\{a_2, a_3\}$

Itération 3

		x	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	
		c	0	0	0	-1	-1	
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
0	a_2	7/20	7/20	1	0	1/10	-1/20	
0	a_3	12/5	2/5	0	1	-1/10	3/10	
Z=0		E	0	0	0	1	1	

Le critère d'optimalité étant vérifié, la solution courante $x = (0, 7/20, 12/5, 0, 0)$ est optimale pour le problème *(3.27)*. On utilise ainsi cette solution comme solution de base réalisable initiale pour résoudre le problème *(3.26)*.

PHASE II

Itération 1

		x	x_1	x_2	x_3	
		c	-1	-4	-1	
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	θ
-4	a_2	7/20	7/20	1	0	1 $\leftarrow j_1$
-1	a_3	12/5	2/5	0	1	6
Z=-19/5		E	-16/20	0	0	
			$j_0 \uparrow$			

La nouvelle base est $\{a_1, a_3\}$

Itération 2

		x	x_1	x_2	x_3	
		c	-1	-4	-1	
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	θ
-1	a_1	1	1	20/7	0	1
-1	a_3	2	0	-8/7	1	6
Z=-3		E	0	16/7	0	

Le critère d'optimalité étant vérifié, la solution courante $x^* = (1, 0, 2)$ est optimale pour le problème *(3.26)* avec $Z = -3$.

6. Quiz:

Exercice 01 :

On a le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} Max\ Z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le problème par la méthode du simplexe

Solution

On ajoutant des variables d'écart, on obtient la forme standard suivante :

$$\begin{cases} Max\ Z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 21 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 18 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Le premier tableau du simplexe est donné ci-dessous

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	3	1	0	0	21	x_3
-1	3	0	1	0	18	x_4
1	-1	0	0	1	5	x_5
-1	-2	0	0	0	0	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	1/4	0	3/4	9	x_1
0	1	1/4	0	-1/4	4	x_2
0	0	-1/2	1	3/2	15	x_4
0	0	3/4	0	1/4	17	

Le tableau final ainsi que La solution optimale est donnés comme suit :

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (9, 4, 0, 15, 0)$$

Exercice 02 :

Résoudre par la méthode du Big-M le problème suivant :

$$\begin{cases} Max\ \ Z\ \ = -2x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution

La forme standard associée au problème est :

$$\begin{cases} Max\ \ Z\ \ = -2x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le M-problème auxiliaire associé au problème s'écrit :

$$\begin{cases} Max\ \ Z\ \ = -2x_1 - 4x_2 - Mx_4 - Mx_5 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Le premier tableau est donné comme suit :

		c	-2	-4	0	-M	-M	
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
-M	a_4	4	2	-2	0	1	0	2
-M	a_5	6	4	2	-1	0	1	3/2
Z=-10 M		E	-6 M + 2	4	M	0	0	

		c	-2	-4	0	-M	-M
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	2	0	-6	1	2	-1
-2	a_1	2	1	-1	0	1/2	0
Z=-4		E	0	6	0	M-1	M

Le tableau final ainsi que la solution optimale sont donnés comme suit :

$x^*=(x_1^*,x_2^*)=(0,2)$