Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion.
Département SEGC-LMD
Première année SEGC
Année universitaire 2018/2019

Corrigé-type de la série de TD n°02. Microéconomie II

Partie des questions théoriques

1. La signification économique des rendements d'échelle :

Rendement signifie la relation entre la variation des quantités produites (output) et les variations de facteurs nécessaires pour les produire (input). On distingue les rendements **factoriels** et les rendements d'échelle. Les rendements factoriels relient la production (output) à une combinaison des facteurs dont l'un est fixe. Deux hypothèses sont retenues :

-Rendements décroissants ou non proportionnels : on énonce la célèbre loi des rendements décroissants (dont la première formulation rigoureuse date de ROBERT TURGOT), si des quantités successives, croissantes et homogènes, d'un facteur variable (par exemple le travail) sont combinées à une quantité donnée de facteurs fixes (par exemple : terre et les outils), alors il arrivera un moment où la productivité marginale (Pmg) (augmentation de la production résultant de l'utilisation d'une petite quantité supplémentaire du facteur variable) finit par décroître ;

-Rendements constants : hypothèse peu réaliste, car à partir d'un certain niveau d'utilisation du facteur variable, la productivité marginale ne reste pas constante mais décroit. Les rendements factoriels ne sont constants que pour une phase limitée.

Les rendements d'échelle relient la production à une combinaison de facteurs qui varient tous deux simultanément. Les rendements d'échelle sont :

-Constants (λ =1) si la production augmente dans la même proportion que les inputs ;

-Croissants (λ >1) si l'output augmente dans une proportion plus grande, il y a alors économies d'échelle ; l'augmentation de l'échelle de production permet de réduire le coût par unité produite ;

-Décroissants (λ <1) si l'output augmente dans une proportion moindre, il y a alors déséconomies d'échelle (cas d'une entreprise de grande taille connaissant des difficultés de coordination). Notons que l'on peut avoir simultanément des rendements factoriels décroissants et des rendements d'échelle constants, les deux notions étant distinctes.

2. Une fonction de production est dite homogène de degré « **λ**» si la multiplication des quantités de facteurs (K, L) par une constante positive (∀ **a** ∈ $\mathcal{R}^+$- {0}, entraine nécessairement la multiplication de la production par (a^λ), c'est-à-dire : (∀ a ∈ $\mathcal{R}^+$-{0}, on a toujours : $f(ak, al)$=$a^\lambda f(k, l)$, les rendements d'échelle sont :

- Constants si λ =1,
- Croissants si λ>1,
- Décroissants si λ<1.

3. La fonction de production de Cobb-Douglas $P = f(k,l) = Ak^\alpha \cdot l^{(1-\alpha)}$, si on applique la définition de la fonction de production homogène de degré λ [FPH λ]. On peut noter :

$f(aL, aK) = A(ak)^\alpha \cdot al^{(1-\alpha)} = a^{\alpha+1-\alpha}\,[Ak^\alpha \,.\, l^{1-\alpha}]$

$f(aL, ak) = a^1 f(L, k) = a^1 \,.\, P$

On remarque que : λ =1, les rendements d'échelle sont constants.

4. Le principe et les conséquences de l'identité d'EULER sur les fonctions de production homogènes de degré λ [FPH λ].

Le principe s'énonce comme suit : Toutes les fonctions de production homogène de degré λ obéissent à l'identité d'EULER qui se note toujours : λ $f(k,l)$= $k.\frac{\partial P}{\partial k} + l\ \frac{\partial P}{\partial l}$, par ailleurs sait que : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial k} = PPmg_k \\ \frac{\partial P}{\partial l} = PPmg_l \end{cases}$

L'identité précédente devient :

$\lambda P = k.PPmg_k + l.PPmg_l$

La conséquence : si P=f (K, L) est une fonction de production homogène de degré λ=1, l'identité d'EULER devient : $P = k.PPmg_k + l.PPmg_l$ cette dernière égalité est dite la règle d'épuisement de la production qui signifie que : si le prix des facteurs (K, L) était égal à sa productivité marginale (Pmg), la productivité totale (P) sera exactement égale à la rémunération des quantités de facteurs (K et L) utilisés.

Ainsi, on peut différencier également la nature des rendements dimensionnels comme suit :

Degré d'homogénéité λ	Rendements	RF /P
=1	Constants	RF=P
>1	Croissants	RF>P
<1	Décroissants	RF<P

5. L'élasticité partielle d'un facteur de production, soit (K ou L), mesure l'effet de la variation en pourcentage (%) des quantités de facteurs de production, soit (K ou L), sur le volume de production. Elle est égale au rapport de la variation en pourcentage (%) de la production totale à la variation en pourcentage (%) de la quantité utilisée du facteur de production, toutes choses égales par ailleurs :

$$\boxed{e_{P/L} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta l}{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta l} * \frac{l}{P} = \frac{\partial P}{\partial l} \cdot \frac{l}{P} = \frac{PPmg_l}{PPM_l}}$$

$$\boxed{e_{P/k} = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta k}{k}} = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta k} * \frac{k}{P} = \frac{\partial P}{\partial k} \cdot \frac{k}{P} = \frac{PPmg_k}{PPM_k}}$$

Partie des exercices d'application :

Exercice n°01 :

On a les fonctions suivantes :

$P_1 = f(k, l) = k^{0,2} l^{0,5}$

$P_2 = f(k, l) = 2.\, l^{3/4} k^{\beta}$

$P_3 = f(k, l) = 2.\, l^{1/2} k^{1/2}$

1. L'expression du $TMST_{K\,à\,L}$ sur une courbe d'iso-produit :

Le TMST $_{K\,à\,L}$ en un point quelconque de la courbe d'isoquante est donné par l'égalité suivante :

$TMST_{K\,à\,L} = \frac{PPmg_k}{PPmg_l} = -\frac{dl}{dk}$

2. L'expression du $TMST_{K\,à\,L}$ des fonctions (1) et (2) :

a. $TMST_{K\,à\,L}$ de la première fonction de production :

$PPmg_k = \frac{\partial P}{\partial k} = \frac{0,2\,k^{0,2}l^{0,5}}{k}$; $PPmg_l = \frac{\partial P}{\partial l} = \frac{0,5\,k^{0,2}l^{0,5}}{l}$.

$$TMST_{K\,à\,L} = \frac{PPmg_k}{PPmg_l} = \frac{0,2\,k^{0,2}l^{0,5}}{k} * \frac{l}{0,5\,k^{0,2}l^{0,5}} = \mathbf{\frac{2l}{5k}}$$

b. $TMST_{K\,à\,L}$ de la deuxième fonction de production :

$PPmg_k = \frac{\partial P}{\partial k} = \frac{2.\beta.k^{\beta}\,l^{3/4}}{k}$; $PPmg_l = \frac{\partial P}{\partial l} = \frac{2\frac{3}{4}k^{\beta}\,l^{3/4}}{l} = \frac{2.3.k^{\beta}\,l^{3/4}}{4.l}$

$$TMST_{K\,à\,L} = \frac{PPmg_k}{PPmg_l} = \frac{2.\beta.k^{\beta}\,l^{3/4}}{k} * \frac{4.l}{2.3.k^{\beta}\,l^{3/4}} = \mathbf{\frac{4\beta l}{3k}}.$$

3. La valeur du $TMST_{L\,à\,K}$ lorsque P =2 et L = 3 :

Comme le $TMST_{L\,à\,K}$ égal à l'opposé de la pente de l'isoquante ($TMST_{L\,à\,K} = \frac{PPmg_l}{PPmg_k} = -\frac{dk}{dl}$), nous devons, tout d'abord, déterminer l'équation de l'isoquante donnée par :$k = f(l)$.

On a : $P_3 = f(k,l) = 2.l^{1/2}k^{1/2} = \mathbf{2}$ <=> $l^{1/2}k^{1/2} = 1$ <=> $k = \frac{1}{l}$. $\mathbf{k = f(l) = \frac{1}{l}}$ est l'équation de l'isoquante.

$$TMST_{L\,à\,K} = -\frac{dk}{dl} = -\left(\frac{-1}{l^2}\right) = \mathbf{\frac{1}{l^2}}$$

Lorsque L = 3 : $TMST_{L\,à\,K} = \frac{1}{l^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

__**Exercice n°02 :**__

On a**:** $p = f(k,l) = bl^{\alpha}k^{\beta}$

1. Les rendements dimensionnels de la fonction :

Appliquons la définition de l'homogénéité à cette fonction :

$$f(ak,al) = b(al)^{\alpha}(ak)^{\beta} = a^{\alpha}a^{\beta}bl^{\alpha}k^{\beta} = a^{\alpha+\beta}bl^{\alpha}k^{\beta} = a^{\alpha+\beta} * f(k,l) = \mathbf{a^{\alpha+\beta} * p}$$

Le degré d'homogénéité de cette fonction est donc : $\boldsymbol{\lambda = \alpha + \beta}$.

Lorsque :

a. $\boldsymbol{\lambda = \alpha + \beta = 1}$ => Les rendements dimensionnels (d'échelle) sont constants,
b. $\boldsymbol{\lambda = \alpha + \beta < 1}$ => Les rendements dimensionnels sont décroissants,
c. $\boldsymbol{\lambda = \alpha + \beta > 1}$ => Les rendements d'échelle sont croissants.

2. Calcul de α et β, si :

a. L'élasticité de la production par rapport au travail est égale à 0,5 :

$$e_{p/l} = \frac{\partial P}{\partial l} * \frac{l}{P} = \frac{b\alpha l^{\alpha-1}k^{\beta}l}{bl^{\alpha}k^{\beta}} = \boldsymbol{\alpha = 0,5}$$

b. La fonction de production en question est homogène de degré λ=2 :

De ce qui précède, on a démontré que la fonction en question est homogène de degré $\lambda = \alpha + \beta$. Par analogie, on a :

$\lambda = 2$ <=> $2 = \alpha + \beta$ => $\beta = 2 - \alpha = 2 - 0,5 = 1,5$. Donc : $\boldsymbol{\beta = 1,5}$.

3. Le pourcentage de variation du volume de production lorsque L augmente de 20% :

	Δl/l	ΔP/P	
$\mathbf{e_{p/l} = 0,5}$	+1%	+0,5%	=> $\Delta P/P = \frac{(+0,5\%)*(+20\%)}{(+1\%)} = \mathbf{+10\%}$.
	+20%	**ΔP/P**	

Ou encore :

$$e_{p/l} = \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta l}{l}} => \frac{\Delta P}{P} = e_{p/l} * \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 0,5 * (+20\%) = +10\%.$$

Donc, le volume de production va s'accroître de 10%, quand la quantité utilisée du facteur travail augmente de 20%.

4. Le pourcentage de variation du volume de production lorsque les deux facteurs K et L augmentent de 100% :

Augmenter simultanément les facteurs de production et dans la même proportion (100%), revient à doubler leurs quantités. En d'autres termes, on multiplie par 2 les quantités de facteurs K et L. Comme la fonction est homogène de degré λ=2, on peut écrire :

$$f(2k,2l) = 2^2 f(k,l) = 4\,f(k,l) = \mathbf{4 * p}$$

Lorsqu'on double (augmentation relative de 100%) les quantités de facteurs, le volume de production sera quadruplé.

La variation relative de la production est :

$\frac{\Delta P}{P} = \frac{4p-p}{p} * 100\% = \frac{p(4-1)}{p} * 100\% = \mathbf{300\%}$. Donc le volume de production va s'accroître de 300%.

__**Exercice n°03 :**__

On a : $p = f(k,l) = 6\,k^{1/2}l^{2/3}$. Les données : Rd = 1400 ^{DA} ; P_k = 6 ^{DA} et P_l = 5 ^{DA}.

1. Calcul des quantités optimales de k et l :

a. Formalisation du problème : $\begin{cases} \text{Max } p = f(k,l) = 6\,k^{1/2}l^{2/3} \\ \text{S/C} \\ Rd = 6k + 5l \end{cases}$

b. Construction de la fonction de Lagrange :

$$L(k,l,\lambda) = f(k,l) + \lambda\,(Rd - kP_k - lP_l)$$

$$L(k,l,\lambda) = 6\,k^{1/2}l^{2/3} + \lambda\,(1400 - 6k - 5l)$$

c. Résolution du problème :

La fonction de Lagrange (L) atteint son maximum lorsque ses dérivées partielles par rapport à $(k, l \; et \; \lambda)$ sont égales à zéro :

$$\text{Max } L(k,l,\lambda) \iff \begin{cases} \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial k} - \lambda P_k = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial l} - \lambda P_l = 0 \\ Rd - kP_k - lP_l = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{\frac{\partial P}{\partial k}}{P_k} \\ \lambda = \frac{\frac{\partial P}{\partial l}}{P_l} \\ R = kP_k + lP_l \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{Pmg_k}{P_k} \\ \lambda = \frac{Pmg_l}{P_l} \\ R = kP_k + lP_l \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \frac{6.\frac{1}{2}.k^{-\frac{1}{2}}.l^{\frac{2}{3}}}{6} \\ \lambda = \frac{6.\frac{2}{3}.k^{\frac{1}{2}}.l^{-\frac{1}{3}}}{5} \\ 1400 = 6\,k + 5\,l \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{k^{-\frac{1}{2}}.l^{\frac{2}{3}}}{2} \dots\dots\dots (1) \\ \lambda = \frac{4.k^{\frac{1}{2}}.l^{-\frac{1}{3}}}{5} \dots\dots\dots (2) \\ 1400 = 6\,k + 5\,l (3) \end{cases} \text{ On a: } \frac{(1)}{(2)} = 1 \iff \begin{cases} \frac{5.k^{-\frac{1}{2}}.l^{\frac{2}{3}}}{8.k^{\frac{1}{2}}.l^{-\frac{1}{3}}} = 1 \\ 1400 = 6\,k + 5\,l \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{5.l}{8.k} = 1 \\ 1400 = 6\,k + 5\,l \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = \frac{5}{8}.l \dots\dots\dots\dots\dots (4) \\ 1400 = 6\,k + 5\,l \dots . (3) \end{cases}$$, On remplace k par sa valeur dans l'équation du budget (3), on obtient:

$1400 = 6 * \left(\frac{5}{8}.l\right) + 5\,l \iff 1400 = \frac{35.l}{4} \iff l = \frac{1400*4}{35} = 40 * 4 = 160 \iff \mathbf{l = 160}$ **Unités**.

$k = \frac{5}{8} * 160 = \mathbf{100}$ **Unités**.

Donc, la combinaison de facteurs (k, l)=(100, 160) est celle qui permet au producteur de maximiser le volume de production (on parle de combinaison optimale) pour des ressources disponibles (ou CT) égales à 1400 DA.

2. L'effet d'une augmentation des ressources disponibles de 80DA sur la quantité produite :

a. Le niveau de la production à l'équilibre :

$\text{Max } p = f(100,160) = 6\,(100)^{1/2}(160)^{2/3} = 1768{,}335$ Unités

b. La valeur du multiplicateur de Lagrange :

À l'équilibre $\lambda = \frac{Pmg_k}{P_k} = \frac{Pmg_l}{P_l}$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{6.\frac{1}{2}.(100)^{-\frac{1}{2}}.(160)^{\frac{2}{3}}}{6} = 1{,}4736 \text{ Unités/DA} \\ \lambda = \frac{6.\frac{2}{3}.(100)^{\frac{1}{2}}.(160)^{-\frac{1}{3}}}{5} = 1{,}4736 \text{ Unités/DA} \end{cases}$$

$\lambda = 1{,}4736$, c'est-à-dire que le volume de production s'accroît de la valeur λ (1,4736) à chaque accroissement de 1DA de ressources disponibles $\left(\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta Rd}\right)$.

Donc, lorsque $\Delta Rd = +80$ DA, on aura : $\Delta P = \lambda * \Delta Rd = 1{,}4736 * (80) = +\mathbf{117{,}6}$ **Unités**.

3. Calcul du TMST $_{K \text{ à } L}$ pour K=6 et L=4:

$TMST_{K \text{ à } L} = \frac{Pmg_k}{Pmg_l} = \frac{6.\frac{1}{2}.k^{-\frac{1}{2}}.l^{\frac{2}{3}}}{6.\frac{2}{3}.k^{\frac{1}{2}}.l^{-\frac{1}{3}}} = \frac{\mathbf{3l}}{\mathbf{4k}}$. Pour (k, l) = (6, 4), on aura : $TMST_{K \text{ à } L} = \frac{3*4}{4*6} = \mathbf{0{,}5}$.

$TMST_{L \text{ à } K} = \frac{1}{TMST_{K \text{ à } L}} = \mathbf{2}$.

4. La variation nécessaire du facteur travail pour pouvoir produire la même quantité tout en diminuant de 4 unités la quantité du facteur capital :

On a: $TMST_{L \text{ à } K} = 2$, c'est-à-dire que le producteur remplace **2** unités de K par une unité de L. S'il abandonne **4** unités de K il lui faudra, pour produire le même volume, augmenter L de **2** unités.

	Δk	Δl	ΔP	
TMST $_{L \text{ à } K = 2}$	- 2	+1	0	$\Rightarrow \Delta l = \frac{(+1)*(-4)}{(-2)} = +\mathbf{2}$ **Unités**.
	-4	Δl	0	

5. Calcul de l'élasticité partielle de la production par rapport au facteur K :

$e_{p/k} = \frac{\partial P}{\partial k} * \frac{k}{P} = \frac{6.\frac{1}{2}.k^{-\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}}.k}{6.\;k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}}} = \mathbf{0{,}5}$

6. Lors d'une variation relative de 20% du facteur capital et sachant que : $e_{p/k} = 0{,}5$, c'est-à-dire chaque variation de 1% de k, a pour conséquence une variation de 0,5% de la production, on aura :

	Δk/k	ΔP/P	
$e_{p/k} = \mathbf{0{,}5}$	+1%	+0,5%	$\Rightarrow \Delta P/P = \frac{(+0{,}5\%)*(+20\%)}{(+1\%)} = +10\%$.
	+20%	**ΔP/P**	

Donc, le volume de production va s'accroître de 10%.

7. Le degré d'homogénéité :

On a : $f(ak, al) = 6.(ak)^{\frac{1}{2}}.(al)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}.6.k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}.6.k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}}.f(k,l) = a^{1{,}16}.p$.

Donc, p est une fonction de production homogène de degré λ =1,166.

Les rendements d'échelle pour cette fonction sont croissants. Cela signifie que l'augmentation simultanée et dans les mêmes proportions de K et de L, induit une augmentation plus que proportionnelle (plus importante) du volume de production.

<u>Partie des exercices supplémentaires</u>

<u>Exercice n°01 :</u>

1. Les points du même isoquant :

a. Les points ci-après sont situés sur l'isoquante P_0=140 :

(2k, 1l) ; (1k, 2l)

b. Les points ci-après sont situés sur l'isoquante P_1=160 :

(1k, 3l) ; (3k, 1l)

c. Les points ci-après sont situés sur l'isoquante P_2=240 :

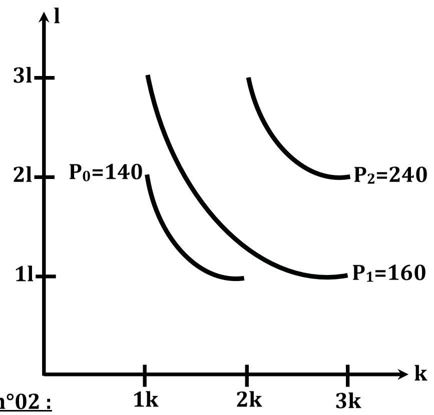
(2k, 3l) ; (3k, 2l)

2. Les rendements d'échelle de la firme :

$$\mathbf{f(1k, 1l) = 100 = P}$$
$$\mathbf{f(2k, 2l) = 200 = 2 * 100 = 2 * P} \quad <=> \mathbf{f(ak, al) = a * f(k, l) = a * P}$$
$$\mathbf{f(3k, 3l) = 300 = 3 * 100 = 3 * P}$$

$\lambda = 1$ => Les rendements d'échelle (dimensionnels) de la firme sont constants.

3. Représentation graphique de la carte du producteur (trois isoquants) :



Les conclusions qu'on peut tirer de l'analyse de cette carte d'indifférence du producteur, c'est que les trois isoquants vérifient les propriétés de base de l'iso-produit.

<u>Exercice n°02 :</u>

$p = f(k, l) = \frac{2.k.l+(k^{0,5})^4}{\frac{1}{2}.l^{0,5}}$

1. Démonstration que p est une fonction de production homogène :

On a : $f(ak, al) = \frac{2.(ak).(al)+(ak^{0,5})^4}{\frac{1}{2}.(al)^{0,5}} = \frac{2a^2.k.l + a^2.(k^{0,5})^4}{a^{0,5}.\frac{1}{2}.l^{0,5}} = \frac{a^2[2.k.l+(k^{0,5})^4]}{a^{0,5}.(\frac{1}{2}.l^{0,5})} = a^{1,5} * \frac{2.k.l+(k^{0,5})^4}{\frac{1}{2}l^{0,5}} = \mathbf{a^{1,5}.\,p}$

$f(ak, al) = a^{1,5}.p$. Donc, p est une fonction de production homogène.

2. Le degré d'homogénéité est λ = 1,5>1. Donc les rendements d'échelle de cette fonction sont croissants. Cela signifie que le volume de production augmente de façon plus que proportionnelle à une augmentation simultanée des quantités de facteurs K et L.

3. L'effet d'une multiplication des facteurs par 4 :

On a : $f(ak, al) = a^{1,5}.p$

Pour $f(4k, 4l) = 4^{1,5}.p = \mathbf{8.\,p}$

Donc, le volume p sera multiplié par 8 lorsqu'on multiplie K et L par 4.

Mr. MANAA Boumediene