Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Département de la formation initiale SEGC-LMD
Année universitaire 2018-2019.

Mai 2019

Corrigé-type de la série de TD n°03. Microéconomie II.

Partie des questions théoriques

1. La fonction de coût de courte période peut être définie comme étant la relation mathématique entre les dépenses totales occasionnées par la production et les quantités optimales des facteurs correspondant à un coût minimum. La fonction de coût total qui résume cette relation indique pour chaque niveau de production, le coût minimal supporté par l'entreprise. Formellement ce coût minimal s'écrit comme une fonction des quantités produites : **CT = f(P) + CF = CV (P) + CF** ; avec : CV : Coût variable et CF : Coût fixe.

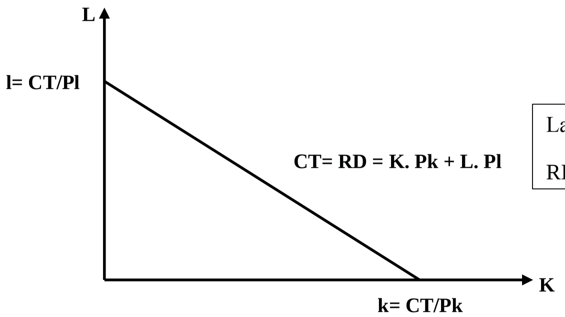
2. Les expressions mathématiques des fonctions de coûts :

CT = CF + CV

CM = CT/ P = (CF+CV)/P = CF/P + CV/P= CFM + CVM

$C_m = \frac{\partial CT}{\partial P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta CT}{\Delta P} = CT'$ (Première dérivée du coût total).

3. La droite d'iso-coût peut être définie comme étant le lieu géométrique (ou la représentation graphique) de toutes les combinaisons de facteurs (K et L) qui peuvent être obtenues avec le même coût total (CT).

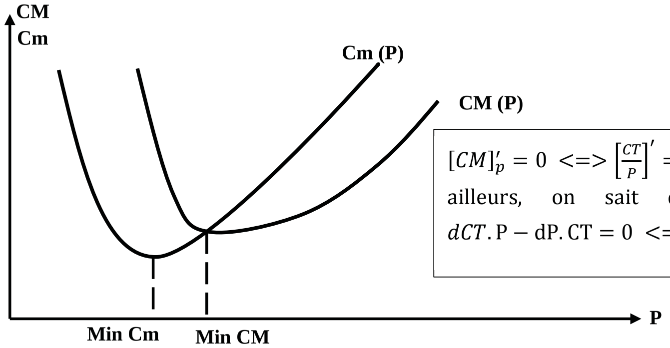


La pente = tg α = - Pk/Pl.

RD : Ressources disponibles = Coût total.

Fig n° 01 : La droite d'iso-coût

4. Pour démontrer que la courbe du coût marginal (Cm) coupe la courbe du coût moyen (CM) en son point minimum, il suffit d'annuler la première dérivée du coût moyen (Principe mathématique d'un optimum).



$[CM]'_p = 0 \iff \left[\frac{CT}{P}\right]' = 0 \iff \frac{dCT.P - dP.CT}{P^2} = 0$, Par ailleurs, on sait que : ∀ P; $P^2 \neq 0$, donc : $dCT.P - dP.CT = 0 \iff \frac{dCT}{dP} = \frac{CT}{P} \iff C_m = CM$

Fig n° 2 : La représentation graphique du coût marginal et moyen

5. Dans la théorie du comportement du producteur, il y a lieu de distinguer les coûts de courte période et les coûts de longue période. En courte période la capacité de production installée au démarrage de l'activité de l'entreprise ne peut changer ; il existe simultanément des coûts fixes et des coûts variables, alors qu'en longue période l'entrepreneur fait varier la taille de ses équipements, tous les facteurs et tous les coûts sont variables.

6. Le glissement de la droite budgétaire du producteur à droite signifie la baisse du prix du facteur capital (K) et son glissement à gauche signifie donc l'augmentation du prix du capital, toutes choses égales par ailleurs.

7. Dans l'analyse du comportement du producteur, on distingue deux approches d'analyse, à savoir :

A-L'approche technique par les fonctions de production, qui s'intéresse à étudier principalement la relation entre le volume de production (P) et les quantités de facteurs (K et L) nécessaires à la production de (P). [$P = f(k, l)$, PPM et PPm] ;

B-L'approche économique s'intéresse par contre à étudier la relation entre les quantités vendues (RT = Pu. P) et les prix des facteurs de production (les coûts CT ou les ressources disponibles, CT = K. Pk + L. Pl).

9. Dans la théorie Néo-classique, on appelle un entrepreneur ou un producteur rationnel, un producteur qui cherche toujours à augmenter ses ventes de produits pour maximiser son profit (π), celui-ci sera donc le résultat :

1-du volume (quantité) de production ;

2-du niveau des coûts de production.

Maximiser la différence entre les recettes et les coûts : Max π = RT – CT.

Rationnel : la recherche d'un optimum sous contrainte.

Partie des exercices d'application

Exercice n°01 :

On a : $\mathbf{CT\ (P) = P^3 - 12P^2 + 72P}$. Pour P appartient à [0 ; 8].

1. Le coût marginal en fonction de P :

$\mathrm{Cm\ (P)} = \frac{\mathrm{dCT}}{\mathrm{dP}} = 3\mathrm{P}^2 - 24\mathrm{P} + 72$

2. Les variations du coût marginal sur [0 ; 8]

Il faut dériver Cm (P) et étudier le signe de $[\frac{\mathrm{d\ Cm\ (P)}}{\mathrm{dP}}]$ ou utiliser les résultats concernant les polynômes du second degré.

$\frac{\mathrm{d\ Cm\ (P)}}{\mathrm{dP}} = 6\mathrm{P} - 24 = 6(\mathrm{P} - 4)$.

P	0		4		8
Cm(P)'		−	0	+	
Cm(P)	72	↘	24	↗	72

3. Le coût marginal est minimal pour un volume de production :

$\frac{d\ Cm\ (P)}{dP} = 0 <=> 6P - 24 = 0 <=> 6(P - 4) = 0$. Le coût marginal est minimum pour **P = 4 unités.**

4. Le coût moyen en fonction de P :

$\mathrm{CM(P)} = \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{P}^3 - 12\mathrm{P}^2 + 72\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \mathbf{P^2 - 12P + 72}$

5. Les variations du coût moyen sur [0 ; 8] :

Il faut dériver CM (P) et étudier le signe de $[\frac{\mathrm{d\ CM\ (P)}}{\mathrm{dP}}]$

$\frac{\mathrm{d\ CM\ (P)}}{\mathrm{dP}} = \frac{\mathrm{d(P^2 - 12P + 72)}}{\mathrm{dP}} = 2\mathrm{P} - 12 = 2(\mathrm{P} - 6).$

P	0		6		8
CM(P)'		−	0	+	
CM(P)	72	↘	36	↗	40

6. Le volume de production qui minimise le coût moyen :

1ère méthode :

Pour déterminer le volume de production qui minimise le coût moyen, on calcule la première dérivée du coût moyen et cette dérivée doit être égale à zéro :

$\frac{\mathrm{d\ CM\ (P)}}{\mathrm{dP}} = 0 <=> \frac{\mathrm{d(P^2 - 12P + 72)}}{\mathrm{dP}} = 0 <=> 2\mathrm{P} - 12 = 0 <=> 2(\mathrm{P} - 6) = 0 <=> \mathbf{P = 6}$ **unités**.

2ème méthode :

On sait que lorsque le coût moyen est à son minimum, il est égal au coût marginal :

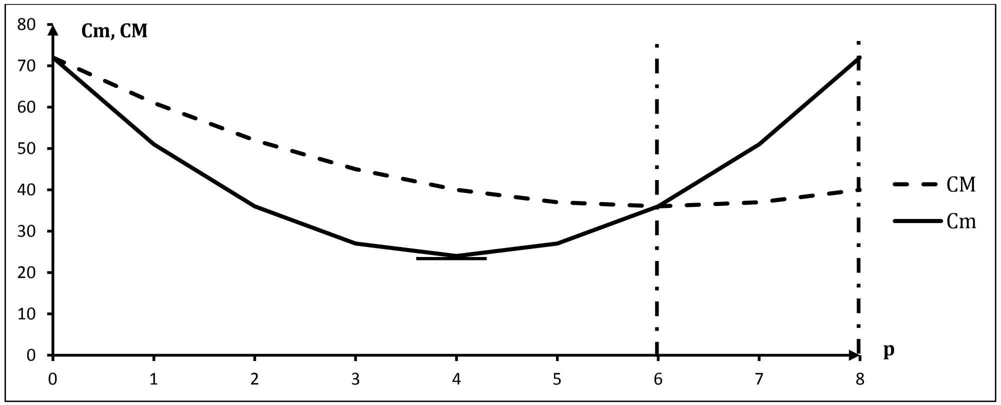
$\mathrm{CM(P) = Cm(P) <=> P^2 - 12P + 72 = 3P^2 - 24P + 72 <=> P(P - 12) = P(3P - 24) <=>} \mathbf{P = 6}$ **unités.**

Donc, la quantité de production pour laquelle le coût moyen est minimum, c'est lorsque $\mathbf{P = 6}$ **unités**

7. L'optimum de production.

On obtient le maximum de production lorsque le coût moyen est à son minimum. L'optimum de production correspond à : $\mathbf{P = 6}$ **unités.**

8. La représentation graphique des courbes représentatives du coût marginal et du coût moyen.



Le coût marginal est supérieur au coût moyen pour : $6 < P \leq 8$.

Exercice n°02 :

On a : $p = f(k,l) = 2\,k^{1/2}\,l^{1/2}$, $CT = Rd = 4k + 9l$

1. Le problème d'optimisation posé ici est celui de la recherche du coût minimum permettant de réaliser une production donnée (p=100 unités), le problème transcrit mathématiquement s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Min } CT = Rd = 4k + 9l \\ \qquad \text{S/C} \\ p = f(k,l) = 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} \end{cases}$$

, en d'autres termes, il s'agit de trouver les valeurs (k, l) du point de contact entre l'isoquante P_0 = 100 unités et la droite de budget ayant pour pente (-4/9) ; en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, on peut écrire :

$L(k,l,\lambda) = CT + \lambda\,(p - f(k,l))$

$L(k,l,\lambda) = 4k + 9l + \lambda\,(100 - 2\,k^{1/2}\,l^{1/2})$. Cette fonction admet des solutions, si ses dérivées partielles s'annulent au même temps :

$$\text{Min } L(k,l,\lambda) \iff \begin{cases} \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - 2\,\lambda\,\frac{1}{2}k^{-1/2}\,l^{1/2} = 0 \\ 9 - 2\,\lambda\,\frac{1}{2}k^{1/2}\,l^{-1/2} = 0 \\ 100 - 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{4k^{1/2}}{l^{1/2}} \dots\dots\dots\dots (1) \\ \lambda = \frac{9l^{1/2}}{k^{1/2}} \dots\dots\dots\dots (2) \\ 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} = 100 \dots\dots (3) \end{cases}$$

$$\text{On a: } (1) = (2) \iff \begin{cases} \frac{4k^{1/2}}{l^{1/2}} = \frac{9l^{1/2}}{k^{1/2}} \dots\dots\dots (4) \\ 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} = 100 \dots (3) \end{cases} \iff \begin{cases} 4k = 9l \\ 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{9}{4}l \dots\dots\dots\dots (4) \\ 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} = 100 \dots (3) \end{cases}.$$

On remplace la valeur de k dans l'équation (3) et on obtient:

$2\,k^{1/2}\,l^{1/2} = 100 \iff 2\,(\frac{9}{4}\,l)^{1/2} l^{1/2} = 100 \iff \mathbf{l} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{3}} = \mathbf{33,33}$ **unités**

$k = \frac{9}{4}l = \frac{9}{4} * \frac{100}{3} = \mathbf{75}$ **unités**

Donc, la combinaison de facteurs (k, l) = (75 ; 33,33) est celle qui permet à l'entrepreneur de minimiser le coût de production (on parle de combinaison optimale), tout en produisant une quantité P=100 unités.

Remarque :

On peut constater que les conditions du premier ordre sont remplies lorsque : $\frac{4}{9} = \frac{k^{-1/2}\,l^{1/2}}{k^{1/2}\,l^{-1/2}}$ ($\frac{P_k}{P_l} = \frac{PPmg_k}{PPmg_l}$).Pour que l'optimum soit réalisé, il faut donc que le rapport des productivités marginales soit égal au rapport des prix des facteurs de production.

2. Pour réaliser une production de P = 100 unités à un coût minimum, il faut que le producteur utilise les quantités de 75 unités et 33,33 unités, respectivement de K et L. Le coût de production correspondant à l'utilisation de cette combinaison optimale de production est de **600 DA**. L'entreprise ne dispose que d'un budget de **CT = RD = 504 DA**. L'entrepreneur rationnel ne peut donc mettre en œuvre la production qu'il désirait atteindre. Compte tenu de cette contrainte **(CT = RD = 504 DA),** il va chercher à réaliser la production la plus élevée possible. Le programme sera donc :

$$\begin{cases} \text{Max p} = 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} \\ \qquad \text{S/C} \\ CT = Rd = 4k + 9l \end{cases}$$

, en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, on peut noter :

$L(k,l,\lambda) = P + \lambda\,(CT - 4k - 9l)$

$L(k,l,\lambda) = 2\,k^{1/2}\,l^{1/2} + \lambda\,(504 - 4k - 9l)$. Les dérivées partielles de cette égalité, peut nous former le système d'équations (S) ci-après :

$$\text{Max } L(k,l,\lambda) \iff \begin{cases} \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,\frac{1}{2}k^{-1/2}\,l^{1/2} - 4\,\lambda - = 0 \\ 2\,\frac{1}{2}k^{1/2}\,l^{-1/2} - 9\,\lambda - = 0 \\ 504 - 4k - 9l = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{l^{1/2}}{4\,k^{1/2}} \dots\dots\dots\dots (1) \\ \lambda = \frac{k^{1/2}}{9\,l^{1/2}} \dots\dots\dots\dots (2) \\ 4k + 9l = 504 \dots\dots (3) \end{cases}$$

$$\text{On a : } (1) = (2) \iff \begin{cases} \frac{l^{1/2}}{4\,k^{1/2}} = \frac{k^{1/2}}{9\,l^{1/2}} \dots (4) \\ 4k + 9l = 504 \dots (3) \end{cases} \iff \begin{cases} 4k = 9l \dots\dots\dots (4) \\ 4k + 9l = 504 \dots (3) \end{cases}.$$

On remplace (4) dans l'équation (3) et on obtient:

$4k + 9l = 504 \iff 9l + 9l = 504 \iff l = \frac{504}{18} = \boldsymbol{28\ unités}$

$k = \frac{9}{4}l = \boldsymbol{63\ unités}$

Donc, la combinaison optimale est (k, l) = (63, 28). Ce qui correspond à une production totale de : $p = f(63,28) = 2\,(63)^{1/2}\,(28)^{1/2} = \boldsymbol{84\ Unités}$.

Exercice supplémentaire récapitulatif :

On a $\boldsymbol{p} = f(k,l) = \frac{3}{4}K^{3/4}.L^{2/5}$

Partie I :

1. Le TMST L à K :

$\text{TMST}_{\text{L à K}} = \frac{\text{PPmg}_l}{\text{PPmg}_k} = \frac{\frac{2}{5}*\frac{3}{4}K^{3/4}L^{-3/5}}{\frac{3}{4}*\frac{3}{4}K^{-1/4}L^{2/5}} = \frac{8\,K}{15\,L}$

Pour (k, l) = (3, 4) : $\text{TMST}_{\text{K à L}} = \frac{1}{\text{TMST}_{\text{L à K}}} = \frac{15\,L}{8\,K} = \frac{15*4}{8*3} = \frac{5}{2}$ = 2,5.

2. Les élasticités :

$\boldsymbol{e_{p/k}} = \frac{\boldsymbol{\partial p}}{\boldsymbol{\partial k}} * \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{p}} = \frac{\frac{3}{4}*\frac{3}{4}k^{-1/4}l^{2/5}*k}{\frac{3}{4}k^{3/4}.l^{2/5}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0,75}$

$\boldsymbol{e_{p/l}} = \frac{\boldsymbol{\partial p}}{\boldsymbol{\partial l}} * \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{p}} = \frac{\frac{2}{5}*\frac{3}{4}K^{3/4}L^{-3/5}*l}{\frac{3}{4}k^{3/4}.l^{2/5}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,4}$

3. p est-elle une fonction de production homogène ?

$\boldsymbol{p}$ est une fonction de production homogène, lorsqu'on vérifie que : $f(ak,al) = a^{\lambda} * p$, avec λ, le degré d'homogénéité.

Donc : $f(ak,al) = \frac{3}{4}(ak)^{3/4}(al)^{2/5} = a^{3/4}a^{2/5} * \frac{3}{4}k^{3/4}l^{2/5} = a^{3/4+2/5} * \frac{3}{4}k^{3/4}l^{2/5} = a^{1,15} * p = a^{\lambda} * p$

$\boldsymbol{p}$ **:** est donc une fonction de production homogène de degré λ = 1,15. On a λ>1, donc les rendements d'échelle sont croissants.

4. La variation nécessaire de la quantité du facteur travail pour produire 12% de plus :

D'après le coefficient de l'élasticité partielle de la production par rapport au facteur travail L, une variation de 1% du facteur L provoque une variation de la production de 0,4% (On a $\boldsymbol{e_{p/l} = 0,4}$)

	$\Delta l/l$	$\Delta P/P$	
$\mathbf{e_{p/l} = 0,4}$	+1%	+0,4%	$=> \Delta P/P = \frac{(+1\%)*(+12\%)}{(+0,4\%)} = \mathbf{+30\%}$.
	$\Delta l/l$	+12%	

Pour obtenir 12% de plus de p, il faut augmenter le facteur L de 30%.

5. La variation de la production totale enregistrée lorsqu'on triple les quantités (k l) de façon simultanée :

Lorsqu'on triple de façon simultanée K et L, on mesure en réalité $f(3k,3l)$:

$f(3k,3l) = 3^{1,15} * p = 3,537 * p$

p est une fonction de production homogène avec λ>1, donc la variation de p sera plus que proportionnelle à la variation de K et L ; les rendements d'échelle sont croissants.

Partie II :

1. Les quantités de facteurs (K et L) qui maximisent le volume de production :

a. Formalisation du problème : $\begin{cases} \text{Max } p = f(k,l) = \frac{3}{4}\, k^{3/4}l^{2/5} \\ \text{S/C} \\ 1380 = 15k + 20l \end{cases}$

b. Construction de la fonction de Lagrange :

$L(k,l,\lambda) = f(k,l) + \lambda\,(Rd - kP_k - lP_l)$

$L(k,l,\lambda) = \frac{3}{4}\, k^{3/4}l^{2/5} + \lambda\,(1380 - 15k - 20l)$

c. Résolution du problème :

La fonction de Lagrange (L) atteint son maximum lorsque ses dérivées partielles par rapport à $(k, l\ et\ \lambda)$ sont égales à zéro :

$\text{Max } L(k,l,\lambda) <=> \begin{cases} \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial L(k,l,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial k} - \lambda P_k = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial l} - \lambda P_l = 0 \\ Rd - kP_k - lP_l = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \lambda = \frac{\frac{\partial P}{\partial k}}{P_k} \\ \lambda = \frac{\frac{\partial P}{\partial l}}{P_l} \\ R = kP_k + lP_l \end{cases} <=> \begin{cases} \lambda = \frac{Pmg_k}{P_k} \\ \lambda = \frac{Pmg_l}{P_l} \\ R = kP_k + lP_l \end{cases}$

$<=> \begin{cases} \lambda = \frac{\frac{3}{4}*\frac{3}{4}k^{-1/4}l^{2/5}}{15} \dots\dots\dots (1) \\ \lambda = \frac{\frac{2}{5}*\frac{3}{4}K^{3/4}L^{-3/5}}{20} \dots\dots\dots (2) \\ 1380 = 15\,k + 20\,l \dots. (3) \end{cases}$ On a: (1) = (2) $<=> \begin{cases} \frac{\frac{3}{4}*\frac{3}{4}k^{-1/4}l^{2/5}}{15} = \frac{\frac{2}{5}*\frac{3}{4}K^{3/4}L^{-3/5}}{20} \dots (4) \\ 1380 = 15\,k + 20\,l \dots\dots (3) \end{cases} <=> \begin{cases} 15\,l = 6\,k \\ 1380 = 15\,k + 20\,l \end{cases}$

$<=> \begin{cases} l = \frac{2}{5}.k \dots\dots\dots\dots (4) \\ 1380 = 15\,k + 20\,l \dots. (3) \end{cases}$, On remplace l par sa valeur dans l'équation du budget (3), on obtient:

$1380 = 15 * k + 20 * \left(\frac{2}{5}.k\right) <=> 1380 = 23 * k <=> k = \frac{1380}{23} = 60\ <=> \mathbf{k = 60\ Unités}$.

$l = \frac{2}{5} * 60 = \mathbf{24\ Unités}$.

Donc, la combinaison de facteurs (k, l) = (60, 24) est celle qui permet au producteur de maximiser le volume de production (on parle de combinaison optimale) pour des ressources disponibles (ou CT) égales à 1380 DA.

2. La valeur du multiplicateur de Lagrange λ :

De (1) et (2), on a : $\lambda = \frac{\frac{3}{4}*\frac{3}{4}k^{-1/4}l^{2/5}}{15} = \frac{\frac{2}{5}*\frac{3}{4}K^{3/4}L^{-3/5}}{20} = \frac{\frac{3}{4}*\frac{3}{4}(60)^{-1/4}(24)^{2/5}}{15} = \frac{\frac{2}{5}*\frac{3}{4}(60)^{3/4}(24)^{-3/5}}{20} = 0{,}048$ tonnes/DA

3. L'effet d'une augmentation des ressources disponibles (CT) de 75 DA sur la quantité produite :

$\lambda = 0{,}048\ tonnes/DA$, c'est-à-dire que le volume de production s'accroît de la valeur λ (0,048 $tonnes$) à chaque accroissement de 1DA de ressources disponibles $\left(\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta Rd}\right)$.

Lorsque $\Delta Rd = +75$ DA, on obtient une variation du volume p égale à : $\Delta P = \lambda * \Delta Rd = 0{,}048 * (75) = \mathbf{+3,6\ tonnes}$.

4. La variation des ressources disponibles (Rd ou CT) nécessaire pour accroître la production de 10% :

$\frac{\Delta p}{p} = \mathbf{10\%} => \Delta \boldsymbol{p} = (\mathbf{10\%}) * \boldsymbol{p}$

Le niveau de la production à l'équilibre :

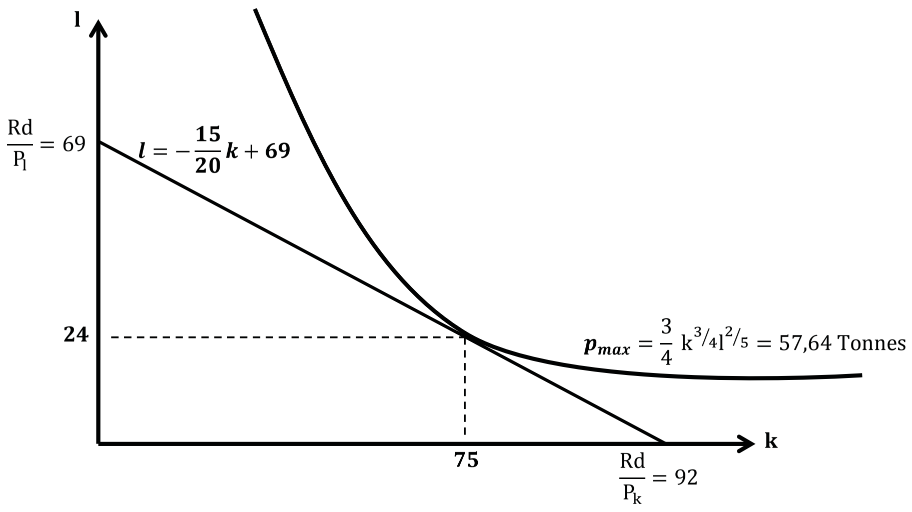
$p_{max} = f(60,24) = \frac{3}{4}\,(60)^{3/4}(24)^{2/5} = 57{,}64$ Tonnes.

$\Delta \boldsymbol{p} = (\mathbf{10\%}) * \boldsymbol{p} = \mathbf{0,1 * 57,64 = +5,764}\ \boldsymbol{tonnes}$

Pour obtenir 5,764 tonnes de production en plus, il faut :

$\Delta Rd = \frac{\Delta P}{\lambda} = \frac{5{,}764}{0{,}048} = \mathbf{+120,08\ DA}$.

5. Représentation graphique de l'équilibre :



Mr. MANAA Boumediene