



Université A/MIRA de Béjaia  
Faculté : ST  
Département GC

Année universitaire 19/20

Cours de Maths 4

---

# Chapitre 1

## rappels sur les nombres complexes :

### 1.1 Définition :

On appelle nombre complexe  $z$  toute expression de la forme

$$z = a + ib,$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $i^2 = -1$ .

On note ainsi

$$a = \operatorname{Re}(z) \text{ (partie réelle de } z), \quad b = \operatorname{Im}(z) \text{ (partie imaginaire de } z).$$

### 1.2 Remarque :

On adopte les deux règles suivantes :

$$(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$

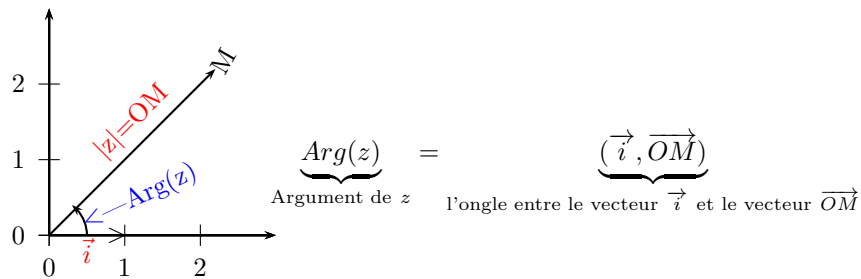
$$(a + ib = 0 = 0 + i0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$$

### 1.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Tout nombre complexe  $z = a + ib$  peut être représenté sur le plan  $(Oxy)$  par un point  $M(a, b)$ , et réciproquement, tout point  $M(a, b)$  peut être considéré comme l'image géométrique du nombre complexe  $z = a + ib$ .

Au sens géométrique,

$$\underbrace{|z|}_{\text{Module de } z} = \underbrace{OM}_{\text{distance entre O et M}}$$



**Remarque :**

Pour des raisons de convenance, on assimile le nombre complexe  $z = a + ib$  au vecteur  $\vec{OM}$  correspondant.

**Exemple 1 :**

Calculer  $|z|$  et  $Arg(z)$  pour  $z = -i + 1$ ,  $z = -3i$ ,  $z = 2i$ .

**Exemple 2 :**

1) Écrire les expressions suivantes au sens géométrique.

$$z = 2 + i, |z| \leq 3, |z - i| \leq 6, |z + i - 1| = |z - i + 2|$$

2) Écrire les expressions suivantes au sens complexe.

$$2\vec{OM} + 3\vec{OM}^t = \vec{0}, |OM|\vec{OM}^t = -2\vec{OM}^t.$$

3) transformer les ensembles suivants au sens complexe :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } OM \leq 1\}, \{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } OM < 1\}, \{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } 1 \leq OM \leq 2\}$$

## Chapitre 2

# Fonctions holomorphes-Intégrales curvilignes

### 2.1 Caractérisation des ensembles dans le plan-Appellations

#### 2.1.1 Disques ouverts-Disques fermés :

Soit  $(Oxy)$  un plan.

On appelle disque ouvert de centre  $A$  et de rayon  $R$ , noté  $D(A, R)$ , l'ensemble :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } AM < R\}.$$

On appelle disque fermé de centre  $A$  et de rayon  $R$ , noté  $\overline{D(A, R)}$ , l'ensemble :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } AM \leq R\}.$$

**Exercice :**

Transformer les ensembles  $\overline{D(A, R)}$  et  $D(A, R)$  au sens complexe.

#### 2.1.2 Ensemble ouvert :

Soit  $E$  un ensemble de points dans le plan.

Au sens géométrique :

$$E \text{ est un ouvert} \Leftrightarrow \forall M \in E, \exists R > 0 \text{ vérifiant } D(M, R) \subset E.$$

Intuitivement, un ensemble ouvert contient tous les points de son intérieur mais ne contient pas les points de sa frontière (ou de ses frontières).

Au sens complexe :

$$E \text{ est un ouvert} \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \exists R > 0 \text{ vérifiant } D(z, R) \subset E.$$

### Remarque :

Un ensemble fermé contient tous les points de son intérieur et de sa frontière.

### 2.1.3 Surfaces : connexes-simplement connexes :

Une surface plane est dite connexe si elle est faite d'un seul « morceau »

Une surface plane est dite simplement connexe si elle est connexe et "si elle n' a pas de trou"

## 2.2 Forme algébrique d'une Fonction à variable complexe :

### 2.2.1 Exemple :

Soit  $f$  la fonction à variable complexe  $z$  définie par  $f(z) = z^2 - 2i\bar{z} + i$ .

Ecrire  $f(z)$  sous la forme algébrique.

On a  $z = x+iy$  donc  $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ , par conséquent  $f(z) = \underbrace{(x^2 - y^2 + 2y)}_{\text{partie réelle de } f(z)} + i \underbrace{(2xy - 2x + 1)}_{\text{partie imaginaire de } f(z)}$

on pose :

$p(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$  et  $q(x, y) = 2xy - 2x + 1$ , l'expression  $p(x, y) + iq(x, y)$  est appelée forme algébrique de la fonction  $f(z)$ .

## 2.3 Fonctions holomorphes :

Holomorphe signifie dérivable au sens complexe.

Soit  $f$  une fonction complexe à variable complexe et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

### 2.3.1 Définition :

$f$  holomorphe en  $z_0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = l \in \mathbb{C}, (h \in \mathbb{C})$ .

### 2.3.2 Remarque :

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

$f$  holomorphe sur  $D \Leftrightarrow$  holomorphe en tout point de  $D$

### 2.3.3 Exemple :

Dans chaque cas, étudier l'holomorphicité de  $f$  en  $z_0 = 0$ .

1)  $f(z) = z$ , 2)  $f(z) = \bar{z}$ .

1)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h-z}{h} = 1, \text{ la fonction } z \mapsto f(z) = z \text{ est holomorphe en } 0.$$

2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Cette limite n'existe pas, par conséquent la fonction  $z \mapsto f(z) = \bar{z}$  n'est pas holomorphe en 0.

### 2.3.4 Proposition :

soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  un élément de  $U$  et  $f = p + iq$  une fonction complexe définie sur  $U$ .

$$f \text{ holomorphe sur } U \Leftrightarrow \forall (x, y), x+iy \in U : \begin{cases} (a) : \text{les dérivées partielles de } p \text{ et } q \text{ existent et continues sur } U \\ \text{et} \\ (b) : \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \\ \text{et} \\ (c) : \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial q}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

**Remarque :**

Les deux égalités (b) et (c) sont appelées conditions de Cauchy.

## 2.4 Représentation paramétrique de quelques courbes :

### 2.4.1 Équation paramétrique d'un cercle :

Soit  $C(M_0, R)$  le cercle de centre  $M_0(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$ .  $C(M_0, R)$  est caractérisé comme suit :

$$C(M_0, R) = \left\{ M(x, y) \in (P) \text{ vérifiant } \|\overrightarrow{M_0M}\| = R \right\}$$

Au sens complexe, on écrit :

$$C(z_0, R) = \{z = (x + iy) \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |z - z_0| = R\},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$  (l'affixe de  $M_0$ ),  $z = x + iy$  (l'affixe de  $M$ ).

D'autre part, un nombre complexe  $z - z_0$  s'écrit sous la forme complexe comme suit :

$$z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta},$$

Où  $\theta = \mathbf{Arg}(z - z_0)$ . Mais dans notre cas  $z \in C(z_0, R)$ , donc :

$$|z - z_0| = R \text{ et } \theta \in [0, 2\pi].$$

En plus, on a :

$$z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta} \Leftrightarrow z = z_0 + Re^{i\theta}$$

En fin :

$$C(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } z = z_0 + Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

L'équation  $z = z_0 + Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$  est appelée l'équation paramétrique (ou la représentation paramétrique) du cercle  $C(M_0, R)$ .

### 2.4.2 Équation paramétrique d'un segment de droite :

Considérons les deux points  $A(x_0, y_0)$  et  $A(x_1, y_1)$ , le segment de droite  $[AB]$  est caractérisé comme suit :

$$[AB] = \left\{ M(x, y) \in (P) \text{ vérifiant } \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \text{ et } M \text{ entre } A \text{ et } B. \right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$[AB] = \left\{ M(x, y) \in (P) \text{ vérifiant } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1. \right\}$$

Au sens complexe

$$[AB] = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } z - z_0 = t(z - z_1) \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1.\},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$  et  $z_1 = x_1 + iy_1$ .

L'expression  $z = z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]$  est appelée la représentation paramétrique de  $[AB]$  au sens complexe.

## 2.5 Intégrales curvilignes :

### 2.5.1 Intégrales curvilignes des fonctions à deux variables réelles :

#### Définition :

Soient  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  deux fonctions et  $(C)$  une courbe plane (veut dire cette courbe se trouve dans le plan).

L'expression

$$\int_{(C)} p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad (1)$$

est appelée intégrale curviligne de  $p(x, y)$  et  $q(x, y)$  le long de la courbe  $(C)$  orientée dans le sens positif.

En physique, l'expression (1) signifie le travail accompli par la force  $\vec{F}$  de composantes  $p$ ,  $q$  le long de la courbe  $(C)$ .

#### Exemple :

Calculer le travail  $W_{[OA]}$  accompli par la force  $\vec{F}(x^2, xy)$  le long de la droite  $[OA]$  orientée de  $O(0, 0)$  vers  $A(1, 1)$ .

#### Solution :

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2 dx + xy dy.$$

L'équation de la droite  $[OA]$  est donnée par :

$$y = x$$

Cela veut dire

$$M(x, y) \in [OA] \Leftrightarrow y = x.$$

Par conséquent

$$dy = dx$$

Dans l'expression de l'intégrale ci-dessus nous allons mettre  $x$  au lieu de  $y$ ,  $dx$  au lieu de  $dy$ .

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 x^2 dx + x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(Selon le sens indiqué  $x$  varie de 0 à 1).



**Remarque :**

Si on vous demande de calculer la même intégrale dans le sens contraire (de  $A$  à  $O$ ), alors  $x$  varie de 1 à 0.

$$W_{[AO]} = \int_{[AO]} x^2 dx + xy dy = \int_1^0 x^2 dx + x^2 dx = -\frac{1}{3}.$$

**2.5.2 Intégrales curvilignes des fonctions à variable complexe :**

Soient  $f$  une fonction de variable complexe et  $(C)$  un chemin simple dans le plan. Au sens complexe l'expression

$$\int_{(C)} f(z) dz$$

est appelée intégrale curviligne de  $f(z)$  le long du chemin  $(C)$  orienté dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre) .

**Remarque :**

généralement, lorsque le chemin  $(C)$  est fermé et orienté dans le sens positif, on note l'intégrale curviligne de  $f(z)$  le long du chemin  $(C)$  par :

$$\oint_{(C)} f(z) dz$$

D'où vient l'appellation "intégrale curviligne" au sens complexe ?

( poser  $f = p + iq$  puis remplacer  $dz$  par  $dx + dyi$ , vous allez retrouver la formule d'intégrale curviligne donnée dans (8.1).)

**Propriétés des intégrales curvilignes :**

La notation  $(C)$  signifie le chemin orienté dans le sens positif,  $(-C)$  signifie le chemin orienté dans le sens négatif.

Voici les propriétés suivantes :

**Propriété 1 :**

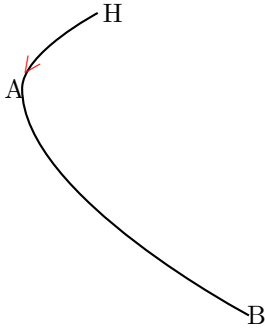
$$\int_{(C)} f(z) dz = - \int_{-(C)} f(z) dz$$

**Propriété 2 :**

On coupe le chemin  $(C)$  en deux chemins  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , dans le même sens on a :

$$(2) \int_{(C)=(HB)} f(z) dz = \int_{(C_1)=(HA)} f(z) dz + \int_{(C_2)=(AB)} f(z) dz$$

Voir la figure 1.



**Propriété 3 :**

Soient  $U$  un ouvert non troué dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  et  $z_0, z_1$  deux points de  $U$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $U$  sauf peut être aux points  $z_0$  et  $z_1$ .  $(C)$  un chemin simple, fermé tracé dans  $U$ .  $z_0$  et  $z_1$  se trouvent à l'intérieur de  $(C)$ . on a :

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C_0)} f(z)dz + \int_{(C_1)} f(z)dz,$$

Où  $(C_0), (C_1)$  deux cercles de centres  $z_0, z_1$  et de rayons quelconques vérifiant :  $(C_0) \cap (C_1) = \emptyset$  et  $(C_0), (C_1)$  se trouvent à l'intérieur de  $(C)$  (voir figure 2).

Une idée globale pour démontrer cette dernière propriété , en effet considérons le chemin  $(\gamma)$  orienté (voir la figure 2) défini comme suit :

$$(\gamma) = [AB] \cup (BE) \cup [EF] \cup (C_1) \cup [ST] \cup (TM) \cup [MN] \cup (MA).$$

Par conséquent,

$$\int_{(\gamma)} f dz = \int_{[AB]} f dz + \int_{(BE)} f dz + \int_{[EF]} f dz + \int_{(C_1)} f dz + \int_{(TM)} f dz + \int_{[ST]} f dz + \int_{[MN]} f dz + \int_{(MA)} f dz + \int_{(-C)} f dz \quad (*)$$

La fonction  $f$  est holomorphe sur  $(\gamma)$  et dans son intérieur, par conséquent  $\int_{(\gamma)} f dz = 0$ . la formule (\*) devient :

$$\int_{[AB]} + \int_{(BE)} + \int_{[EF]} + \int_{(C_1)} + \int_{(TM)} + \int_{[ST]} + \int_{[MN]} + \int_{(MA)} = 0 \quad (**)$$

comme  $\int_{[AB]} + \int_{[MN]} = 0$ ,  $\int_{[EF]} + \int_{[ST]} = 0$  et  $\int_{(BE)} + \int_{(TM)} = \int_{(C_0)}$ , la formule (\*\*) revient sous cette forme :

$$\int_{(C_0)} f dz + \int_{(C_1)} f dz + \int_{(-C)} f dz = 0 \Leftrightarrow \int_{(C_0)} f dz + \int_{(C_1)} f dz = - \int_{(-C)} f dz$$

Comme  $\int_{(C)} f dz = - \int_{(-C)} f dz$ , on tire la propriété suivante :

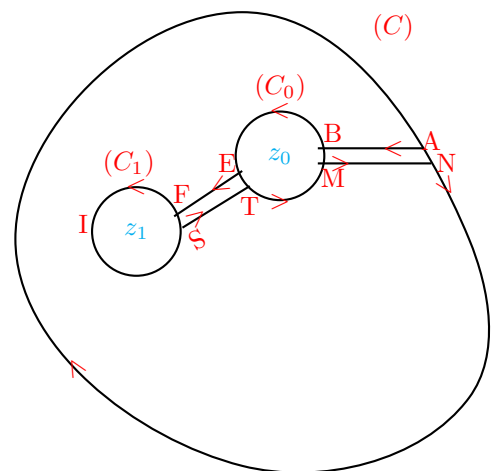
$$\int_{(C)} f dz = \int_{(C_0)} f dz + \int_{(C_1)} f dz$$

**Remarque :**

On peut généraliser cette propriété sur un nombre de points  $z_0, z_1, \dots, z_n$ , on a :

$$\int_{(C)} f dz = \sum_{i=0}^{i=n} \int_{(C_i)} f dz$$

sans oublier que les cercles  $(C_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) de centres  $z_0, z_1, \dots, z_n$  sont deux à deux disjoints et tous se trouvent à l'intérieur de  $(C)$



**Exemple :**

Calculer  $\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz$ ,  $(C)$  le cercle de centre  $(1, 0)$  et de rayon 4.

**Solution :**

$$z \in (C) \Leftrightarrow z = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Par conséquent  $dz = \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta$ , l'intégrale en question devient :

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta$$

En fin

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i.$$

**Proposition :**

Soit  $(C)$  un chemin fermé simple,  $f$  une fonction holomorphe sur  $(C)$  et à l'intérieur de  $(C)$ . On a :

$$\int_{(C)} f(z) dz = 0$$

### Conséquence 1 :

Si  $f$  est holomorphe dans un ouvert simplement connexe  $U$ , alors l'intégrale  $\int f(z)dz$  ne dépend pas du chemin suivi.

c'est à dire :

Si  $z_0 = x_0 + iy_0$  et  $z_1 = x_1 + iy_1$  deux point fixés dans le plan complexe, alors pour tout chemin  $(G)$ (tracé à l'intérieur de  $U$ ) joignant  $z_0$  à  $z_1$  on a :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int_{(G)} f(z)dz$$

### 2.5.3 Formules intégrales de Cauchy :

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe  $U$ ,  $(C)$  un chemin fermé tracé à l'intérieur de  $U$ ,  $z_0$  fixé dans  $(U)$ . On a les deux formules suivantes :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'intérieur de } (C). \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'extérieur de } (C). \end{cases}$$

D'une manière générale,  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'intérieur de } (C). \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ se trouve à l'extérieur de } (C). \end{cases}$$

#### Exemple :

Calculer  $\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$  dans les cas suivants :

1) $(C)$  : le cercle de centre  $(2, 0)$  et de rayon 0.5.

2) $(C)$  : le cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon 2.

#### Solution :

L'intégrale  $\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$  possède la forme  $\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ ,  $z_0 = i$ .

Dans le cas (1),  $z_0 = i = 0 + 1i$  se trouve à l'extérieur de  $(C)$  et la fonction  $z \mapsto \sin z$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 0$$

Dans le cas (2),  $z_0 = i = 0 + 1i$  se trouve à l'intérieur de  $(C)$  et la fonction  $z \mapsto \sin z$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(g)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 2\pi i \sin i$$

# Chapitre 3

## Séries de Laurent-Théorème des résidus

### 3.1 Séries de Laurent

#### 3.1.1 Définition

Soit  $z_0$  fixé dans  $\mathbb{C}$ ,  $z$  une variable complexe.

On appelle série de Laurent autour de  $z_0$  (ou suivant les puissances de  $z - z_0$ ) toute expression de la forme

$$\underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n (z - z_0)^{-n}}_{\text{série suivant les puissances de } z \text{ positives}} + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n}_{\text{série suivant les puissances de } z \text{ négatives}} .$$

Les nombres complexes  $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$  sont appelés les coefficients de la série de Laurent.

Sous la forme explicite une série de Laurent autour de  $z_0$  s'exprime ainsi :

$$\dots + a_2 (z - z_0)^{-2} + a_1 (z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1 (z - z_0)^1 + b_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

#### Remarque et Appellation :

Une série de Laurent peut contenir un nombre fini ou infini de termes.

La notation  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n$  peut être remplacée par  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ .

La partie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$  appelée partie analytique.

La partie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^{-n}$  appelée partie principale.

**Exemple :**

1)  $\frac{1}{z}$  est une série de Laurent d'un seul terme  $z^{-1}$ , sa partie analytique est nulle, sa partie principale égale à  $z^{-1}$

1)  $2z^{-1} + 5z + 2z^2$  est une série de Laurent suivant les puissances de  $z$ , sa partie analytique égale à  $5z + 2z^2$  et sa partie principale égale à  $2z^{-1}$ .

2)  $-4(z-i)^{-3} + 5(z-i)^{-1} + 2 - 5i + 2(z-i)^2$  est une série de Laurent suivant les puissances de  $z-i$ , sa partie analytique égale à  $2 - 5i + 2(z-i)^2$  et sa partie principale égale à  $-4(z-i)^{-3} + 5(z-i)^{-1}$ .

**Activité 1 :**

Ecrire l'expression " $z^2 + iz$ " en série de Laurent suivant les puissances de  $(z-2)$ .

en effet,  $z = (z-2) + 2$  par conséquent  $z^2 + iz = [(z-2) + 2]^2 + i[(z-2) + 2]$ , d'où :

$$z^2 + iz = (z-2)^2 + (4+i)(z-2) + 4 + 2i.$$

### 3.1.2 Représentation des fonctions en séries de Laurent

**Activité 2 :**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on pose :

$$S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

1) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

2) Trouver une condition sur  $z$  pour que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  existe (c-à-d  $\in \mathbb{C}$ ).

3) Exprimer  $\frac{1}{1-z}$  à l'aide d'une série.

4) Considérons la fonction  $f$  définie par  $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$ . Exprimer cette fonction en série.

**Solution :**

Se rappeler la somme des termes d'une suite géométrique!

1)

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad \text{à condition } z \neq 1$$

2)

Se rappeler  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$  si  $|x| < 1$ !

Ainsi, dans notre cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$  si  $|z| < 1$ .

Se rappeler  $|z| < 1$  signifie le disque ouvert de centre  $O(0,0)$  et de rayon 1!

Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-z}} \quad (1)$$

Mais, explicitement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  signifie  $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$

L'expression (1) peut s'écrire sous cette manière

$$\boxed{\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z}} \quad (2)$$

3)

A travers de la formule (2), on dit que la fonction  $\frac{1}{1-z}$  est développable autour de  $z_0 = 0$  dans le disque ouvert de centre  $O(0,0)$  et de rayon 1.

Autrement dit, l'expression  $\frac{1}{1-z}$  peut être remplacée par la série  $1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$  sous la condition  $|z| < 1$ .

4)

A quelle condition peut-on exprimer  $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$  en série de Laurent?

Nous allons reprendre la formule (2)

$$\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

En divisant les deux membres de cette dernière formule par  $z^3$ , on obtient :

$$\forall z \text{ vérifiant } (|z| < 1 \text{ et } z \neq 0) \text{ on a } \frac{1}{(1-z)z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots + z^n + \dots \quad (3)$$

L'expression  $(|z| < 1 \text{ et } z \neq 0)$  peut être remplacée par  $0 < |z| < 1$ , la formule (3) devient :

$$\forall z \text{ vérifiant } (0 < |z| < 1) \text{ on a } \frac{1}{(1-z)z^3} = z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + \dots + z^n + \dots \quad (4)$$

De la formule (4), on dit que  $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$  est développable en série de Laurent autour de zéro (0).

Autrement dit, la fonction  $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$  peut être remplacée par

$z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + \dots + z^n + \dots$  sous la condition  $0 < |z| < 1$ .

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que une fonction de variable complexe soit développable en série de Laurent

**Théorème 3-1 :**

Considérons le disque ouvert pointé  $D = \{z \text{ vérifiant } 0 < |z - z_0| < R\}$ , ( $R \leq +\infty$ ).

Si  $f$  est une fonction à variable complexe holomorphe dans le disque ouvert pointé  $D$ , alors elle est développable en série de Laurent suivant les puissances de  $|z - z_0|$  dans le disque  $D$ .

Autrement dit, si vous prenez  $z$  dans  $D$  alors  $f(z)$  peut s'exprimer sous la forme :

$$f(z) = \dots + a_2(z - z_0)^{-2} + a_1(z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1(z - z_0)^1 + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$

## 3.2 Résidus

**Définition :**

Sous les conditions du Théorème 3-1, On appelle résidu de la fonction  $f$  au point  $z_0$  et on note  $Res(f, z_0)$  le coefficient de  $(z - z_0)^{-1}$  dans le développement de Laurent

$$\dots + a_2(z - z_0)^{-2} + \underbrace{a_1}_{Res(f, z_0)} (z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1(z - z_0)^1 + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$