Université A/Mira de Béjaia | TD 1 | Maths 4

Faculté : ST

Départements : GC | Nombre de séances :01

Exercice №1

Représenter, dans le plan, les ensembles suivants :

$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z+i| = 2\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z = 1 - i + it, \quad t \in \mathbb{R}\}$

$C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z+i| \leq 2\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } 1 \leq |z+i| \leq 2\}$

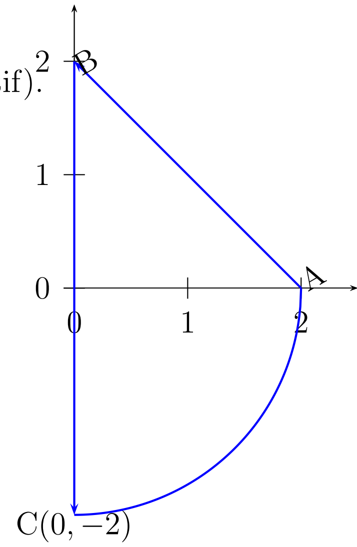
Exercice №2

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1) $\displaystyle\int_{(ABCA)} Re(z)|z|^2 dz$

2) $\displaystyle\int_{(ABCA)} zArg(z) dz$

(Sachant que le chemin d'intégration $(ABCA)$ orienté dans le sens positif).



1) $\displaystyle\int_{(OABO)} Re(z)|z|dz$, 2) $\displaystyle\int_{(OABO)} zArg(z)dz$

Solution

$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z+i| = 2\} = \{M(x,y) \text{ tq } |z - (-i)| = 2\}$

Le nombre complexe $z = x + iy$ Au sens géométrique se représente par le point $M(x,y)$ ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$

Le nombre complexe $z_0 = -i$ Au sens géométrique devient $M_0(0,-1)$ ou $\overrightarrow{OM_0}$

le module $|\quad|$ Au sens géométrique devient $\|\ \|$

Grâce à cette représentation, on écrit :

$$A = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} \right\| = 2 \right\}$$
$$A = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M_0O} \right\| = 2 \right\}$$
$$A = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{M_0M} \right\| = 2 \right\}$$

L'ensemble A est un cercle de centre M_0 de rayon 2.

De la même manière,
$B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z - (1+i) = it, \quad 0 \leq t \leq 1\} = \left\{ M(x,y) \text{ tq } \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_0}t, t \in \mathbb{R} \right\}$

Avec $M_1(1,1)$ et $M_0(0,1)$.

La condition $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_0}t$ signifie $\overrightarrow{M_1M}$ parallèle à $\overrightarrow{OM_0}$, en rajoutant la condition $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble B est une droite passant par le point M_1 dont le vecteur directeur est $\overrightarrow{OM_0}$

L'ensemble $C = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{M_0M} \right\| \leq 2 \right\}$ est un disque de centre $M_0(0,-1)$ de rayon 2

Dans D, on trace deux disques D_1 de centre $(0,-1)$ de rayon 2 et le disque D_2 de centre $(0,-1)$ de rayon 1

L'ensemble D est défini comme étant l'ensemble des points M appartenant à D_1 et n'appartiennent pas à D_2.

Exercice 2

$$\int_{(ABCA)} Re(z)|z|^2 dz = \int_{[AB]} Re(z)|z|^2 dz + \int_{[BC]} Re(z)|z|^2 dz + \int_{(CA)} Re(z)|z|^2 dz$$
$z = x + iy \in [AB] \Leftrightarrow M(x,y) \in [AB] \Leftrightarrow y = -x + 2.$

$z = x + iy \Longrightarrow dz = dx + idy$, donc $\displaystyle\int_{[AB]} Re(z)|z|^2 dz = \int_{[AB]} x(\sqrt{x^2+y^2})^2(dx + idy)$
Comme $y = -x + 2$, $dy = -dx$:

$$\int_{[AB]} x(x^2+y^2)(dx+idy) = \int_2^0 x(2x^2-4x+4)(1-i)dx = (1-i)\int_2^0 (2x^3-4x^2+4x)dx$$
$z = x + iy \in [BC] \Leftrightarrow M(x,y) \in [BC] \Leftrightarrow x = 0$ et y varie de 2 à -2.

$dz = dx + dy = dy$ car $x = 0$.

$$\int_{[BC]} Re(z)|z|^2 dz = \int_2^{-2} 0 dy = 0 \text{ car sur } [BC] \text{ on a } Re(z) = x = 0.$$

$z = x + iy \in (CB) \Leftrightarrow M(x, y) \in (CB) \Leftrightarrow x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta$, sans oublier que $\theta = Arg(z)$ et θ varie de $\dfrac{3\pi}{2}$ à 2π.

$dx = -2\sin\theta d\theta$ et $dy = 2\cos\theta d\theta$ donc :

$\displaystyle\int_{(CA)} Re(z)|z|^2 dz = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (8\cos\theta)(-2\sin\theta + i2\cos\theta)d\theta$. car $dz = dx + idy = (-2\sin\theta + i2\cos\theta)d\theta$ et $|z| = 2$.